

ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

Математика

Методические указания по самостоятельному изучению
дисциплины и выполнению контрольной работы №3
и расчётно-графической работы №1

35.03.06 *Агроинженерия*

профили:

Сервис технических систем

Технические системы и роботизация пищевых производств

Технические системы и цифровизация производства

Электрооборудование и электротехнологии

Новосибирск 2024

Математика: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы №3 и расчётно-графической работы №1 / Новосибир. гос. аграр. ун-т; Сост. М.В.Грунина, И.В. Марчук. – Новосибирск, 2024. – 25 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки: 35.03.06 Агроинженерия (профили: Сервис технических систем, Технические системы и роботизация пищевых производств, Технические системы и цифровизация производства, Электрооборудование и электротехнологии).

Утверждены методической комиссией Инженерного института

Содержание

1. Введение	4
2. Методические указания по выполнению контрольных работ	5
3. Контрольная работа №3	7
4. Расчётно-графическая работа №1	10
5. Примеры решения задач контрольных работ	13
6. Примеры решения задач расчётно-графической работы.....	16
7. Вопросы к экзамену	23
8. Список литературы.....	24

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания математических дисциплин в вузе для студентов инженерных специальностей – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических инженерных задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое и алгоритмическое мышление; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов.

Задачи дисциплины:

- развить у студентов логическое мышление,
- познакомить студентов с идеями и методами высшей математики,
- привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,
- привить студентам опыт решения задач с использованием математических методов.

1.2. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент *должен*:

Знать:

- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и теории математической статистики;
- основные понятия и методы математического анализа;
- дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных;
- методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;
- понятия рядов и их практическое применение в приближенных вычислениях;

Уметь:

– использовать математический аппарат для обработки технической и экономической информации и анализа данных, связанных с машиноиспользованием и надежностью технических систем;

Владеть:

– методами построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2. Методические указания по выполнению контрольной работы

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями.

1. Работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер контрольной работы, дата отсылки работы в институт.

2. Задачи следует располагать в порядке возрастания номеров. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать её условие.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.

4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

6. Контрольная работа должна выполняться **самостоятельно**. Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме.

7. Если преподаватель установит **несамостоятельное выполнение работы**, то она **не будет зачтена**.

8. Получив прорецензированную работу (как зачтённую, так и незачтённую), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты. В случае незачёта по работе студент обязан в

кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

9. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

№ ва- ри- анта	Номера задач контрольных работ по вариантам									
	Контрольная работа №3						Расчётно-графическая работа №1			
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

3. Контрольная работа №3

В задачах 1–10 найти производную.

$$1. y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2}}{3x^3}.$$

$$2. y = \frac{(1 + 3x^8)\sqrt{1 + x^8}}{12x^{12}}.$$

$$3. y = \frac{(x^2 - 6)\sqrt{(4 + x^2)^3}}{120x^5}.$$

$$4. y = \frac{(3x^2 - 8)\sqrt{x^2 - 8}}{6x^3}.$$

$$5. y = \frac{4 + 3x^3}{x^3\sqrt{(1 + x^3)^2}}.$$

$$6. y = \frac{(x^2 - 2)\sqrt{4 + x^2}}{24x^3}.$$

$$7. y = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}.$$

$$8. y = \frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}.$$

$$9. y = \frac{(2x^2 + 3)\sqrt{x^2 - 3}}{9x^3}.$$

$$10. y = \frac{x-1}{(3x^2 + 5)\sqrt{x^2 + 5}}.$$

В задачах 11–20 найти производную.

$$11. y = (2x + 3)^4 \cdot \arcsin \frac{1}{2x + 3} + \frac{2}{3} (4x^2 + 12x + 11) \sqrt{x^2 + 3x + 2},$$
$$2x + 3 > 0;$$

$$12. y = (3x^2 - 4x + 2) \sqrt{9x^2 - 12x + 3} + (3x - 2)^4 \cdot \arcsin \frac{1}{3x - 2}, \quad 3x - 2 > 0;$$

$$13. y = \ln(e^{5x} + \sqrt{e^{10x} - 1}) + \arcsin(e^{-5x})$$

$$14. y = \frac{2}{3} (4x^2 - 4x + 3) \sqrt{x^2 - x} + (2x - 1)^4 \cdot \arcsin \frac{1}{2x - 1}, \quad 2x - 1 > 0$$

$$15. y = \arcsin(e^{-4x}) + \ln(e^{4x} + \sqrt{e^{8x} - 1})$$

$$16. y = (3x + 1)^4 \cdot \arcsin \frac{1}{3x + 1} + (3x^2 + 2x + 1) \sqrt{9x^2 + 6x}, \quad 3x + 1 > 0$$

$$17. y = \frac{1}{24}(x^2 + 8)\sqrt{x^2 - 4} + \frac{x^4}{16} \arcsin \frac{2}{x}, \quad x > 0$$

$$18. y = \frac{x^4}{81} \arcsin \frac{3}{x} + \frac{1}{81}(x^2 + 18)\sqrt{x^2 - 9}, \quad x > 0$$

$$19. y = \ln(e^{3x} + \sqrt{e^{6x} - 1}) + \arcsin(e^{-3x})$$

$$20. y = 3 \arcsin \frac{3}{4x+1} + 2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}, \quad 4x+1 > 0$$

В задачах **21–30** найти производную функции, заданной параметрически.

$$21. \begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \\ y = t\sqrt{t^2 + 1}. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \arcsin(t - 1). \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2e^t), \\ y = \ln \operatorname{tg} e^t. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^{t/2}, \\ y = \sqrt{e^t + 1}. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x = \frac{3t^2 + 1}{3t^3}, \\ y = \sin\left(\frac{t^3}{3} + t\right). \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \operatorname{tg} \sqrt{1 + t}. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x = \arcsin(\cos t), \\ y = \arccos(\sin t). \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x = \ln \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

В задачах **31-35** найти частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

$$31. z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

$$32. z = \arctg \frac{x + y}{1 - xy}.$$

$$33. z = \sin^2(2x + 3y).$$

$$34. z = \ln(x^2 + y).$$

$$35. z = \ln \sqrt{2xy + y^2}.$$

В задачах **36-40** проверить равенства.

$$36. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0, \text{ если } z = \ln(e^x + e^y).$$

$$37. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если } z = e^x(x \cos y - y \sin y).$$

$$38. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если } z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$39. \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}, \text{ если } z = y \cos(x^2 - y^2).$$

$$40. x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если } z = x \ln \frac{y}{x} + \frac{y}{x}.$$

В задачах **41-50** найти неопределённый интеграл. Правильность полученного результата проверить дифференцированием.

$$41. \int \frac{xdx}{7 + x^2}.$$

$$42. \int \frac{dx}{\sin^2 5x}.$$

$$43. \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}.$$

$$44. \int \frac{dx}{5x + 3}.$$

$$45. \int \sin(2 - 3x)dx.$$

$$46. \int e^{4x-2} dx.$$

$$47. \int \frac{dx}{7+4x^2}.$$

$$48. \int \frac{dx}{\cos^2 2x}.$$

$$49. \int \cos(3x-4)dx.$$

$$50. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}.$$

В задачах **51-60** найти неопределённые интегралы с помощью формулы интегрирования по частям.

$$51. \int (3-x) \cos x dx.$$

$$52. \int x \ln(1-3x) dx.$$

$$53. \int x e^{-7x} dx.$$

$$54. \int \operatorname{arctg} 4x dx.$$

$$55. \int \sqrt{x^3} \ln x dx.$$

$$56. \int x \sin 5x dx.$$

$$57. \int (2x+5) \sin x dx.$$

$$58. \int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}.$$

$$59. \int \arcsin \frac{x}{3} dx.$$

$$60. \int x e^{3x} dx.$$

4. Расчётно-графическая работа №4

В задачах **61-70** исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики. Исследование функции рекомендуется проверить по следующей схеме: 1) найти область определения функции; 2) исследовать функцию на непрерывность; 3) определить, является ли данная функция чётной, нечётной; 4) найти интервалы возрастания и убывания функции и точки её экстремума; 5) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба; 6) найти асимптоты графика функции.

$$61. y = \frac{4x}{4+x^2}.$$

$$62. y = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

$$63. y = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

$$64. y = \frac{x^2}{x+1}.$$

$$65. y = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

$$66. y = \frac{4x^3+5}{x}.$$

$$67. y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}.$$

$$69. y = \frac{4x^3}{x^3 - 1}.$$

$$68. y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

$$70. y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}.$$

В задачах **71-80** вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

$$71. \begin{cases} y = x^2 + 6x - 5 \\ y = 8x - 2 \end{cases}$$

$$73. \begin{cases} y = -x^2 + 2x - 3 \\ y = 4x - 6 \end{cases}$$

$$75. \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

$$77. \begin{cases} y = 2x - x^2 + 3 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

$$79. \begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = 5x - 11 \end{cases}$$

$$72. \begin{cases} y = x^2 + x - 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$74. \begin{cases} y = x^2 - 3x + 7 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

$$76. \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

$$78. \begin{cases} y = -x^2 + x + 3 \\ y = -x \end{cases}$$

$$80. \begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = 5x - 11 \end{cases}$$

В задачах **81 – 90** построить на плоскости Oxy область интегрирования заданного интеграла; изменить порядок интегрирования и вычислить интеграл.

$$81. \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy.$$

$$83. \int_{-2}^2 dx \int_{-1/\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} dy.$$

$$82. \int_0^5 dx \int_x^{\sqrt{10x-x^2}} dy.$$

$$84. \int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} dy.$$

$$85. \int_1^2 dx \int_x^{2x} dy.$$

$$86. \int_0^1 dx \int_0^x dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy.$$

$$87. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} dy.$$

$$88. \int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} dy.$$

$$89. \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x dy.$$

$$90. \int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} dx + \int_0^1 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} dx.$$

В задачах **91–100** найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

$$91. z = 2 - 12(x^2 + y^2); \quad z = 24x + 2.$$

$$92. z = 10[(x-1)^2 + y^2] + 1; \quad z = 21 - 20x.$$

$$93. z = 8(x^2 + y^2) + 3; \quad z = 16x + 3.$$

$$94. z = 2 - 20[(x+1)^2 + y^2]; \quad z = -40x - 38.$$

$$95. z = 4 - 14(x^2 + y^2); \quad z = 4 - 28x.$$

$$96. z = 28[(x+1)^2 + y^2] + 3; \quad z = 56x + 59.$$

$$97. z = 32(x^2 + y^2) + 3; \quad z = 3 - 64x.$$

$$98. z = 4 - 6[(x-1)^2 + y^2]; \quad z = 12x - 8.$$

$$99. z = 2 - 4(x^2 + y^2); \quad z = 8x + 2.$$

$$100. z = 22[(x-1)^2 + y^2] + 3; \quad z = 47 - 44x.$$

5. Примеры решения задач контрольной работы

Пример 1: Найти производную $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$

Решение.

Воспользуемся формулой логарифмического дифференцирования $y' = y (\ln y)'$.

$$\ln y = \ln \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}} = 3 \ln(x+1) + \frac{1}{4} \ln(x-2) - \frac{2}{5} \ln(x-3),$$

$$\text{тогда } y' = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}} \left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} + \frac{2}{5(x-3)} \right).$$

Пример 2: Найти производную

$$y = \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} + e^{\arctg \ln(2x+3)} + \frac{3x^2 - 1}{\sin x},$$

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} + e^{\arctg \ln(2x+3)} + \frac{3x^2 - 1}{\sin x} \right)' = \\ &= (\cos x)' \sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x \left(\sqrt{1 + \sin^2 x} \right)' + e^{\arctg \ln(2x+3)} (\arctg \ln(2x+3))' + \\ &+ \frac{(3x^2 - 1)' \sin x - (3x^2 - 1)(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \\ &= -\sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x \frac{1}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}} (1 + \sin^2 x)' + \\ &+ e^{\arctg \ln(2x+3)} \frac{1}{1 + (\ln(2x+3))^2} (\ln(2x+3))' + \frac{6x \sin x - (3x^2 - 1) \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= -\sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} + \frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}} 2 \sin x (\sin x)' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^{\arctg \ln(2x+3)}}{1 + \ln^2(2x+3)} \cdot \frac{1}{2x+3} (2x+3)' + \frac{6x \sin x - (3x^2 - 1) \cos x}{\sin^2 x} = \\
& = -\sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} + \frac{\cos^2 x \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{2e^{\arctg \ln(2x+3)}}{(1 + \ln^2(2x+3))(2x+3)} + \\
& + \frac{6x \sin x - (3x^2 - 1) \cos x}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

Пример 3. Найти производную функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся формулой $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

$$y'_t = (e^t \sin t)'_t = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t),$$

$$x'_t = (e^t \cos t)'_t = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t),$$

$$y'_x = \frac{e^t (\sin t + \cos t)}{e^t (\cos t - \sin t)} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}.$$

Пример 4. Доказать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$,

если $z = \ln(y-x) - \ln x - \ln y$.

Решение. Найдем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y-x} (y-x)'_x - \frac{1}{x} - 0 = -\frac{1}{y-x} - \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)'_x = \frac{1}{(y-x)^2} (y-x)'_x + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{(y-x)^2} + \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)'_y = \frac{1}{(y-x)^2} (y-x)'_y + 0 = \frac{1}{(y-x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{(y-x)^2} + \left(-\frac{1}{(y-x)^2} + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2}.$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Пример 5. Найти неопределённый интеграл. Правильность полученного результата проверить дифференцированием.

$$\int \frac{dx}{x \ln x}$$

Решение.

$$\text{а) } \int \frac{dx}{x \ln x} = \left| \frac{dx}{x} = d(\ln x) \right| = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| + C.$$

$$\text{Проверка: } (\ln |\ln x| + C)' = \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}. \text{ Верно!}$$

Пример 6. Найти неопределённые интеграл с помощью формулы интегрирования по частям. Правильность полученного результата проверить дифференцированием.

$$\int \ln(x^2 + 1) dx.$$

Решение.

$$\text{в) } \int \ln(x^2 + 1) dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x^2 + 1), \quad du = \frac{2x dx}{x^2 + 1}, \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \ln(x^2 + 1) -$$

$$- \int x \cdot \frac{2x dx}{1 + x^2} = x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2 dx}{1 + x^2} = \left| \frac{x^2}{1 + x^2} = 1 - \frac{1}{1 + x^2} \right| =$$

$$= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx = x \ln(x^2 + 1) - 2(x - \arctg x) + C.$$

Проверка:

$$(x \ln(x^2 + 1) - 2(x - \arctg x) + C)' = 1 \cdot \ln(x^2 + 1) + x \cdot \frac{2x}{1 + x^2} -$$

$$-2\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) = \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{1+x^2} - \frac{2(1+x^2-1)}{1+x^2} = \ln(x^2 + 1). \text{ Верно.}$$

6. Примеры решения задач расчётно-графической работы

Пример 7. Исследовать данную функцию методами дифференциального исчисления и построить их графики. Исследование функции рекомендуется проверить по следующей схеме: 1) найти область определения функции; 2) исследовать функцию на непрерывность; 3) определить, является ли данная функция чётной, нечётной; 4) найти интервалы возрастания и убывания функции и точки её экстремума; 5) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба; 6) найти асимптоты графика функции.

$$y = \sqrt[3]{x(x+6)^2}$$

Решение. $y = \sqrt[3]{x(x+6)^2}$

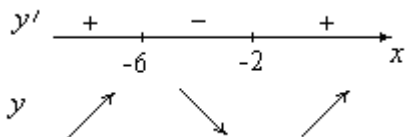
1) Область определения: $x \in (-\infty; \infty)$

2) Функция непрерывна.

3) $y(-x) = \sqrt[3]{-x(-x+6)^2}$, чётность, нечётность, периодичность отсутствуют.

$$4) y' = \left(x^{\frac{1}{3}}(x+6)^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+6)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}(x+6)^{-\frac{1}{3}} = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x+6}}.$$

$y' = 0$ при $x = -2$, y' не существует при $x = 0$ и $x = -6$. Применяя метод интервалов, определяем интервалы монотонности функции.

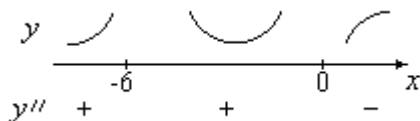


Итак, функция возрастает при $x \in (-\infty; -6) \cup (-2; \infty)$ и убывает при $x \in (-6; -2)$.

$y(-6) = 0$ – точка максимума, $y(-2) = -2\sqrt[3]{4}$ – точка минимума.

$$5) y'' = \left(\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x+6}} \right)' = -\frac{8}{\sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[3]{(x+6)^4}}.$$

$y'' \neq 0$, y'' не существует при $x = 0$ и $x = -6$. Методом интервалов определяем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.



6) Вертикальных асимптот нет.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x+6)^2}}{x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x(x+6)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 12x^2 + 36x} - x \right) =$$

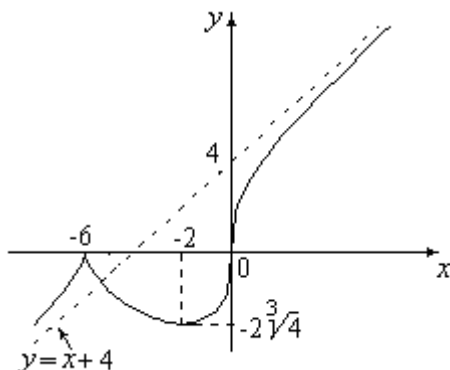
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{12}{x} + \frac{36}{x^2}} - 1 \right) \right).$$

Применим теперь эквивалентность $(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$ при $t \rightarrow 0$. В нашем случае

$$\alpha = \frac{1}{3}, t = \frac{12}{x} + \frac{36}{x^2}. \text{ Поэтому } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{12}{x} + \frac{36}{x^2} \right) \right) = 4.$$

т.е. есть наклонная асимптота $y = x + 4$.

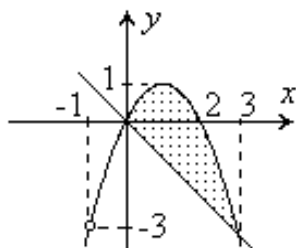
7) на основании полученных результатов строим график функции



Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = -x. \end{cases}$$

Решение. Построим фигуру, ограниченную параболой $y = 2x - x^2$ (точки пересечения параболы с осью Ox : $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, ветви параболы направлены вниз) и прямой $y = -x$.



Вычислим площадь по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx, \quad \text{где график функции}$$

$y = f_2(x)$ ограничивает фигуру сверху, а график функции $y = f_1(x)$ — снизу. Для нахождения пределов интеграла решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = -x. \end{cases} \quad 2x - x^2 = -x, \quad 3x - x^2 = 0, \quad x=0, \quad x=3.$$

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^3 = 4,5.$$

Ответ: Площадь фигуры равна 4,5.

Пример 9.
$$I = \int_{-4}^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dy.$$

Построить на плоскости Oxy область интегрирования заданного

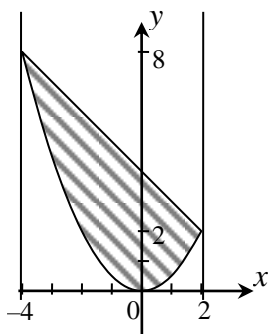
интеграла; изменить порядок интегрирования и вычислить интеграл.

Решение. Область интегрирования определяется неравенствами:

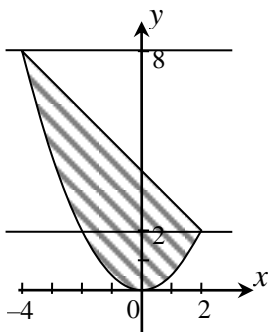
$$-4 \leq x \leq 2; \quad \frac{x^2}{2} \leq y \leq 4 - x. \text{ То есть слева и справа область ограничена}$$

прямыми линиями $x = -4$ и $x = 2$, снизу – параболой $y = \frac{x^2}{2}$, сверху

– прямой $y = 4 - x$. Построив эти линии, получаем следующую область



Для того, что бы изменить порядок интегрирования, внесём в рисунок следующие изменения: уберём прямые $x = -4$ и $x = 2$ (область не изменилась) и добавим прямые $y = 0$, $y = 2$ и $y = 8$.



Выражаем x : $y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2y}$, $y = 4 - x \Rightarrow x = 4 - y$.

Записываем интеграл с новым порядком интегрирования

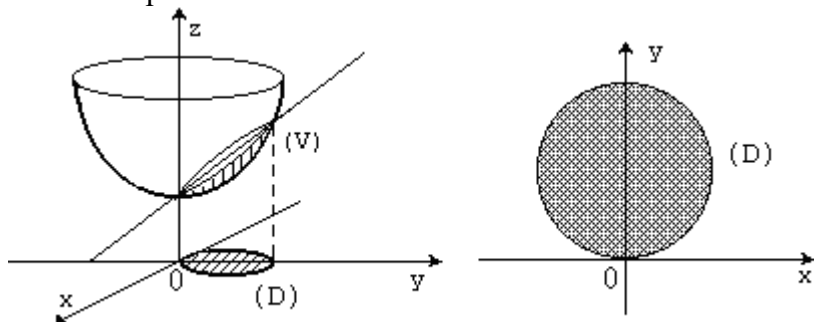
$$\int_{-4}^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx + \int_2^8 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{4-y} dx.$$

Вычислять удобнее начальный интеграл:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-4}^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dy = \int_{-4}^2 \left(4 - x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_{-4}^2 = \\ &= 8 - 2 - \frac{8}{6} + 16 + 8 - \frac{64}{6} = 18 \end{aligned}$$

Пример 10. Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже. $z = 28(x^2 + y^2) + 3$; $z = 56y + 3$,

Решение. Тело (V) ограничено двумя поверхностями: параболоидом $z = 28(x^2 + y^2) + 3$ и плоскостью $z = 56y + 3$. Изобразим это тело на чертеже:



Найдем область, в которую тело проектируется на плоскость xOy ,

для чего из уравнений поверхностей, ограничивающих тело, следует исключить переменную z (т.е. совершить ортогональное проектирование):

$$28(x^2 + y^2) + 3 = 56y + 3; x^2 + y^2 = 2y \quad \text{и} \quad x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Таким образом, областью (D) является круг с центром в точке $(0; 1)$ радиуса $R=1$ (см. рис.).

Объем тела может быть вычислен с помощью тройного интеграла по формуле $V = \iiint_{(V)} dv$. В декартовой системе координат трой-

ной интеграл записывается через повторный следующим образом:

$$V = \int_{-1}^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} dy \int_{28(x^2+y^2)+3}^{56y+3} dz,$$

откуда видно, что его вычисление сопряжено со значительными трудностями (на завершающей стадии вычисления повторного интеграла).

Запишем интеграл в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) , с которой декартова система связана формулами

$$x = \rho \cdot \cos \varphi, \quad y = \rho \cdot \sin \varphi, \quad z = z.$$

Якобиан преобразования $J = \rho$. Формула перехода (в интеграле)

имеет вид

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(V')} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz.$$

В нашем случае

$$V = \iiint_{(V)} dv = \iiint_{(V')} \rho d\rho d\varphi dz.$$

Запишем уравнения параболоида и плоскости в цилиндрической системе координат:

$$z = 28\rho^2 + 3; \quad z = 56\rho \cdot \sin \varphi + 3.$$

Для окружности $x^2 + y^2 = 2y$ имеем $\rho = 2\sin \varphi$; угол φ , очевидно, необходимо менять в пределах от 0 до π . Таким образом,

$$V = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin \varphi} \rho d\rho \int_{28\rho^2+3}^{56\rho \cdot \sin \varphi + 3} dz = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin \varphi} (56\rho \sin \varphi - 28\rho^2) \rho d\rho =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} \left(56 \frac{\rho^3}{3} \sin \varphi - 28 \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^{2 \sin \varphi} d\varphi = 28 \int_0^{\pi} \left(\frac{2}{3} \cdot 8 \sin^4 \varphi - \frac{1}{4} \cdot 16 \sin^4 \varphi \right) d\varphi = \\
&= \frac{28}{3} \int_0^{\pi} 4 \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{28}{3} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi)^2 d\varphi = \\
&= \frac{28}{3} \int_0^{\pi} \left(1 - 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \frac{28}{3} \cdot \frac{3}{2} \pi.
\end{aligned}$$

Ответ: $V = 14\pi$.

7. Вопросы к экзамену

1. Правила дифференцирования.
2. Производные основных элементарных функций.
3. Связь дифференциала и производной.
4. Свойства дифференциала.
5. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши,
6. Правило Лопиталя.
7. Необходимое и достаточное условие возрастания функции на отрезке.
8. Необходимое условие существования экстремума.
9. Достаточные условия существования экстремума.
10. Необходимое и достаточное условие выпуклости функции на отрезке.
11. Достаточное условие существования точки перегиба.
12. Частные производные и полный дифференциал функции двух переменных
13. Частные производные высших порядков.
14. Необходимое и достаточное условие существования экстремума функции двух переменных.
15. Метод наименьших квадратов.
16. Теоремы о первообразных. Свойства неопределённого интеграла.
17. Интегрирование по частям.
18. Интегрирование рациональных дробей.
19. Интегрирование тригонометрических функций.
20. Верхняя и нижняя интегральная сумма. Их свойства.
21. Свойства определённого интеграла.
22. Формула Ньютона-Лейбница.
23. Правила вычисления определённых интегралов.
24. Геометрические приложения определённых интегралов.

8. Список литературы

8.1. Список основной литературы

1. Шипачев, В. С. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. — Москва: ИНФРА-М, 2022. — 479 с. — (Высшее образование). — DOI 10.12737/5394. - ISBN 978-5-16-010072-2.
- Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1850356>
2. Ячменев, Л. Т. Высшая математика: учебник / Л. Т. Ячменёв. - Москва: РИОР: ИНФРА-М, 2020. - 752 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-369-01032-7. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1056564>.

8.2. Список дополнительной литературы

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст]: учебное пособие для студентов вузов. В 2-х т.Т.1 / Н.С. Пискунов. Стер. - Москва: Интеграл – Пресс, 2006. – 416 с.
2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст]: учебное пособие для студентов вузов. В 2-х т.Т.2 / Н.С. Пискунов. Стер. - Москва: Интеграл – Пресс, 2006. – 544 с.

Математика: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины
и выполнению контрольной работы №3 и расчётно-графической работы №1

Составители: Грунина Мария Викторовна
Марчук Игорь Владимирович

Подписано к печати “__” _____ 2024_ г. Формат 84×108/32
Объём 1,4 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160