ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

Экономико-математическое моделирование

Методические указания по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы

38.03.01 *Экономика*
38.03.02 *Менеджмент*
38.03.03 *Управление персоналом*
38.03.04 *Государственное и муниципальное управление*
43.03.01 *Сервис*

Новосибирск 2023

Рецензент: кандидат техн. наук, доцент Е.Ю. Тарсис

Экономико-математическое моделирование: методические указания по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. М.В.Грунина. – Новосибирск, 2023. – 37 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки: 38.03.01 Экономика; 38.03.02 Менеджмент; 38.03.03 Управление персоналом; 38.03.04 Государственное и муниципальное управление; 43.03.01 Сервис.

Утверждены и рекомендованы к изданию учебно-методическим советом факультета Экономики и управления (протокол №8 от 23 апреля 2024).

Оглавление

1. Введение

Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания экономико-математического моделирования в вузе для студентов экономических и организационно-управленческих специальностей – добиться усвоения студентами основ математического моделирования, необходимого для решения теоретических и практических экономических и организационно-управленческих задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям, подготовить к чтению современной научной литературы и обеспечить запросы других разделов математики и дисциплин; развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также начальные навыки прикладных исследований.

Задачи дисциплины:

– познакомить студентов с идеями и методами математического моделирования,

– привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,

– привить студентам опыт решения задач с использованием инструментариев математического моделирования.

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, виды финансовой, бухгалтерской информации, содержащейся в отчетности предприятий различных форм собственности;

- последовательность принятия управленческих решений в сфере финансовой деятельности предприятия;

уметь:

- применять соответствующие инструментальные средства для обработки экономических данных, использовать результаты анализа этой информации для обоснования выводов по комплексной оценке, финансового состояния хозяйствующего субъекта;
- выявлять проблемы экономического характера при анализе конкретных ситуаций, предлагать способы их решения с учетом критериев социально-экономической эффективности, оценки рисков и возможных социально-экономических последствий;
- обосновывать выбор того или иного варианта управленческого финансового решения на основе всесторонней критической оценки;

владеть:

- методологией экономического исследования; навыками применения современного математического инструментария для решения задач, связанных с расчетом параметров, необходимых для принятия решений в области оценки финансового состояния организации, кредитоспособности заемщиков, страхования рисков, инвестиционной привлекательности активов
- навыками формулировки и обоснования предложений по совершенствованию управленческих решений в сфере финансовой деятельности предприятий

2. Методические указания по выполнению контрольной работы

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями.

1. Работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво

написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер группы.

2. Задачи следует располагать в порядке возрастания номеров. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать её условие.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.

4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

6. Контрольная работа должна выполняться **самостоятельно.** Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме.

7. Если преподаватель установит **несамостоятельное выполнение работы,** то она **не будет зачтена.**

8. Получив прорецензированную работу (как зачтённую, так и незачтённую), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты. В случае незачёта по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

9. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Номера задач контрольной работы по вариантам	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

3. Задания для контрольной работы

Задачи 1-10.

Решить симплексным методом, контролируя вычисления.

1. $\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 17, \\ -2x_2 \le -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \le -11, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0, \\ -x_1 - 8x_2 \to \max. \end{array}$	**2.** $\begin{array}{l} x_2 - x_3 \le 8, \\ -2x_1 - x_2 \le -15, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 \le 8, \\ x_2 - 2x_3 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0, \\ -8x_1 - 13x_3 \to \max. \end{array}$
3. $\begin{array}{l} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le -6, \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \ge -14, \\ -x_1 - x_2 + x_3 \le 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \le 11, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0, \\ -x_1 + 8x_2 \to \max. \end{array}$	**4.** $\begin{array}{l} -2x_1 - 2x_2 - x_3 \le -3, \\ -x_1 + x_3 \ge 1, \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 8, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0, \\ 6x_1 + 8x_2 - x_3 \to \max. \end{array}$
5. $\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -1, \\ x_2 - 2x_3 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ -2x_2 \ge -6, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0, \\ 3x_1 + x_3 \to \min. \end{array}$	**6.** $\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 \ge 9, \\ -x_1 + 2x_3 \le -5, \\ -x_2 + x_3 \le -1, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0, \\ -5x_1 - 4x_2 + 6x_3 \to \max. \end{array}$
7. $\begin{array}{l} -x_1 - 2x_2 \le -2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 8, \\ -x_2 + x_3 \ge 3, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0, \\ -18x_2 + 10x_3 \to \max. \end{array}$	**8.** $\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 14, \\ x_1 - x_3 \ge -5, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \ge 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 27, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0, \\ -7x_1 + 4x_2 - 10x_3 \to \max. \end{array}$
9. $\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 \le -1, \\ 2x_1 \le 8, \end{array}$	**10.** $\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 8, \\ -x_1 - 2x_3 \le -3, \end{array}$

$2x_1 - x_2 - x_3 \le 5,$ $x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$ $14x_1 - 2x_2 - 4x_3 \to \max.$	$2x_2 - x_3 \le -2,$ $-x_1 + 2x_3 \le 2,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$ $4x_1 + 5x_3 \to \min.$

Задачи 11-20.

Решить транспортную задачу, начиная методом северо-западного угла.

11. $a_1 = 20,\ a_2 = 18,\ a_3 = 22,\ a_4 = 22,$ $b_1 = 15,\ b_2 = 36,\ b_3 = 3.$ $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$	**12.** $a_1 = 5,\ a_2 = 34,\ a_3 = 5,$ $b_1 = 6,\ b_2 = 34,\ b_3 = 15,\ b_4 = 17.$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$
13. $a_1 = 20,\ a_2 = 18,\ a_3 = 22,\ a_4 = 22,$ $b_1 = 15,\ b_2 = 36,\ b_3 = 3.$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$	**14.** $a_1 = 30,\ a_2 = 34,\ a_3 = 7,\ a_4 = 8,$ $b_1 = 25,\ b_2 = 26,\ b_3 = 6.$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 6 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$
15. $a_1 = 13,\ a_2 = 4,\ a_3 = 28,$ $b_1 = 21,\ b_2 = 2,\ b_3 = 6,\ b_4 = 34.$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$	**16.** $a_1 = 18,\ a_2 = 34,\ a_3 = 18,$ $b_1 = 30,\ b_2 = 13,\ b_3 = 11,\ b_4 = 37.$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 3 & 3 \\ 9 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$
17. $a_1 = 4,\ a_2 = 23,\ a_3 = 13,$ $b_1 = 14,\ b_2 = 27,\ b_3 = 4,\ b_4 = 13.$	**18.** $a_1 = 19,\ a_2 = 15,\ a_3 = 35,\ a_4 = 21,$ $b_1 = 24,\ b_2 = 15,\ b_3 = 27.$

$C=\begin{pmatrix}2&3&4&4\\4&3&2&5\\3&5&6&7\end{pmatrix}$.	$C=\begin{pmatrix}2&4&5\\5&2&3\\3&4&4\\5&2&7\end{pmatrix}$.
19. $a_1=$ **7,** $a_2=$ **9,** $a_3=$ **7,** $b_1=$ **8,** $b_2=$ **19,** $b_3=$ **11,** $b_4=$ **19.** $C=\begin{pmatrix}3&5&6&7\\7&8&4&7\\2&5&2&3\end{pmatrix}$.	**20.** $a_1=$ **17,** $a_2=$ **12,** $a_3=$ **7,** $a_4=$ **23,** $b_1=$ **12,** $b_2=$ **17,** $b_3=$ **2.** $C=\begin{pmatrix}8&6&7\\7&5&8\\7&7&6\\6&7&8\end{pmatrix}$.

4. Примеры решения задач контрольной работы

Пример 1. Решить симплексным методом, контролируя вычисления

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5,$$
$$-x_1 + x_3 \le 1,$$
$$-x_1 - 2x_2 - x_3 \le -5,$$
$$2x_2 - x_3 \ge 3,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$$
$$11x_1 + 8x_2 + x_3 \to \min.$$

Решение.

Приведем задачу к каноническому виду

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5,$$
$$-x_1 + x_3 \le 1,$$
$$-x_1 - 2x_2 - x_3 \le -5,$$
$$-2x_2 +- x_3 \le -3,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$$
$$F = -z = -11x_1 - 8x_2 - x_3 \to \max.$$

Составляем симплекс-таблицу

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
y_1	-1	2	-1	5
y_2	-1	0	1	1
y_3	-1	-2	-1	-5
y_4	0	-2	1	-3
F	11	8	1	0

Первый этап: поиск допустимого решения.

Шаг 1.

Выбираем любую строку симплекс-таблицы с отрицательным элементом в последнем столбце. Если все элементы последнего столбца положительны, то решение является допустимым, и следует переходить ко второму этапу. В нашем примере последний столбец содержит два отрицательных элемента: -5 и -3. Выбираем любой, например, -5.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
y_1	-1	2	-1	5
y_2	-1	0	1	1
y_3	-1	-2	-1	-5
y_4	0	-2	1	-3
F	11	8	1	0

Далее, выбираем в выделенной строке любой отрицательный элемент, например, a_{33}= -1.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
y_1	-1	2	-1	5
y_2	-1	0	1	1
y_3	-1	-2	-1	-5
y_4	0	-2	1	-3
F	11	8	1	0

Вычисляем неотрицательные отношения элементов последнего столбца к выбранному, при этом нули можно делить только на положительные числа: min{1/1, -5/-1}.

Минимальное отношение соответствует разрешающей строке.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
y_1	-1	2	-1	5
y_2	-1	0	1	1
y_3	-1	-2	-1	-5
y_4	0	-2	1	-3
F	11	8	1	0

Итак, разрешающий столбец $-x_3$, разрешающая строка y_2, разрешающий элемент α=1.

Шаг 2.

Переходим к симплекс-преобразованиям:

1) Разрешающую строку делим на α;
2) Разрешающий столбец делим на (-α);
3) Остальные элементы таблицы пересчитываем по правилу прямоугольника

$$\boxed{\text{новый элемент}} = \frac{\boxed{\text{старый элемент}} \times \boxed{\text{разрешающий элемент}} - \boxed{\text{элемент разрешающего столбца}} \times \boxed{\text{элемент разрешающей строки}}}{\boxed{\text{разрешающий элемент}}}$$

При симплекс-преобразованиях меняются местами разрешающий столбец и разрешающая строка.

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_2$	1
y_1	-2	2	1	6
x_3	-1	0	1	1
y_3	-2	-2	1	-4
y_4	1	-2	-1	-4
F	12	8	-1	-1

Шаг 3.

Выбираем любую строку симплекс-таблицы с отрицательным элементом в последнем столбце. Например, строку y_4 с отрицательным элементом -4.

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_2$	1
y_1	-2	2	1	6
x_3	-1	0	1	1
y_3	-2	-2	1	-4
y_4	1	-2	-1	-4
F	12	8	-1	-1

Выбираем в выделенной строке любой отрицательный элемент, например, a_{42}= -2.

Вычисляем неотрицательные отношения элементов последнего столбца к выбранному: min{6/2, -4/-2, -4/-2}.

Минимальное отношение достигается на двух строках: y_3 и y_4. Выбираем любое, например, y_3. Тогда разрешающая строка y_3, разрешающий столбец $-x_2$, разрешающий элемент α= -2.

Шаг 4.

При симплекс преобразованиях меняем местами столбец $-x_2$ и строку y_3.

1) Разрешающую строку делим на α;
2) Разрешающий столбец делим на (-α);
3) Остальные элементы таблицы пересчитываем по правилу прямоугольника.

	$-x_1$	$-y_3$	$-y_2$	1
y_1		1		2
x_3	-1	0	1	1
x_2	1	-1/2	-1/2	2
y_4		-1		0
F	4	4	3	-17

Поскольку все элементы последнего столбца, исключая значение функции F, неотрицательны, то получено допустимое решение.

Переходим ко второму этапу: построению оптимального плана.

Т.к. все элементы последней строки (исключая значение функции F) неотрицательны, то допустимое решение является оптимальным.

Итак, $x_1=0$, $x_2 = 1$, $x_3 =2$, $F(0,1,2)= -17$, $z = -F= 17$.

Ответ: $z\max = z(0,1,2)=17$.

Пример 2. Решить транспортную задачу, начиная методом северо-западного угла.

$$a_1 = \mathbf{6},\ a_2 = \mathbf{11},\ a_3 = \mathbf{33},\ a_4 = \mathbf{23},$$

$$b_1 = \mathbf{7},\ b_2 = \mathbf{13},\ b_3 = \mathbf{18}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение.

В данной задаче четыре поставщика и три потребителя. Прежде чем приступить к решению транспортной задачи, необходимо ее закрыть, если она открытая.

Суммарный объем груза у поставщиков равен $A = \sum_{i=1}^{4} a_i = 6 + 11 + 33 + 23 = 73$, а суммарная потребность составляет величину $B = \sum_{j=1}^{3} b_j = 7 + 13 + 18 = 38$. Так как *A* > *B*, то задача открытая, и чтобы ее закрыть, вводим фиктивного потребителя с потребностью в грузе, равной разности *A* – *B*. Будем иметь $b_4 = 73 - 38 = 35$.

Коэффициенты транспортных расходов на доставку груза от поставщиков к фиктивному потребителю полагаются равными нулю, $c_{i4} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, 4$.

Первый этап: построение допустимого плана методом северо-западного угла.

Шаг 1.

Представим данные закрытой транспортной задачи в табличной форме. Поставщики выписаны по вертикали, потребители – по горизонтали.

	7	13	18	35
6				
11				
33				
23				

Берется северо-западный угол таблицы – клетка (1, 1) и планируется поставка от первого поставщика к первому потребителю в объеме $x_{11} = \min(a_1, b_1) = \min(6, 7) = 6$. Эта поставка записывается в левый нижний угол клетки. Величина запланированной поставки вычитается из запаса груза a_1 и потребности b_1. Неудовлетворенная потребность первого потребителя становится равной 7 – 6 = 1, а запас груза у первого поставщика полностью исчерпан. Первая строка закрывается, т.е. она больше не участвует при построении начального опорного плана.

	1	13	18	35
0	6			
11				
33				
23				

Шаг 2.

В оставшейся части таблицы снова берется северо-западный угол – клетка (2, 1). Полагается $x_{21} = \min(11{,}1) = 1$, первый потребитель удовлетворен полностью, следовательно, первый столбец закрывается.

	0	13	18	35
0	6			
10	1			
33				
23				

Шаг 3.

Берется клетка (2, 2), полагается $x_{22} = \min(10{,}13) = 10$ и вычитается величина этой поставки из оставшегося объема груза у второго поставщика и потребности второго потребителя. Закрываем вторую строку.

	0	3	18	35
0	6			

0	1	10		
33				
23				

Шаг 4.

Клетка (3, 2), полагается $x_{32} = \min(33, 3) = 3$. Закрываем второй столбец.

	0	0	18	35
0	6			
0	1	10		
30		3		
23				

Шаг 5.

Клетка (3, 3), $x_{33} = \min(30, 18) = 18$. Закрываем третий столбец.

	0	0	0	35
0	6			
0	1	10		
12		3	18	
23				

Шаг 6.

Клетка (3, 4), $x_{34} = \min(12, 35) = 12$. Закрываем третью строку.

	0	0	0	23

0	6			
0	1	10		
0		3	18	12
23				

Шаг 7.

Клетка (4, 4), $x_{44} = \min(23, 23) = 23$. Закрываем четвертый столбец. Допустимый план построен.

	0	0	0	0
0	6			
0	1	10		
0		3	18	12
0				23

Переходим ко второму этапу: оптимизации построенного допустимого плана.

Шаг 1.1.

Накладываем построенный допустимый план на платежную матрицу C.

b_k \ a_i	7	13	18	35
6	6 6	5	8	0
11	3	4	8	0

	1	10		
33	4	6 3	6 18	0 12
23	3	7	9	0 23

Шаг 1.2.

Вычисляем потенциалы, согласованные с опорным планом поставок.

Потенциалы u_i поставщиков и v_j потребителей находятся из уравнений вида $v_j - u_i = c_{ij}$.

Такие уравнения составляются для всех занятых поставками клеток таблицы:

b_k / a_i	7	13	18	35	u_i
6	6 6	5	8	0	10
11	3 1	4 10	8	0	13
33	4	6 3	6 18	0 12	11
23	3	7	9	0 23	11
v_j	16	17	17	11	205

Для определенности примем, что $u_1 = 10$. Тогда все остальные потенциалы можно будет найти, решив систему уравнений:

$$\mathrm{v}_1 - \mathrm{u}_1 = 6, \quad \mathrm{v}_2 - \mathrm{u}_2 = 4, \quad \mathrm{v}_3 - \mathrm{u}_3 = 6, \quad \mathrm{v}_4 - \mathrm{u}_4 = 0,$$

$$\mathrm{v}_1 - \mathrm{u}_2 = 3, \quad \mathrm{v}_2 - \mathrm{u}_3 = 6, \quad \mathrm{v}_4 - \mathrm{u}_3 = 0.$$

Имеем $\mathrm{v}_1 = 16$, $u_2 = 13$, $\mathrm{v}_2 = 17$, $\mathrm{u}_3 = 11$, $\mathrm{v}_3 = 17$, $\mathrm{v}_4 = 11$, $\mathrm{u}_4 = 11$.

Суммарные затраты на перевозки

$$z = 6 \times 6 + 3 \times 1 + 4 \times 10 + 6 \times 3 + 6 \times 18 = 205.$$

Шаг 1.3. Проверяем план на оптимальность.

Обозначим $\Delta_{ij} = v_j - c_{ij} - u_i$, тогда критерий оптимальности опорного плана может быть сформулирован так: *опорный план поставок оптимален тогда и только тогда, когда потенциалы, согласованные с ним, удовлетворяют условию* $\Delta_{ij} \le 0$*, где* (i, j) *– свободные клетки таблицы.*

Из этого критерия вытекает, что если для некоторой свободной клетки (i_0, j_0) величина $\Delta_{i_0 j_0} > 0$, то план перевозок не оптимален и его можно улучшить.

Вычислим величины Δ_{ij} для свободных клеток. Имеем

$$\Delta_{12} = \mathrm{v}_2 - \mathrm{c}_{12} - \mathrm{u}_1 = 17 - 5 - 10 = 2$$

$$\Delta_{13} = \mathrm{v}_3 - \mathrm{c}_{13} - \mathrm{u}_1 = 17 - 8 - 10 = -1$$

$$\Delta_{14} = \mathrm{v}_4 - \mathrm{c}_{14} - \mathrm{u}_1 = 11 - 0 - 10 = 1$$

$$\Delta_{23} = \mathrm{v}_3 - \mathrm{c}_{23} - \mathrm{u}_2 = 17 - 8 - 13 = -4$$

$$\Delta_{24} = \mathrm{v}_4 - \mathrm{c}_{24} - \mathrm{u}_2 = 11 - 0 - 13 = -2$$

$$\Delta_{31} = \mathrm{v}_3 - \mathrm{c}_{31} - \mathrm{u}_1 = 16 - 4 - 11 = 1$$

$$\Delta_{41} = \mathrm{v}_1 - \mathrm{c}_{41} - \mathrm{u}_4 = 16 - 3 - 11 = 2$$

$$\Delta_{42} = \mathrm{v}_2 - \mathrm{c}_{42} - \mathrm{u}_4 = 17 - 7 - 11 = -1$$

$$\Delta_{43} = \mathrm{v}_3 - \mathrm{c}_{43} - \mathrm{u}_4 = 17 - 9 - 11 = -3.$$

Условие оптимальности нарушается для многих клеток, поэтому найденный план неоптимален.

Шаг 1.4. Улучшаем план поставок.

Среди положительных величин Δ_{ij} выбирается максимальная. В нашем случае величины $\Delta_{12} = 2$ и $\Delta_{41} = 2$ являются максимальными. Выбирается какая-нибудь одна из них, например, величина Δ_{12}. Клетка (1, 2) помечается знаком «+» в левом верхнем углу. Эта клетка в следующей таблице будет занята поставкой. Одновременно с занятием новой клетки происходит освобождение одной из занятых планом клеток. Удаляемая из плана поставка определяется с помощью цикла.

***Циклом** называется набор клеток таблицы, которые могут быть соединены замкнутой ломаной линией, удовлетворяющей следующим двум условиям:*

1. *Любое звено ломаной находится в строке либо в столбце таблицы;*
2. *Никакие два звена ломаной не могут находиться в одной строке или в одном столбце таблицы.*

a_i \ b_k	7	13	18	35	u_i
6	- 6 6	+ 5	8	0	10
11	+ 3 1	- 4 10	8	0	13
33	4	6 3	6 18	0 12	11
23	3	7	9	0 23	11
v_j					

	16	17	17	11	205

Начиная с клетки (1, 2) обойдем клетки цикла в каком-либо одном направлении (например, по часовой стрелке), отмечая их попеременно знаками плюс и минус. В клетках, помеченных знаком минус, находим минимальную поставку, которую обозначим через θ.

В нашем примере две минусовых клетки в цикле – это клетки (2, 2) и (1, 1). Минимальная поставка $\theta = \min(6{,}10) = 6$.

Шаг 2.1. Корректируем план поставок.

Переходим к новому плану поставок $\{x_{ij}^{нов}\}$ путем корректировки старого плана по следующим формулам:

$$x_{ij}^{нов} = \begin{cases} x_{ij}^{стар} + \theta, \textit{ если } (i, j) - \textit{плюсовая клетка цикла}; \\ x_{ij}^{стар} - \theta, \textit{ если } (i, j) - \textit{минусовая клетка цикла}; \\ x_{ij}^{стар} \quad, \textit{ если } (i, j) - \textit{не принадлежит циклу}. \end{cases}$$

a_i \ b_k	7	13	18	35	u_i
6	6	5 6	8	0	
11	3 7	4 4	8	0	
33	4	6 3	6 18	0 12	
23	3	7	9	0	

				23	
v_j					193

Суммарные затраты на перевозки
$z = 5\times6 + 3\times7 + 4\times4 + 6\times3 + 6\times18 = 193.$

Шаг 2.2.

Вычисляем потенциалы, согласованные с опорным планом поставок.
Пусть $u_1 = 10$, остальные потенциалы находятся из уравнений вида $v_j - u_i = c_{ij}$.

$v_1 - u_2 = 3$, $v_2 - u_2 = 4$, $v_3 - u_3 = 6$, $v_4 - u_4 = 0$,
$v_2 - u_1 = 5$, $v_2 - u_3 = 6$, $v_4 - u_3 = 0$.

Тогда $v_1 = 14$, $u_2 = 11$, $v_2 = 15$, $u_3 = 9$, $v_3 = 15$, $v_4 = 9$, $u_4 = 9$.

b_k / a_i	7	13	18	35	u_i
6	6	5 6	8	0	10
11	3 7	4 4	8	0	11
33	4	6 3	6 18	0 12	9
23	3	7	9	0 23	9
v_j					

	14	15	15	9	193

Шаг 2.3. Проверяем план на оптимальность.

Вычислим величины Δ_{ij} для свободных клеток. Имеем

$$\Delta_{11} = v_1 - c_{11} - u_1 = 14 - 6 - 10 \le 0$$
$$\Delta_{13} = v_3 - c_{13} - u_1 = 15 - 8 - 10 \le 0$$
$$\Delta_{14} = v_4 - c_{14} - u_1 = 9 - 0 - 10 \le 0$$
$$\Delta_{23} = v_3 - c_{23} - u_2 = 15 - 8 - 11 \le 0$$
$$\Delta_{24} = v_4 - c_{24} - u_2 = 9 - 0 - 11 \le 0$$
$$\Delta_{31} = v_1 - c_{31} - u_3 = 14 - 4 - 9 = 1$$
$$\Delta_{41} = v_1 - c_{41} - u_4 = 14 - 3 - 9 = 2$$
$$\Delta_{42} = v_2 - c_{42} - u_4 = 15 - 7 - 9 \le 0$$
$$\Delta_{43} = v_3 - c_{43} - u_4 = 15 - 9 - 9 \le 0.$$

Условие оптимальности не выполняется, поэтому найденный план неоптимален.

Шаг 2.4. Улучшаем план поставок.

Среди положительных величин Δ_{ij} выбираем максимальную. В нашем случае $\Delta_{41} = 2$. Клетку (4, 1) помечаем знаком «+» в левом верхнем углу и строим цикл.

a_i \ b_k	7	13	18	35	u_i
6	6	5 6	8	0	
11	- 3 7	+ 4 4	8	0	
33	4	- 6 3	6 18	+ 0 12	

23	+ 3	7	9	- 0 23	
v_j					

Минимальная поставка среди клеток, помеченных «-»,
$\theta = \min(7, 3, 23) = 3.$

Шаг 3.1. Корректируем план поставок.

a_i \ b_k	7	13	18	35	u_i
6	6	5 6	8	0	
11	3 4	4 7	8	0	
33	4	6	6 18	0 15	
23	3 3	7	9	0 20	
v_j					187

Суммарные затраты на перевозки
$z = 5\times6 + 3\times4 + 4\times7 + 6\times18 + 3\times3 = 187.$

Шаг 3.2.

Вычисляем потенциалы, согласованные с опорным планом поставок.

Пусть $u_1 = 10$, остальные потенциалы находятся из уравнений вида $v_j - u_i = c_{ij}$.

$v_1 - u_2 = 3,$ $v_2 - u_2 = 4,$ $v_3 - u_3 = 6,$ $v_4 - u_4 = 0,$

$v_2 - u_1 = 5,$ $v_1 - u_4 = 3,$ $v_4 - u_3 = 0.$

Тогда $v_1 = 14$, $u_2 = 11$, $v_2 = 15$, $u_3 = 11$, $v_3 = 17$, $v_4 = 11$, $u_4 = 11$.

b_k / a_i	7	13	18	35	u_i
6	6	5 6	8	0	10
11	3 4	4 7	8	0	11
33	4	6	6 18	0 15	11
23	3 3	7	9	0 20	11
v_j	14	15	17	11	187

Шаг 3.3. Проверяем план на оптимальность.

Вычислим величины Δ_{ij} для свободных клеток. Имеем

$\Delta_{11} = v_1 - c_{11} - u_1 = 14 - 6 - 10 \le 0$

$\Delta_{13} = v_3 - c_{13} - u_1 = 17 - 8 - 10 \le 0$

$\Delta_{14} = v_4 - c_{14} - u_1 = 11 - 0 - 10 = 1$

$\Delta_{23} = v_3 - c_{23} - u_2 = 17 - 8 - 11 \le 0$

$\Delta_{24} = v_4 - c_{24} - u_2 = 11 - 0 - 11 = 0$

$\Delta_{31} = v_1 - c_{31} - u_3 = 14 - 4 - 11 \le 0$

$\Delta_{32} = v_2 - c_{32} - u_3 = 15 - 6 - 11 \le 0$

$\Delta_{42} = v_2 - c_{42} - u_4 = 15 - 7 - 11 \le 0$

$\Delta_{43} = v_3 - c_{43} - u_4 = 17 - 9 - 11 \le 0$.

Условие оптимальности не выполняется, поэтому найденный план неоптимален.

Шаг 3.4. Улучшаем план поставок.

Среди положительных величин Δ_{ij} выбираем максимальную. В нашем случае $\Delta_{14} = 1$. Клетку (1, 4) помечаем знаком «+» в левом верхнем углу и строим цикл.

a_i \ b_k	7	13	18	35	u_i
6	6	- 5 6	8	+ 0	
11	- 3 4	+ 4 7	8	0	
33	4	6	6 18	0 15	
23	+ 3 3	7	9	- 0 20	
v_j					

Минимальная поставка среди клеток, помеченных «-»,
$\theta = \min(6, 4, 20) = 4$.

Шаг 4.1. Корректируем план поставок.

a_i \ b_k	7	13	18	35	u_i
6	6	5 2	8	0 4	10
11	3	4 11	8	0	11
33	4	6	6 18	0 15	10
23	3 7	7	9	0 16	10
v_j	13	15	16	10	183

Суммарные затраты на перевозки
$z = 5\times2 + 4\times11 + 6\times18 + 3\times7 = 183.$

Шаг 4.2.

Вычисляем потенциалы, согласованные с опорным планом поставок.

Пусть $u_1 = 10$, остальные потенциалы находятся из уравнений вида $v_j - u_i = c_{ij}$.

$v_4 - u_1 = 0$, $v_2 - u_2 = 4$, $v_3 - u_3 = 6$, $v_4 - u_4 = 0$,

$v_2 - u_1 = 5$, $v_1 - u_4 = 3$, $v_4 - u_3 = 0$.

Тогда $v_1 = 13$, $u_2 = 11$, $v_2 = 15$, $u_3 = 10$, $v_3 = 16$, $v_4 = 10$, $u_4 = 10$.

Шаг 4.3. Проверяем план на оптимальность.

Вычислим величины Δ_{ij} для свободных клеток.

$\Delta_{11} = v_1 - c_{11} - u_1 = 13 - 6 - 10 \le 0$

$\Delta_{13} = v_3 - c_{13} - u_1 = 16 - 8 - 10 \le 0$

$\Delta_{14} = v_4 - c_{14} - u_1 = 10 - 0 - 10 = 0$

$\Delta_{21} = v_1 - c_{21} - u_2 = 13 - 3 - 11 \le 0$

$\Delta_{23} = v_3 - c_{23} - u_2 = 16 - 8 - 11 \le 0$

$\Delta_{24} = v_4 - c_{24} - u_2 = 10 - 0 - 11 \le 0$

$\Delta_{31} = v_1 - c_{31} - u_3 = 13 - 4 - 10 \le 0$

$\Delta_{32} = v_2 - c_{32} - u_3 = 15 - 6 - 10 \le 0$

$\Delta_{42} = v_2 - c_{42} - u_4 = 15 - 7 - 10 \le 0$

$\Delta_{43} = v_3 - c_{43} - u_4 = 16 - 9 - 10 \le 0$.

Все $\Delta_{ij} \le 0$. Следовательно, получен оптимальный план.

Ответ: z min = 183

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Задания для практических занятий

Занятие 1. Построение математической модели. Графический метод решения ЗЛП

1. Хозяйство имеет возможность приобрести не более 19 трехтонных автомашин и не более 17 пятитонных. Отпускная цена трехтонного грузовика - 4000 руб., пятитонного - 5000 руб. Хозяйство может выделить для приобретения автомашин 141 тысяч рублей. Сколько нужно приобрести автомашин, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной?

2. На фабрике для производства двух видов продукции используются три вида сырья. Оно имеется на фабрике в следующих количествах: 13 ед. вида А, 9 ед. вида В и 8 ед. вида С.

На производство первого вида продукции надо израсходовать (2;0;2) ед. указанных видов сырья, а для второго вида продукции эти показатели равны (2;3;0) (нуль означает, что данное сырье не требуется для производства данного вида продукции). Прибыль, получаемая фабрикой от реализации первого вида продукции, равна 3 у.е., а от реализации единицы продукции второго вида равна 4 у.е. требуется спланировать работу фабрики так, чтобы обеспечить наибольшую прибыль.

3. Решить задачу графическим методом на минимум и на максимум

$$x - 2y \to \min, \max$$

$$\begin{cases} 5x + 3y \geq 30, \\ x - y \leq 3, \\ -3x + 5y \leq 15, \end{cases}$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

4. Среди чисел x и y, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ x + y \leq 1, \\ x - 4y \geq -2, \end{cases}$$

найти такие, при которых разность этих чисел y-x принимает наибольшее значение.

5. Решить графическим методом ЗЛП, заданную указанной математической моделью.

$$F = 2x_1 - x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 3, \\ x_1 \geq -1, \\ -2x_1 - 3x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6. \end{cases}$$

6. Решите графически следующие задачи линейного программирования

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

7. Решить графическим методом

$$f = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 30, \\ 5x_1 - x_2 \le 25, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,$$

$$x_2 \ge 0.$$

Ответы

1. 14 трехтонных грузовиков и 17 пятитонных, z= 127 **2.** X=(3,5; 3), z=22.5 **3.** F min = F (15;12)=- 9, F_{max} =F(39/8;15/8)=9/8 **4.** f max = f(-2,0)= 2 **5.** F_{max} =F(3;-4)=10 **6.** F_{max} =6 (множество оптимальных решений) **7.** Неограничена

Занятие 2. Симплекс-метод

1. Предприятие выпускает продукцию двух разновидностей. Каждый вид продукции проходит обработку на трёх станках. При обработке 1 т продукции I вида первый станок используется 0 ч, второй станок – 1 ч, третий станок – 1 ч. При обработке 1 т продукции II вида первый станок используется 1 ч, второй станок – 4 ч, третий станок – 1 ч. Время работы станков ограничено и не может превышать для первого станка 7 ч, для второго 29 ч, для третьего 11 ч. При реализации 1 т продукции I вида предприятие получает прибыль 2 руб., а при реализации 1 т продукции II вида – 5 руб. Найти оптимальный план выпуска продукции каждого вида, дающий максимальную прибыль от реализации всей продукции.

2. Компания производит полки для ванных комнат двух размеров – А и В. Агенты по продаже считают, что в неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок. Для каждой полки типа А требуется 2 м^2 материала, а для полки типа В – 3 м^2 материала. Компания может получить до 1200 м^2 материала в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 мин машинного времени, а для изготовления одной полки типа В – 30 мин; машину можно использовать 160 час в неделю. Если прибыль от продажи полок типа А составляет 3 денежных единицы, а от полок типа В – 4 ден. ед., то сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю для получения наибольшей прибыли?

3. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом. $f = 2X_1 + X_2 - 2X_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 \geq 8; \\ X_1 - X_2 + 2X_3 \geq 2; \\ -2X_1 - 8X_2 + 3X_3 \geq 1; \\ X_i \geq 0 \, (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

4. Решить задачу линейного программирования

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2 \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$

Ответы

1. f max = f(5;6)= 40 **2.** f max(450;100)=1750 **3.** Неограничена **4.** Zmin(0;0;4)=4

Занятие 3. Транспортная задача

1. Из трех холодильников A_i, i=1..3, вмещающих мороженную рыбу в количествах a_i= 320; 280; 250 т, необходимо последнюю доставить в пять магазинов B_j, j=1..5 в количествах b_j=150; 140;

110; 230; 220 т. Стоимости перевозки 1т рыбы из холодильника A_i в магазин B_j заданы в виде матрицы C_{ij}, 3x5.

$$C=\begin{pmatrix} 20 & 23 & 20 & 15 & 24 \\ 29 & 15 & 16 & 19 & 29 \\ 6 & 11 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Построить математическую модель задачи и спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной.

2. Построить закрытую модель транспортной задачи.

$a=(15,25,10)$,

$b=(2,20,18)$

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 8 & 12 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Ответы

1. 11770 $\begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 0 & 140 & 110 & 30 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 0 & 220 \end{pmatrix}$ **2.** 120 $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 18 & 7 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Контрольная работа по теме «Транспортная задача»

Задача

Туристической фирме необходимо разместить три группы туристов T_1, T_2, T_3 количеством 60+k, 120+k и 100+k человек соответственно, прибывших в аэропорты, по четырем гостиницам $Г_1$, $Г_2$, $Г_3$ $Г_4$. Стоимость перевозки одного туриста и количество свободных номеров в отелях указаны в таблице:

Группы	**Кол-во туристов**	**Стоимость трансфера одного туриста из аэропорта в отель**			
		$Г_1$	**$Г_2$**	**$Г_3$**	**$Г_4$**
T_1	60+k	1	2	5	3

T_2	120+k	1	6	5	2
T_3	100+k	6	3	7	4
Кол-во свободных мест в отеле		20+ k	110+k	40+k	110

Составить план перевозок туристов из аэропортов в гостиницы, который обеспечит минимальные транспортные издержки при условиях размещения всех туристов и заполнения всех свободных мест в гостиницах.

Примечание: Число k определяет преподаватель для каждого студента индивидуально.

6. Задания к зачету

Решить задачу графическим методом, найти минимум и максимум функции Z.

1. $Z=2x_1+3x_2$ $\begin{cases}-2x_1+x_2\le 2\\ x_1-3x_2\ge -9\\ 4x_1+3x_2\le 24\end{cases}$ $x_1,x_2\ge 0$	2. $Z=5x_1-3x_2$ $\begin{cases}4x_1-x_2\ge 0\\ -x_1+x_2\le 3\\ 2x_1-3x_2\le 6\end{cases}$ $x_1,x_2\ge 0$
3. $Z=2x_1+3x_2$ $\begin{cases}-6x_1+x_2\le 3\\ -5x_1+9x_2\le 45\\ x_1-3x_2\le 3\end{cases}$ $x_1,x_2\ge 0$	4. $Z=2x_1+2x_2$ $\begin{cases}-3x_1+2x_2\le 4\\ -x_1+2x_2\le 8\\ 4x_1-x_2\le 20\\ x_1+x_2\le 10\end{cases}$ $x_1,x_2\ge 0$
5. $Z=2x_1+4x_2$ $\begin{cases}-3x_1+2x_2\le 6\\ x_1+2x_2\ge 10\\ x_1-5x_2\le 5\\ x_1+x_2\le 4\end{cases}$ $x_1,x_2\ge 0$	6. $Z=15x_1+10x_2$ $\begin{cases}6x_1-x_2\ge 3\\ -x_1+2x_2\le 8\\ 3x_1+2x_2\le 24\\ x_1-x_2\le 3\\ x_1+2x_2\ge 2\end{cases}$ $x_1,x_2\ge 0$

7. $Z=3x_1+2x_2$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \geq -2 \\ 4x_1 - x_2 \leq 16 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$	8. $Z=2x_1+5x_2$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$
9. $Z=2x_1-x_2$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 16 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 \leq 8 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$	10. $Z=3x_1+2x_2$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$
11. $Z=2x_1+4x_2$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ 2x_1 + x_2 \leq 15 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$	12. $Z=x_1-3x_2$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$
13. $Z=3x_1-x_2$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$	14. $Z=x_1-2x_2$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ -4x_1 + 3x_2 \geq -12 \\ x_1 + 3x_2 \geq 18 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$
15. $Z=2x_1+5x_2$ $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \geq -3 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$	16. $Z=5x_1+5x_2$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$

17. Z=-x_1-x_2 $\begin{cases} -3x_1+2x_2\le 4 \\ -x_1+2x_2\le 8 \\ x_1+x_2\ge 10 \\ 4x_1-x_2\le 20 \end{cases}$ $x_{1,}x_2\ge 0$	18. Z=-x_1-x_2 $\begin{cases} 2x_1-3x_2\le 0 \\ -5x_1+9x_2\le 45 \\ x_1-2x_2\le 4 \end{cases}$ $x_{1,}x_2\ge 0$
19. Z=4x_1+2x_2 $\begin{cases} -3x_1+2x_2\le 6 \\ x_1+2x_2\ge 10 \\ x_1-3x_2\le 6 \\ x_1+x_2\ge 3 \end{cases}$ $x_{1,}x_2\ge 0$	20. Z=-3x_1-x_2 $\begin{cases} 4x_1-x_2\ge 0 \\ 2x_1-x_2\le 0 \\ x_1+x_2\le 3 \end{cases}$ $x_{1,}x_2\ge 0$
21. Z=2x_1+3x_2 $\begin{cases} x_1+2x_2\ge 2 \\ x_1+x_2\ge 2 \\ 2x_1+x_2\ge 4 \\ 2x_1-3x_2\le 0 \end{cases}$ $x_{1,}\ge 0$	22. Z=4x_1+6x_2 $\begin{cases} 4x_1-5x_2\ge 0 \\ 2x_1-3x_2\le 0 \\ 2x_1+3x_2\ge 6 \\ 2x_1+x_2\ge 2 \end{cases}$
23.Z=-x_1+4x_2 $\begin{cases} 2x_1-3x_2\le 6 \\ 3x_1-2x_2\le 6 \\ 2x_1+3x_2\ge 0 \\ x_1+x_2\ge -1 \end{cases}$ $x_2\ge 0$	24. Z=x_1+4x_2 $\begin{cases} 2x_1+3x_2\ge 6 \\ -2x_1+3x_2\ge 6 \\ x_1+x_2\le 3 \\ 2x_1-3x_2\le 0 \end{cases}$ $x_{1,}x_2\ge 0$
25. Z=x_1-4x_2 $\begin{cases} x_1-3x_2\le 0 \\ x_1-x_2\ge 0 \\ 2x_1+x_2\ge 6 \\ 2x_1+3x_2\le 18 \end{cases}$ $x_{1,}x_2\ge 0$	26. Z=-5x_1+x_2 $\begin{cases} 2x_1-3x_2\ge 0 \\ x_1+3x_2\ge 9 \\ x_1-3x_2\le 3 \\ -x_1+3x_2\le 3 \end{cases}$ $x_{1,}x_2\ge 0$

7. Список основной литературы

1. Орлова, И. В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: учебное пособие / И. В. Орлова, В. А. Половников. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва: Вузовский учебник: Инфра-М, 2019. - 389 с. - ISBN 978-5-9558-0208-4. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1021491 - Режим доступа: по подписке.

2. Колпаков, В. Ф. Экономико-математическое и эконометрическое моделирование: компьютерный практикум: учебное пособие / В.Ф. Колпаков. - Москва: ИНФРА-М, 2018. - 396 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - www.dx.doi.org/10.12737/24417. - ISBN 978-5-16-010967-1. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/975797

3. Математическое моделирование и проектирование: учебное пособие / А.С. Коломейченко, И.Н. Кравченко, А.Н. Ставцев, А.А. Полухин; под ред. А.С. Коломейченко. - Москва: ИНФРА-М, 2018. - 181 с. - (Высшее образование: Магистратура). - www.dx.doi.org/10.12737/textbook_59688803c3cb35.15568286. - ISBN 978-5-16-105985-2. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/884599

Экономико-математическое моделирование: методические указания по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы

Составитель Грунина Мария Викторовна

Подписано к печати “__”_______ 2021 г. Формат 84×108/32
Объём 1,4 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160