ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

Математический анализ

Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы №1

38.03.05 *Бизнес-информатикаа*

Новосибирск 2024

Математический анализ: методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы №1/ Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. С.А. Журавская, Т. В. Фомина,. – Новосибирск, 2024. – 35 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки: *38.03.05 Бизнес-информатика.*

.

Рецензент канд. техн. наук, доц. Тарсис Е.Ю.

Содержание

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания математического анализа в вузе для студентов экономических и организационно-управленческих специальностей – добиться усвоения студентами основ математического аппарата математического анализа, необходимого для решения теоретических и практических экономических и организационно-управленческих задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям, подготовить к чтению современной научной литературы и обеспечить запросы других разделов математики и дисциплин, использующих возникающие в математическом анализе, конструкции; развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также начальные навыки прикладных исследований.

Задачи дисциплины:

– развить у студентов логическое и алгоритмическое мышление,

– познакомить студентов с идеями и методами математического анализа,

– привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,

– привить студентам опыт решения задач с использованием инструментариев математического анализа.

1.2. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент ***должен***:

Знать:

– основные понятия математического анализа;

– различные алгоритмы и методы математического анализа, применяемые для решения экономических задач

Уметь:

– применять математический аппарат математического анализа для исследования объектов профессиональной деятельности, построения экономико-математических моделей и решения экономических и управленческих задач;

Владеть:

– навыками применения инструментария математического анализа для решения экономических и организационно-управленческих задач.

2. Методические указания по выполнению контрольной работы

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями.

1. Работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер контрольной работы, дата отсылки работы в институт.

2. Задачи следует располагать в порядке возрастания номеров. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать её условие.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.

4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

6. Контрольная работа должна выполняться **самостоятельно.** Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме.

7. Если преподаватель установит **несамостоятельное выполнение**

работы, то она **не будет зачтена.**

8. Получив прорецензированную работу (как зачтённую, так и незачтёную), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты. В случае незачёта по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

9. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

№ вари-анта	Номера задач контрольной работы по вариантам				
1	1	11	21	31	41
2	2	12	22	32	42
3	3	13	23	33	43
4	4	14	24	34	44
5	5	15	25	35	45
6	6	16	26	36	46
7	7	17	27	37	47
8	8	18	28	38	48
9	9	19	29	39	49
0	10	20	30	40	50

Контрольная работа №1

В задачах **1-10** найти пределы функций

1. а) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$ при **1)** $x_0=2,$ **2)** $x_0=3,$ **3)** $x_0=\infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\operatorname{arctg}4x}$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{3n+2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$ при **1)** $x_0=0$, **2)** $x_0=2$, **3)** $x_0=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n-4}\right)^{2n-7}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$ при **1)** $x_0=3$, **2)** $x_0=-3$, **3)** $x_0=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg}3x}{\operatorname{ctg}5x}$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-6}{n-4}\right)^{4n+2}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$ при **1)** $x_0=-3$, **2)** $x_0=-2$, **3)** $x_0=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\arcsin 2x}$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n+6}\right)^{n-3}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x+4}$ при **1)** $x_0=2$, **2)** $x_0=4$, **3)** $x_0=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}2x\operatorname{ctg}3x$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-5}{4n-3}\right)^{3n+5}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$ при **1)** $x_0=2$, **2)** $x_0=5$, **3)** $x_0=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\sin 6x\operatorname{ctg}2x$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-4}{n+5}\right)^{5n+3}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$ при **1)** $x_0=1$, **2)** $x_0=-4$, **3)** $x_0=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}{x-2}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}7x}{5x}$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-5}{2n+3}\right)^{4n-5}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}$ при **1)** $x_0=5$, **2)** $x_0=-5$, **3)** $x_0=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}4x}$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+6}\right)^{2n+3}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$ при **1)** $x_0=-2$, **2)** $x_0=1$, **3)** $x_0=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg}2x}$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n+4}\right)^{n+4}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$ при **1)** $x_0=-2$, **2)** $x_0=-1$, **3)** $x_0=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{4x}$; **г)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{4n-3}\right)^{5n-1}$.

В задачах **11-20** исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика.

11. $y=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x\le 2;\\ x+1, & x>2.\end{cases}$

12. $y=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1;\\ 2x, & 1<x\le 3;\\ x+2, & x>3.\end{cases}$

13. $y=\begin{cases}x-3, & x<0;\\ x+1, & 0\le x\le 4;\\ 3+\sqrt{x}, & x>4.\end{cases}$

14. $y=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 1;\\ 0, & 1<x\le 2;\\ x-2, & x>2.\end{cases}$

15. $y=\begin{cases}2x^2, & x\le 0;\\ x, & 0<x\le 1;\\ 2, & x>1.\end{cases}$ **16.** $y=\begin{cases}\sin x, & x<0;\\ x, & 0\le x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$

17. $y=\begin{cases}\cos x, & x\le \pi/2;\\ 0, & \pi/2<x<\pi;\\ \pi/2, & x\ge \pi.\end{cases}$ **18.** $y=\begin{cases}x-1, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x<2;\\ 2x, & x\ge 2.\end{cases}$

19. $y=\begin{cases}3x+1, & x<0;\\ x^2+1, & 0\le x<1;\\ 0, & x\ge 1.\end{cases}$ **20.** $y=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \operatorname{tg} x, & 0<x<\pi/2;\\ x, & x\ge \pi/2.\end{cases}$

В задачах **21-30** найти производные заданных функций.

21. **а)** $y=\left(3x^4-\dfrac{5}{\sqrt[4]{x}}+2\right)^5;$ **б)** $y=\ln\sqrt[5]{\left(\dfrac{1-5x}{1+5x}\right)^3};$

в) $y=\arccos 2x+\sqrt{1-4x^2};$ **г)** $y=2^{\operatorname{tg} x}+x\sin 2x.$

22. **а)** $y=\left(5x^2-4\sqrt[4]{x^5}+3\right)^3;$ **б)** $y=\ln\sqrt[6]{\dfrac{1-x^6}{1+x^6}};$

в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1};$ **г)** $y=e^{3x}+2x\operatorname{tg} 3x.$

23. **а)** $y=\left(\dfrac{1}{4}x^8+8\sqrt[8]{x^3}-1\right)^3;$ **б)** $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{4x-1}{1+x^4}};$

в) $y=\arccos\sqrt{x+1};$ **г)** $y=3^{\cos x}-x\sin 2x.$

24. **а)** $y=\left(\dfrac{1}{5}x^5-3x\sqrt[3]{x}-4\right)^4;$ **б)** $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3}{x^3+2}};$

в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x-1};$ **г)** $y=\sqrt{x}\operatorname{ctg} 3x-2^{x^2}.$

25. **а)** $y=\left(3x^8+5\sqrt[5]{x^2}-3\right)^5$; **б)** $y=\ln\sqrt[5]{\left(\frac{5x+3}{x^5+1}\right)^2}$;

в) $y=\operatorname{arctg}\frac{2}{x-3}$; **г)** $y=5^{\sqrt{x}}-x^2\operatorname{tg}2x$.

26. **а)** $y=\left(5x^4-\frac{2}{x\sqrt{x}}+3\right)^2$; **б)** $y=\ln\sqrt[5]{\frac{1-8x}{x^8+1}}$;

в) $y=\arccos\sqrt{1-x}$; **г)** $y=3^{\sqrt{x}}+\frac{1-\sin 3x}{1+\sin 3x}$.

27. **а)** $y=\left(4x^3+\frac{3}{x\sqrt[3]{x}}-2\right)^5$; **б)** $y=\ln\sqrt[6]{\left(\frac{x^6-1}{6x+5}\right)^7}$;

в) $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{x-1}$; **г)** $y=2^{x^2+1}-x\sin 4x$.

28. **а)** $y=\left(7x^5-3x\sqrt[3]{x^2}-6\right)^4$; **б)** $y=\ln\sqrt[3]{\left(\frac{3x-4}{3x+1}\right)^4}$;

в) $y=\arcsin 3x-\sqrt{1-9x^2}$; **г)** $y=e^{\operatorname{tg}x}-\sqrt{x}\cos 2x$.

29. **а)** $y=\left(3x^4-\frac{4}{\sqrt[4]{x}}-3\right)^5$; **б)** $y=\ln\sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)^3}$;

в) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$; **г)** $y=x\operatorname{tg}3x+2^{x-2}$.

30. **а)** $y=\left(8x^3-\frac{9}{x^2\sqrt{x}}+6\right)^5$; **б)** $y=\ln\sqrt[7]{\left(\frac{7x-4}{x^7-2}\right)^3}$;

в) $y=\arcsin\sqrt{1-x}$; **г)** $y=3^{\sin x}-\sqrt[3]{x}\operatorname{tg}3x$.

В задачах **31-40** вычислить неопределенный интеграл.

31. а) $\int (2\sqrt{x} - \frac{2}{x^6} - \frac{1}{\sqrt{x}} + x)dx$; **б)** $\int \frac{cosx}{\sqrt[3]{sin\,x}}dx$;

в) $\int (3x-5)sinxdx$.

32. а) $\int (2x^5 - \frac{5}{x^5} - \sqrt[6]{x^2} + x)dx$; **б)** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^8}}$;

в) $\int (5-x)e^{3x}dx$.

33. а) $\int (2x + x^6 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2)dx$; **б)** $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4+e^x}}$;

в) $\int (4x-1)cosxdx$.

34. а) $\int (x - \frac{7}{x^2} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 3)dx$; **б)** $\int e^{3sinx+2}cosxdx$;

в) $\int (3x-5)sinxdx$.

35. а) $\int (x - \frac{3}{x^6} + \sqrt[5]{x} + 4)dx$; **б)** $\int \frac{sinxdx}{(1-3cosx)^3}$;

в) $\int x^2 lnx\,dx$.

36. а) $\int (2x + \frac{5}{x^6} - \frac{1}{\sqrt{x}} + e^x)dx$; **б)** $\int \frac{x^5dx}{x^{12}-1}$;

в) $\int x\,e^{3x}dx$.

37. а) $\int (2x - \frac{5}{x^6} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2)dx$ **б)** $\int \frac{\sqrt{arctgx}dx}{1+x^2}$

в) $\int \frac{lnx}{\sqrt{x}}dx$.

38. а) $\int (4x^4 - \frac{5}{x} - \sqrt[8]{x^6} + 2)dx$ **б)** $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$

в) $\int x \cdot 5^x\,dx$.

39. **а)** $\int (2\sqrt{x} - \frac{2}{x^6} - \frac{1}{\sqrt{x}} + x)dx$ **б)** $\int \frac{\sqrt[5]{2+lnx}dx}{x}$

в) $\int lnx\,dx$.

40. **а)** $\int (x - \frac{5}{x^6} - 5\sqrt[5]{x} + 3)dx$ **б)** $\int 4^{5sinx+3}cosxdx$

в) $\int (6x - 5)\sin(6x + 1)dx$.

В задачах **41-50** провести полное исследование функции и построить её график.

41. $y = (x^3 + 4)\big/ x^2$.

42. $y = (x^2 - x + 1)\big/(x-1)$.

43. $y = 2\big/(x^2 + 2x)$.

44. $y = 4x^2\big/(3 + x^2)$.

45. $y = 12x\big/(9 + x^2)$.

46. $y = (x^2 - 3x + 3)\big/(x-1)$.

47. $y = (4 - x^3)\big/ x^2$.

48. $y = (x^2 - 4x + 1)\big/(x-4)$.

49. $y = (2x^3 + 1)\big/ x^2$.

50. $y = (x-1)^2\big/ x^2$.

4. Примеры решения задач контрольной работы

Пример 1. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x^2+3x-3}{5x^2+4x-1}$ при **1**) $x\to 1$, **2**)$x\to -1$, **3**)$x\to\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-3}-\sqrt{7-x}}$; **в**) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin 2x}$; **г**) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+2}{7n-3}\right)^{14n-3}$.

Решение.

а)

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x^2+3x-3}{5x^2+4x-1}=\left|\begin{array}{c}\text{Заменим в выражении } \dfrac{6x^2+3x-3}{5x^2+4x-1}\\ \text{аргумент его предельным значением.}\end{array}\right|=$

$$=\frac{6\cdot 1^2+3\cdot 1-3}{5\cdot 1^2+4\cdot 1-1}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: $\mathbf{\frac{3}{4}}$**.**

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{6x^2+3x-3}{5x^2+4x-1}=\left|\begin{array}{c}\text{При } x=-1 \text{ числитель и}\\ \text{знаменатель дроби}\\ \text{обращаются в нуль, получаем}\\ \text{неопределенность вида } \dfrac{0}{0}\ .\end{array}\right|=$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \left| \begin{array}{c} \text{Разложим числитель и знаменатель на множители} \\ \text{по формуле } ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \\ \text{где } x_1, x_2 - \text{ корни соответствующего квадратного} \\ \text{уравнения.} \\ \text{Одним из корней квадратного уравнения} \\ 6x^2 + 3x - 3 = 0 \\ \text{является } -1\text{, тогда по теореме Виета второй корень} \\ \text{равен } \frac{1}{2}\text{, аналогично корни уранения } 5x^2 + 4x - 1 = 0 \\ \text{равны } -1 \text{ и } \frac{1}{5}. \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{6\big(x - (-1)\big)(x - \frac{1}{2})}{5\big(x - (-1)\big)(x - \frac{1}{5})} = \lim_{x\to -1} \frac{6(x - \frac{1}{2})}{5(x - \frac{1}{5})} = \frac{6(-1 - \frac{1}{2})}{5(-1 - \frac{1}{5})} =$$

$$= \frac{6 + 3}{5 + 1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

$$3) \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2 + 3x - 3}{5x^2 + 4x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left| \begin{array}{c} \text{Делим числитель и знаменатель} \\ \text{почленно на наивысшую из} \\ \text{имеющихся степеней} \\ \text{переменной } x, \text{ т. е. на } x^2. \end{array} \right| =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}}{5+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}6+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{6+0-0}{5+0-0}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}.$$

Ответ: $1\frac{1}{5}$.

$$б)\ \lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x-3}-\sqrt{7-x}}=\left|\begin{array}{c}\text{При } \boldsymbol{x=5} \text{ числитель и}\\ \text{знаменатель дроби обращаются}\\ \text{в нуль, получаем}\\ \text{неопределенность вида } \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}.\end{array}\right|=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{c}\text{умножим числитель и знаменатель}\\ \text{дроби на число, сопряженное знаменателю,}\\ \text{т. е. на } \boldsymbol{\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x})}{(\sqrt{x-3}-\sqrt{7-x})(\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x})}{(\sqrt{x-3})^2-(\sqrt{7-x})^2}=$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x})}{(x-3)-(7-x)} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x})}{x-3-7+x} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x})}{2x-10} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x})}{2(x-5)} = \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5-3}+\sqrt{7-5}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

в) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x}-1}{\sin 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{c} \text{Воспользуемся следующими} \\ \text{формулами эквивалентности:} \\ \text{если при } \boldsymbol{x \to x_0}\ \ \boldsymbol{u \to 0}, \text{то при } \boldsymbol{x \to x_0} \\ \boldsymbol{u \sim \sin u \sim \arcsin u \sim tg\, u \sim arctg\, u \sim} \\ \boldsymbol{\sim e^u - 1 \sim \ln(1+u)}. \\ \text{при } \boldsymbol{x \to 0}\ \ \boldsymbol{4x \to 0 \Rightarrow e^{4x} - 1 \sim 4x}; \\ \text{при } \boldsymbol{x \to 0}\ \ \boldsymbol{2x \to 0 \Rightarrow \sin 2x \sim 2x}. \end{array}\right|$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4x}{2x} = 2.$$

Ответ: 2

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n+2}{7n-3}\right)^{14n-3} = [1^{\infty}] = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n-3+5}{7n-3}\right)^{14n-3} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n-3}{7n-3}+\frac{5}{7n-3}\right)^{14n-3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{7n-3}\right)^{14n-3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(\frac{7n-3}{5})}\right)^{\frac{7n-3}{5}\cdot\frac{5}{7n-3}\cdot(14n-3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{7n-3}{5}\right)}\right)^{\frac{7n-3}{5}}\right]^{\frac{5(14n-3)}{7n-3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(\frac{7n-3}{5})}\right)^{\frac{7n-3}{5}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5(14n-3)}{7n-3}} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5(14n-3)}{7n-3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 14n}{7n} = 10 \\ \text{при } n\to\infty \ \ \dfrac{7n-3}{5} \to \infty, \\ \text{по второму замечательному пределу:} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\left(\frac{7n-3}{5}\right)}\right)^{\frac{7n-3}{5}} = e \end{array} \right| = e^{10}$$

Ответ: e^{10}.

Пример 2. Исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика: $y = \begin{cases} x-1, & x \geq 1; \\ x+1, & x < 1. \end{cases}$

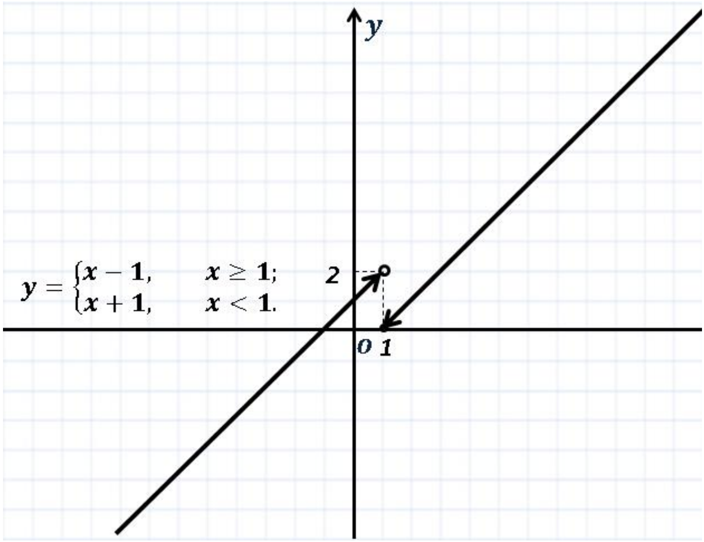
Функция является непрерывной в точке x_0 при соблюдении трёх условий:

1. Функция определена в точке x_0.
2. Существует предел функции в точке x_0, при этом правый и левый пределы равны: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
3. Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

При $x = 1$ функция определена, $y(1) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} (x+1) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} (x-1) = 0$.

Имеем: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$, таким образом, в точке $x = 1$ функция терпит неустранимый разрыв первого рода.



Пример 3. Найти производные данных функций:

а) $y = 4x^3 - \frac{6}{x^3\sqrt{x}} + 3$; **б)** $y = \ln \sqrt[5]{\left(\frac{3x^2+1}{2x^4+5}\right)^3}$;

в) $y = arctg\sqrt{x^3 - 1}$; **г)** $y = 5^{x^2-3} + 3\sqrt[3]{x} \cdot \sin 2x$.

а) $y' = \left(4x^3 - \frac{6}{x^3\sqrt{x}} + 3\right)' =$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Приведем функцию } \boldsymbol{y} \text{ к виду, удобному для} \\ \text{дифференцирования, используя правила действия} \\ \text{со степенями:} \\ y = 4x^3 - \dfrac{6}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}} + 3 = 4x^3 - \dfrac{6}{x^{\frac{7}{2}}} + 3 = 4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} + 3. \end{array} \right| =$$

$$= \left(4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} + 3\right)' = \left| \begin{array}{c} \text{Используем правило} \\ \text{дифференцирования} \\ \text{суммы и разности функций:} \\ (\mathbf{u} \pm \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \pm \mathbf{v}' \end{array} \right| =$$

$$= (4x^3)' - \left(6x^{-\frac{7}{2}}\right)' + 3' = 4 \cdot 3x^{3-1} - 6 \cdot (-\frac{7}{2})x^{-\frac{7}{2}-1} + 0 =$$

$$= 12x^2 + 21x^{-\frac{9}{2}} = 12x^2 + \frac{21}{\sqrt{x^9}}.$$

Ответ: $\boldsymbol{y' = 12x^2 + \frac{21}{\sqrt{x^9}}}$**.**

б) $y' = \left(\ln \sqrt[5]{\left(\frac{3x^2+1}{2x^4+5}\right)^3}\right)' =$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Приведем функцию } \boldsymbol{y} \text{ к виду, удобному для} \\ \text{дифференцирования, используя правила действия} \\ \text{со степенями и свойства логарифма:} \\ \ln \sqrt[5]{\left(\frac{3x^2+1}{2x^4+5}\right)^3} = \ln\left(\frac{3x^2+1}{2x^4+5}\right)^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}\ln\left(\frac{3x^2+1}{2x^4+5}\right) = \\ = \frac{3}{5}(\ln(3x^2+1) - \ln(2x^4+5)). \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{5}(\ln(3x^2+1) - \ln(2x^4+5))' = \frac{3}{5}((\ln(3x^2+1))' -$$

$$-(\ln(2x^4+5))') = \left| \begin{array}{c} \text{Используем формулу:} \\ (\mathbf{ln}\, \boldsymbol{u})' = \dfrac{\boldsymbol{u}'}{\boldsymbol{u}}. \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{(3x^2+1)'}{3x^2+1} - \frac{(2x^4+5)'}{2x^4+5}\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{6x}{3x^2+1} - \frac{8x^3}{2x^4+5}\right).$$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{3}{5}\left(\frac{6x}{3x^2+1} - \frac{8x^3}{2x^4+5}\right).}$

в) $y' = \left(arctg\sqrt{x^3-1}\right)' = \left| \begin{array}{c} \text{Используем формулу:} \\ (\mathbf{arctg}\, \boldsymbol{u})' = \frac{\boldsymbol{u}'}{1+\boldsymbol{u}^2}. \end{array} \right| =$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^3-1}\right)'}{1+\left(\sqrt{x^3-1}\right)^2} = \frac{\left((x^3-1)^{\frac{1}{2}}\right)'}{1+x^3-1} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{В числителе используем формулу:} \\ (\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{n}})' = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{u}'. \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(x^3-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^3-1)'}{x^3} = \frac{\frac{1}{2}(x^3-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2}{x^3} =$$

$$= \frac{3}{2x\sqrt{x^3-1}}.$$

Ответ: $\boldsymbol{y' = \frac{3}{2x\sqrt{x^3-1}}}$**.**

г) $y' = \left(5^{x^2-3} + 3\sqrt[3]{x} \cdot \sin 2x\right)' = \left(5^{x^2-3}\right)' + \left(3\sqrt[3]{x} \cdot \sin 2x\right)' =$

Используем формулу: $\boldsymbol{(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'}$, а так же правило дифференцирования произведения: $\mathbf{(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u}$. $=$

$$= 5^{x^2-3} \cdot \ln 5 \cdot (x^2-3)' + \left(3x^{\frac{1}{3}}\right)' \cdot \sin 2x + (\sin 2x)' \cdot 3\sqrt[3]{x} =$$

$=$ Используем формулы: $\boldsymbol{(C)' = 0}$; $\boldsymbol{(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'}$; $\boldsymbol{(\sin u)' = \cos u \cdot u'}$. $= 5^{x^2-3} \cdot \ln 5 \cdot 2x + 3 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sin 2x +$

$$+ \cos 2x \cdot (2x)' \cdot 3\sqrt[3]{x} = 2x \cdot \ln 5 \cdot 5^{x^2-3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \sin 2x +$$

$$+6 \cdot \sqrt[3]{x \cdot} \cos 2x.$$

Ответ: $\boldsymbol{2x \cdot \ln 5 \cdot 5^{x^2-3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \sin 2x + + 6 \cdot \sqrt[3]{x \cdot} \cos 2x}$**.**

Пример 4. Найти неопределенный интеграл:

а) $\int \left(6x^3 - \frac{3x}{\sqrt[3]{x}} + 4x \cdot \sqrt[5]{x} - 2 + \frac{5}{x}\right)$;

б) $\int e^{3x^5+7} x^4 dx$;

в) $\int (10x - 11) \sin(2x + 5)\, dx$.

а) Преобразуем подынтегральную функцию и воспользуемся свойствами неопределенного интеграла:

$$\int\left(6x^3 - \frac{3x}{\sqrt[3]{x}} + 4x\cdot\sqrt[5]{x} - 2 + \frac{5}{x}\right)dx = 6\int x^3 dx - 3\int x^{1-\frac{1}{3}}dx + 4\int x^{1+\frac{1}{5}}dx - 2\int dx + 5\int\frac{dx}{x} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Используем формулы:} \\ \int \boldsymbol{u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C}; \\ \int \boldsymbol{\frac{1}{u} du = \ln|u| + C}; \\ \int \boldsymbol{du = u + C}. \end{array} \right| =$$

$$= 6\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 4\frac{x^{\frac{6}{5}+1}}{\frac{6}{5}+1} - 2x + 5\ln|x| + C = \frac{3}{2}x^4 - \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{20}{11}x^{\frac{11}{5}} - 2x + 5\ln|x| + C =$$

$$= \frac{3}{2}x^4 - \frac{9}{5}x\cdot\sqrt[3]{x^2} - \frac{20}{11}x^2\cdot\sqrt[5]{x} - 2x + 5\ln|x| + C.$$

Ответ:

$$\frac{3}{2}x^4 - \frac{9}{5}x\cdot\sqrt[3]{x^2} - \frac{20}{11}x^2\cdot\sqrt[5]{x} - 2x + 5\ln|x| + C.$$

б) Будем использовать метод замены переменной. При решении нам понадобится формула дифференциала: $df(x) = f'(x)dx$.

$$\int e^{3x^5+7}x^4dx = \left| \begin{array}{c} \text{Пусть } t = 3x^5 + 7, \\ \text{тогда по формуле дифференциала:} \\ dt = (3x^5+7)'dx = 15x^4dx. \\ \text{Значит, } x^4dx = \frac{1}{15}dt \\ \text{Сделаем замену в интеграле.} \end{array} \right| = \int e^t \frac{1}{15}dt =$$

$$= \frac{1}{15}\int e^t dt = \frac{1}{15}e^t + C = \left| \begin{array}{c} \text{делаем обратную} \\ \text{замену} \end{array} \right| = \frac{1}{15}e^{3x^5+7} + C$$

Ответ: $\frac{1}{15}e^{3x^5+7} + C$.

в) Будем использовать формулу интегрирования по частям: $\int udv = u \cdot v - \int vdu$.

$$\int (10x - 11)\sin(2x+5)\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Пусть } u = 10x - 11, \\ \text{а } dv = \sin(2x+5)\,dx. \\ \text{Тогда, по формуле дифференциала:} \\ du = (10x-11)'dx = 10dx. \\ v = \int dv = \int \sin(2x+5)\,dx = \left| \begin{array}{c} t = 2x - 5; \\ dt = 2dx; \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int sintdt = \\ = -\frac{1}{2}cost = -\frac{1}{2}\cos(2x+5). \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x+5)\cdot(10x-11) - \int (-\frac{1}{2})\cos(2x+5)10dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x+5)\cdot(10x-11) + 5\int \cos(2x+5)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x+5)\cdot(10x-11) + 5\cdot\frac{1}{2}\int \cos(2x+5)d(2x+5) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x+5)\cdot(10x-11) + \frac{5}{2}\sin(2x+5) + C.$$

Ответ:
$-\frac{1}{2}\cos(2x+5)\cdot(10x-11) + \frac{5}{2}\sin(2x+5) + C.$

Пример 5. Исследовать функцию и построить ее график:
$$y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}.$$

Исследование будем проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции и исследовать ее поведение на границах области;
2) исследовать функцию на непрерывность;
3) определить, является ли данная функция четной, нечетной;
4) найти интервалы возрастания и убывания функции и точки ее экстремума;
5) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба;
6) найти асимптоты графика функции.

Решение.

1. Областью определения функции $(\boldsymbol{D})$ является вся числовая прямая, за исключением точки с абсциссой $x = 1$, в которой знаменатель функции обращается в нуль, т.е.

$\boldsymbol{D}$: $(-\infty; \mathbf{1}) \cup (\mathbf{1}; +\infty)$

а) $x \to -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$;

б) $x \to 1-0$; $\lim\limits_{x\to1-0} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1-0} y = -\infty$;

в) $x \to 1+0$; $\lim\limits_{x\to1+0} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = \infty$; $\lim\limits_{x\to1+0} y = \infty$;

г) $x \to \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1} = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$.

2. Функция непрерывна во всей области определения как частное двух непрерывных функций.
3. Если функция четная, то выполняется равенство $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$, если нечетная, то выполняется равенство $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$, если ни одно из этих равенств не выполняется, то функция не является ни четной, ни нечетной. Найдем $\boldsymbol{f(-x)}$.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2(-x) + 2}{-x-1} = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x-1}.$$

$\boldsymbol{f(-x) \neq f(x)}$ и $\boldsymbol{f(-x) \neq f(x)}$, значит, функция ни четная, ни нечетная.

4. Для нахождения точек экстремума найдем критические точки функции, т.е. те точки, в которых первая производная обращается в нуль или не существует.

$$y' = \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}\right)' =$$

$$= \frac{(x^2 - 2x + 2)' \cdot (x - 1) - (x^2 - 2x + 2)(x - 1)'}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{(2x - 2) \cdot (x - 1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}.$$

Производная не существует только при x = 1, где функция не определена, найдем значения x, при которых она обращается в нуль.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x - 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 2. \end{cases}$$

Вычислим значение функции при $x = 0$ и $x = 2$:

$$f(2) = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 2}{2 - 1} = 2;$$

$$f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 2}{0 - 1} = -2.$$

Получили две критические точки $\boldsymbol{A_1(0; 2)}$ и $\boldsymbol{A_2(0; -2)}$, которые проверим на экстремум с помощью первого достаточного признака. Для этого исследуем, как ведет себя первая производная этой функции при переходе через критические точки.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; \infty)$
y'	+	0	—	не сущ.	—	0	+
y	$\nearrow$	макс.	$\searrow$	не сущ.	$\searrow$	мин.	$\nearrow$

При переходе через точку $\boldsymbol{A_1}$ производная меняет знак с "+" на "–", значит, в этой точке максимум функции, а при переходе через точку $\boldsymbol{A_2}$ – с "–" на "+", значит, в этой точке функция достигает своего минимума. Там, где производная положительна, функция возрастает, где отрицательна – убывает.

5. Для определения точек перегиба и направления вогнутости функции найдем вторую производную.

$$y'' = \left(\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\right)' = \left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(x^2-2x)' \cdot (x-1)^2 - (x^2-2x)((x-1)^2)'}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(2x-2) \cdot (x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2 \cdot (x-1)^3 - (x^2-2x) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2\cdot(x-1)\big((x-1)^2-(x^2-2x)\big)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2\cdot(x^2-2x+1-x^2+2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3};$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль, поэтому точек перегиба у функции нет. Знак второй производной зависит от знака ее знаменателя:

$\boldsymbol{y''} > 0$, если $(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{3}} > 0$, т.е. $x > 1$;
$\boldsymbol{y''} < 0$, если $(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{3}} < 0$, т.е. $x < \mathbf{1}$;

Таким образом, функция вогнута на интервале **(1; ∞)** и выпукла на интервале **(–∞; 1)**.

6. Определим, имеет ли функция асимптоты. Вернемся к исследованиям в пункте ***1*** : из ***1 а)***, ***1 г)*** по определению следует, что горизонтальных асимптот у функции нет; из ***1 б)***, ***1в*** - также по определению следует, что $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ является вертикальной асимптотой функции. Для того, чтобы существовала наклонная асимптота $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$ необходимо существование конечного отличного от нуля предела

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\mathbf{x}\to\infty} \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}.$$

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\boldsymbol{x}\to\infty} \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}} = \lim_{\boldsymbol{x}\to\infty} \frac{x^2-2x+2}{(x-1)x} = \lim_{\boldsymbol{x}\to\infty} \frac{x^2-2x+2}{x^2-x} = 1;$$

$\boldsymbol{b}$ определяется по формуле $\boldsymbol{b} = \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\infty}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{ax})$

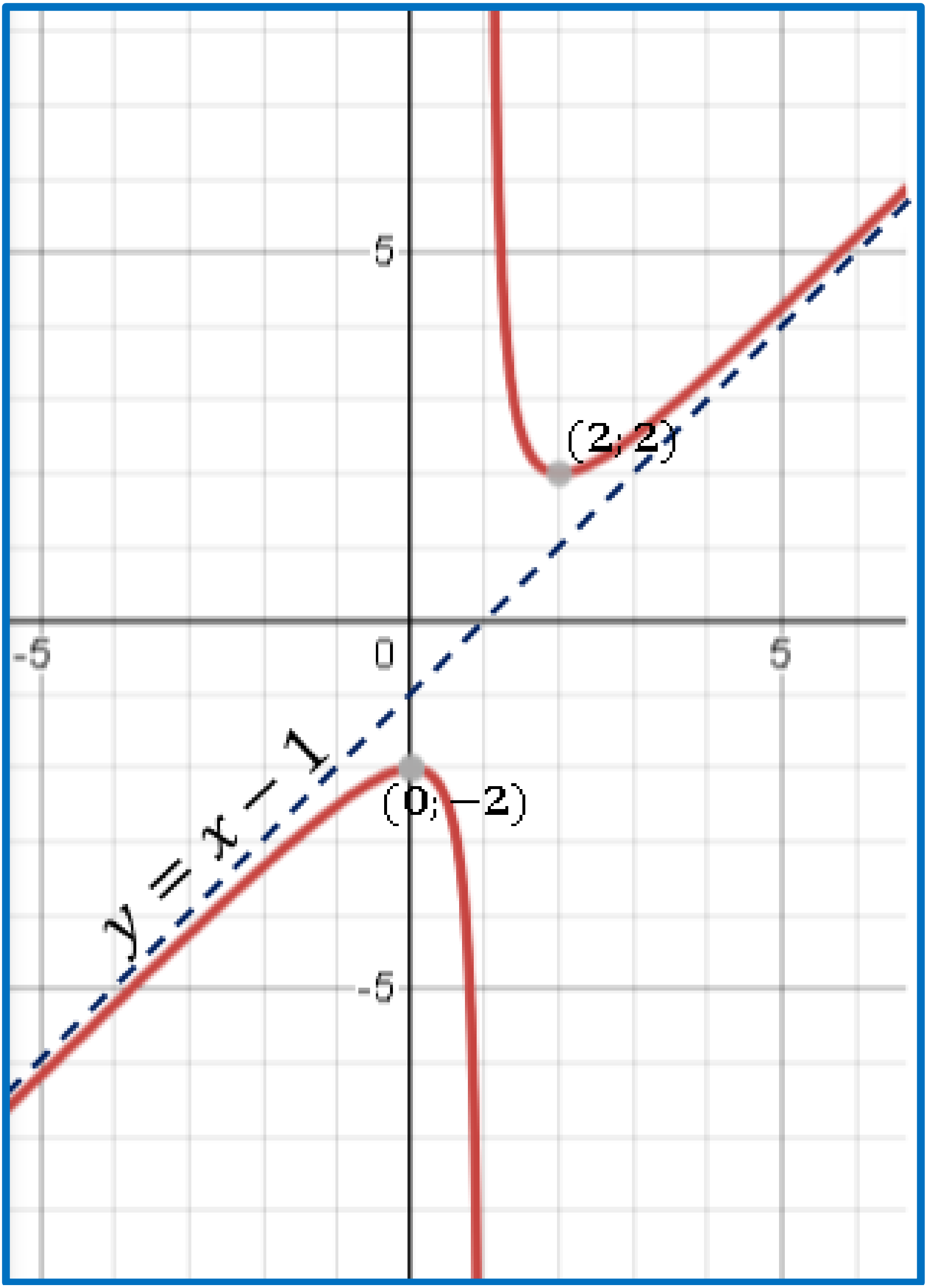
$$\boldsymbol{b} = \lim_{\boldsymbol{x}\to\infty}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{ax}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - \boldsymbol{x}\right) =$$

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x}{x - 1}\right) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\infty}\left(\frac{-x + 2}{x - 1}\right) = -\mathbf{1}.$$

Таким образом, наклонная асимптота существует и имеет вид $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \mathbf{1}$

7. По полученным исследованиям строим график функции

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$



5
-5
0
5
-5
$(2; 2)$
$(0; -2)$
$y = x - 1$

Список вопросов по математическому анализу 1 курс 1 семестр

1. Предел числовой последовательности.
2. Предел функции в бесконечности.
3. Предел функции в точке.
4. Бесконечно малые величины. Связь бесконечно малых величин с пределами функций.
5. Свойства бесконечно малых величин.
6. Бесконечно большие величины, их свойства.
7. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.
8. Основные теоремы о пределах.
9. Первый замечательный предел.
10. Второй замечательный предел.
11. Непрерывность функции в точке.
12. Свойства функций непрерывных в точке.
13. Свойства функций непрерывных на отрезке.
14. Определение производной, ее геометрический и физический смысл.
15. Зависимость между непрерывностью функции и дифференцируемостью.
16. Правила дифференцирования.
17. Производная сложной функции. Производная функции, заданной неявно.
18. Производная обратной функции. Производная параметрически заданной функции.
19. Таблица производных элементарных функций.
20. Производная показательно-степенной функции.
21. Теорема Ролля.
22. Теорема Лагранжа.
23. Правило Лопиталя.

24. Достаточное условие возрастания (убывания) функции.
25. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума.
26. Достаточное условие экстремума.
27. Наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке.
28. Выпуклость функции. Достаточное условие выпуклости функции вверх (вниз).
29. Точка перегиба. Необходимое условие перегиба. Достаточное условие.
30. Асимптоты графика функции.
31. Дифференциал функции, его свойства.
32. Инвариантность формы дифференциала.
33. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
34. Понятие о дифференциалах высших порядков.
35. Первообразная функция и неопределенный интеграл.
36. Свойства неопределенного интеграла.
37. Интегралы от основных элементарных функций.
38. Метод интегрирования по частям.
39. Универсальная тригонометрическая подстановка.
40. Метод внесения под знак дифференциала.

Список основной литературы

1. Красс М.С. Математика для экономического бакалавриата: Учебник /М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2020. – 472 с.
2. Шершнев В.Г. Математический анализ: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 288 с.

Список дополнительной литературы

1. Берман А.Ф. Краткий курс математического анализа: Учебник / А.Ф. Берман, И.Г. Араманович. – М.: Лань, 2010. – 736 с.
2. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – 8-е изд., испр. и доп. – М.: Лань, 2014. – 464 с.

Математический анализ: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы №1

Составители: Журавская Светлана Александровна.
Фомина Татьяна Викторовна

Подписано к печати “__”_______ 201_ г. Формат 84×108/32
Объём 1,4 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160