

ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

Математический анализ

Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и
выполнению контрольной работы № 2

09.03.03 *Прикладная информатика*

38.03.05 *Бизнес-информатика*

Новосибирск 2024

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, профессор, доцент И. В. Ершов.

Математический анализ: методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы №2 / Новосибир. гос. аграр. ун-т; Сост.: С.А. Журавская, Е.Ю.Тарсис, Т.В. Фомина – Новосибирск, 2024. – 24 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки 09.03.03 Прикладная информатика и 38.03.05 Бизнес-информатика.

Утверждены и рекомендованы к изданию учебно-методическим советом факультета Экономики и управления (протокол №8 от 23 апреля 2024 г.).

Содержание

1. Введение	4
2. Методические рекомендации по самостоятельной работе.....	5
3. Методические указания по выполнению контрольной работы	8
4. Задания для контрольной работы.....	11
5. Примеры решения задач контрольной работы	14
6. Вопросы к экзамену	21
7. Литература.....	23

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания математического анализа в вузе для студентов экономических и организационно-управленческих специальностей – добиться усвоения студентами основ математического аппарата математического анализа, необходимого для решения теоретических и практических экономических и организационно-управленческих задач, привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям, подготовить к чтению современной научной литературы и обеспечить запросы других разделов математики и дисциплин, использующих возникающие в математическом анализе, конструкции; развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также начальные навыки прикладных исследований.

Задачи дисциплины:

- развить у студентов абстрактно-логическое и алгоритмическое мышление,
- познакомить студентов с идеями и методами математического анализа,
- привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,
- привить студентам опыт решения задач с использованием инструментария математического анализа.
- помочь в овладении студентами основными математическими понятиями, алгоритмами и методами,
- сформировать способность искать, критически анализировать и систематизировать информацию, применять системный подход для успешного решения поставленных прикладных задач;
- умение разбираться в существующих математических методах и моделях и условиях их применимости на практике;

–приобретении студентами опыта выделения базовых составляющих при анализе задачи, ее декомпозиции.

1.2. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент *должен*:

Знать:

- основные понятия математического анализа;
- различные алгоритмы и методы математического анализа, которые предусмотрены программой курса и необходимы для формирования умения решать задачи профессиональной деятельности;
- основные понятия и инструменты математического анализа необходимые для критического мышления и системного подхода к решению поставленных задач;

Уметь:

- применять математический аппарат математического анализа для исследования объектов профессиональной деятельности, построения экономико-математических моделей и решения экономических и управленческих задач;

Владеть:

- навыками применения инструментария математического анализа для решения экономических и организационно-управленческих задач;
- навыками анализа и синтеза информации, системного подхода к решению задач профессиональной деятельности.

2. Методические рекомендации по самостоятельной работе

Успешное освоение компетенций, формируемых данной учебной дисциплиной, предполагает оптимальное использование времени самостоятельной работы. Особенно это актуально для студента-заочника, самостоятельная работа которого над учебным материалом, является основной формой обучения. В помощь заочнику университет организует чтение лекций и практические занятия. Кроме того, студент может об-

ращаться к преподавателю с вопросами в письменном виде или устно. Однако студент-заочник должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь университета будет достаточно эффективной.

Самостоятельная работа во внеаудиторное время состоит из:

- проработки лекционного материала, доработки конспекта в результате изучения учебно-методической и научной литературы;
- подготовки к практическим занятиям;
- решения задач, выданных на практических занятиях;
- проведение самоконтроля путем ответов на вопросы текущего контроля знаний, решения представленных в учебно-методических материалах дисциплины задач.

2.1 Рекомендации к изучению материала по учебнику и ведению конспекта для студентов заочной и очной формы обучения

При изучении материала по учебнику из списка, приведенного на стр. 23, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления, в том числе и те, которые по их простоте опущены, воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести такие примеры самостоятельно. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения обязательно должны использоваться в доказательстве. Полезно составлять схемы доказательств. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее внешнее оформление конспекта не только приучит к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые

происходят из небрежных, беспорядочных записей. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента.

2.2 Рекомендации к подготовке к практическим занятиям и решению задач

Все задания к практическим занятиям, а также задания, вынесенные на самостоятельную работу, рекомендуется выполнять непосредственно после соответствующей темы лекционного курса, что способствует лучшему усвоению материала, позволяет своевременно выявить и устранить «пробелы» в знаниях, систематизировать ранее пройденный материал, на его основе приступить к получению новых знаний и овладению навыками.

Чтение учебника и конспекта должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный (если конечно такой путь не указан в условии задачи, в этом случае следует решить ее указанным методом). Полезно до начала вычислений составить краткий план решения. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от остальных. Ошибочные записи следует замазывать корректором или просто зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения, например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений, то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом, циркулем и указывать масштаб. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие, и по возможности в общем виде с выводом формулы. За-

тем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны) входящих в нее величин. В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.д. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

2.3 Рекомендации к проведению самоконтроля (самопроверки)

После изучения определенной темы по конспекту и (или) учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику или конспекту. Вопросы и задачи для самопроверки, приведенные в данном пособии, должны помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, заключающейся в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате механически заученных форм, без понимания существа дела. Можно сказать, что умение решать задачи является необходимым, но не достаточным условием хорошего знания теории.

3. Методические рекомендации и указания по выполнению контрольной работы

Главная цель выполнения контрольной работы (КР) – оказать студенту помощь в его работе. Рецензия на эту работу позволяет студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывает на

имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы, помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем (письменной или устной). Прежде, чем выполнять КР нужно изучить соответствующий теоретический материал по конспекту и (или) учебнику, ответить на вопросы для самоконтроля. Этот материал нужно закрепить, решая самостоятельно (может быть и несколько раз) уже решенные типовые задачи, приведенных в соответствующих разделах в учебнике, выбранном из списка основной и дополнительной литературы; Не следует приступать к выполнению задачи из контрольной до решения достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию.

Контрольная работа должна выполняться самостоятельно. Не самостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю-рецензенту указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться не подготовленным к устному экзамену.

Студенты выполняют во 2-м семестре контрольную работу №2 (стр.11-13) по следующим разделам:

Функция двух переменных – задачи 1-10;

Дифференциальные уравнения – задачи 11-20, 21-30;

Ряды – задачи 31-40, 41-50;

Таким образом, студент должен выполнить **5 задач** в рамках КР №2.

При оформлении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1) Контрольная работа выполняется в отдельной ученической тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны название учебного заведения, факультета; название кафедры; название КР; название дисциплины; название специальности; ФИО и личный шифр студента; номер курса и группы.

2) Задачи контрольной работы следует располагать в порядке номеров, указанных в задании. Перед решением каждой задачи надо записать ее номер и полностью переписать ее условие.

3) Решение задачи должно быть изложено последовательно с краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, как

получаются те или иные результаты) соответствующими ссылками на вопросы теории и указанием необходимых формул, теорем); в конце необходимо привести окончательный ответ.

4) Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5) При решении задач надо учесть указания (если они есть), приведенные после формулировки условия задачи.

6) На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной около 3 см для замечаний преподавателя.

7) Работы, не отвечающие перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются на переделку.

8) Студентам заочной формы обучения следует зарегистрировать выполненную контрольную работу в установленные сроки в деканате у методиста.

9) Получив прорецензированную работу (как зачетную, так и не зачетную), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. В случае незачета по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования преподавателя, и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

10) Зачтенную контрольную работу вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления преподавателю зачетной контрольной работы студент не допускается к сдаче экзамена.

11) Из приведенных в таблице 1 на стр.11, студент выполняет **тот вариант КР, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.**

Таблица 1

№ вари- анта	Номера задач контрольной работы по вариантам				
1	1	11	21	31	41
2	2	12	22	32	42
3	3	13	23	33	43
4	4	14	24	34	44
5	5	15	25	35	45
6	6	16	26	36	46
7	7	17	27	37	47
8	8	18	28	38	48
9	9	19	29	39	49
0	10	20	30	40	50

3. Задания для контрольной работы

В задачах **1-10** исследовать на экстремум функцию $z = f(x, y)$.

1. $z = 3x + 3y - x^2 - xy - y^2 + 6$.
2. $z = 7x + 8y - x^2 - xy - y^2 - 10$.
3. $z = 8x - 4y + x^2 - xy + y^2 + 15$.
4. $z = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 12$.
5. $z = 2x - 8y - x^2 - y^2 - 9$.
6. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$.
7. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2$.
8. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + x - y + 5$.
9. $z = x^2 - y^2 + 2xy + 6x - 10y + 1$.
10. $z = 4 - 5x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y$.

В задачах **11-20** найти решение задачи Коши.

11. $y' - \frac{y}{x} = xe^x; y(1) = e.$

12. $y' - \frac{y}{x} = 3x; y(1) = 4.$

13. $y' - \frac{3y}{x} = x^3 \sin x; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{8}.$

14. $y' + y = e^{-x}; y(0) = 1.$

15. $y' - \frac{y}{x} = x \cos x; y(\pi) = \pi.$

16. $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}; y(1) = 1.$

17. $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x}; y(1) = 0.$

18. $y' + 2xy = \sqrt{x}e^{-2x}; y(0) = \frac{2}{3}.$

19. $y' - \frac{3y}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}; y(1) = 1.$

20. $y' + \frac{y}{x} = \sqrt[3]{x}; y(1) = \frac{3}{7}.$

В задачах **21-30** найти общее решение дифференциального уравнения.

21. $y'' - 2y' = 6x^2 - 6x - 2.$

23. $y'' + 2y' - 8y = 3\sin x.$

25. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}.$

27. $y'' - 2y' + y = 2e^{-2x}.$

29. $y'' + y' - 12y = 14e^{3x}.$

22. $y'' - y' - 6y = 5e^{3x}.$

24. $y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2.$

26. $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x - 3.$

28. $y'' + 14y' + 49y = 6e^{-7x}.$

30. $y'' + 16y = 7\cos 2x.$

В задачах **31-40** дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n x^n}{b^n k \sqrt[n]{n}}$. Записать первые четыре члена ряда и найти его область сходимости. Числа a , b и k даны.

31. $a = 2$, $b = 3$, $k = 4$.

32. $a = 6$, $b = 5$, $k = 3$.

33. $a = 3$, $b = 4$, $k = 5$.

34. $a = 5$, $b = 2$, $k = 4$.

35. $a = 4$, $b = 3$, $k = 3$.

36. $a = 2$, $b = 3$, $k = 5$.

37. $a = 5$, $b = 6$, $k = 2$.

38. $a = 3$, $b = 5$, $k = 6$.

39. $a = 3$, $b = 7$, $k = 3$.

40. $a = 2$, $b = 7$, $k = 3$.

В задачах **41-50** записать три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением данной задачи Коши.

41. $y' = x^2 + y^2 - e^x$; $y(0) = 0$.

42. $y' = 2x^2 + 3y \cos x + 2$; $y(0) = 0$.

43. $y' = 2x - 3 \ln y + y$; $y(0) = 1$.

44. $y' = x^3 + y^2 - e^x$; $y(0) = 1$.

45. $y' = x^2 y + e^y + x$; $y(0) = 0$.

46. $y' = \sin 2x + xy$; $y(0) = 1$.

47. $y' = e^{-2x} + y^2$; $y(0) = 0$.

48. $y' = \cos x + e^y + x$; $y(0) = 0$.

49. $y' = x e^x + y^2 + 1$; $y(0) = 0$.

50. $y' = \operatorname{tg} x + x y^2 - e^x$; $y(0) = 1$.

4. Примеры решения задач контрольной работы

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y.$$

Найдем «подозрительные» на экстремум точки, используя **необходимое условие экстремума дифференцируемой функции двух переменных**.

Пусть функция $z = z(x, y)$ имеет в точке $M(x_0, y_0)$ экстремум. Если в этой точке существуют производные первого порядка, то

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \text{ или хотя бы одна из этих производных не существует.}$$

Точки, для которых эти условия выполнены, называются соответственно **стационарными или критическими**.

Найдем частные производные:

$$z'_x = (x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y)'_x = 2x + y - 4,$$

$$z'_y = (x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y)'_y = 2y + x - 5.$$

Запишем систему и найдём её решение:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 2y + x - 5 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ 2(4 - 2x) + x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ 8 - 4x + x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ 3 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, «подозрительная» на экстремум точка – $(1, 2)$.

Чтобы проверить, есть ли в ней экстремум, используем **достаточное условие экстремума**:

если $\Delta > 0$, где $\Delta = AC - B^2$, $A = z''_{xx}$, $B = z''_{xy}$, $C = z''_{yy}$, то стационарная точка $M(x_0, y_0)$ является точкой экстремума (причем она будет точкой максимума при $A < 0$ и точкой минимума при $A > 0$);

если $\Delta < 0$, то в точке $M(x_0, y_0)$ экстремума нет;

если $\Delta = 0$, то в точке $M(x_0, y_0)$ экстремума может быть, а может не быть, необходимы дополнительные исследования.

Найдём частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = (2x + y - 4)'_x = 2;$$

$$z''_{xy} = (2x + y - 4)'_y = 1;$$

$$z''_{yy} = (2y + x - 5)'_y = 2.$$

$$A = 2, B = 1, C = 2.$$

$$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0.$$

Значит в точке $(1, 2)$ есть экстремум, а так как $A > 0$, то это локальный минимум.

Ответ: точка $(1, 2)$ является локальным минимумом.

Пример 2. Решить задачу Коши:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Имеем уравнение вида $y' + a(x) \cdot y = b(x)$.

Такое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Решим это уравнение методом Бернулли.

Решение ищем в виде произведения двух функций: $y = u \cdot v$.

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' u.$$

После замены $y = u \cdot v$ исходное уравнение примет вид:

$$u' \cdot v + v' u + \frac{u \cdot v}{x} = \frac{\cos x}{x} \Rightarrow u' \cdot v + u \cdot \left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\cos x}{x}.$$

Неизвестные функции u и v найдем из системы:

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0 \\ u' \cdot v = \frac{\cos x}{x} \end{cases}$$

Найдем частное решение v из первого дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \Rightarrow dv = -\frac{v}{x} dx \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|x| + \ln|C_0| \Rightarrow v = \frac{1}{x} \quad (C_0 = 1).$$

Найдем теперь u из второго уравнения, подставив в него уже известную функцию v :

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{x} \Rightarrow u' = \cos x \Rightarrow u = \int \cos x dx \Rightarrow u = \sin x + C.$$

Отсюда получим общее решение исходного уравнения:

$$y = u \cdot v = (\sin x + C) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{\sin x + C}{x}.$$

Далее нужно найти C из начальных условий.

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\sin \frac{\pi}{2} + C}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1 \Rightarrow \frac{1 + C}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1 \Rightarrow 1 + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Ответ: $y = \frac{\sin x + C}{x}.$

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 5y' + 4y = x.$$

Имеем уравнение вида $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(x)$, которое называется **линейным неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида**. Чтобы найти об-

щее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами, нужно к его общему решению $\tilde{y}$ ассоциированного однородного уравнения прибавить частное решение y^* исходного неоднородного уравнения. Таким образом, $y = \tilde{y} + y^*$.

Для поиска $\tilde{y}$ найдём корни характеристического уравнения:

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow [D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9] \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 4.$$

Находим $\tilde{y}$ по таблицей, приведенной ниже:

Дискриминант	Корни характеристического уравнения	Вид $\tilde{y}$
$D > 0$	$k_1 \neq k_2$ действительные	$\tilde{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
$D = 0$	$k_1 = k_2 = k$	$\tilde{y} = C_1 e^{kx} + x C_2 e^{kx}$
$D < 0$	$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$\tilde{y} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

В нашем случае $D > 0$, поэтому:

$$\tilde{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \Rightarrow \tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{4x}.$$

Для поиска y^* воспользуемся следующей таблицей:

Связь с корнями характеристического уравнения	Вид $f(x)$	Вид y^*
а) $k_1 \neq \alpha, k_2 \neq \alpha$ б) $k_1 = \alpha, k_2 \neq \alpha$ в) $k_1 = k_2 = \alpha$	$P_n(x) e^{\alpha x},$	$y^* = Q_n(x) e^{\alpha x}$ $y^* = x Q_n(x) e^{\alpha x}$ $y^* = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}$
а) $k_{1,2} \neq \alpha \pm i\beta$ б) $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x} (M \cos \beta x + N \sin \beta x)$	$y^* = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ $y^* = x e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$

Замечание 1: $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены n -ой степени в общем виде ($P_0(x) = A$, $P_1(x) = Ax + B$, $P_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ и т.д.).

Замечание 2: Если в правой части отсутствует $e^{\alpha x}$, это означает, что $e^{\alpha x} = 1$, а значит $\alpha = 0$.

В нашем случае $f(x) = x = (1 \cdot x + 0) \cdot e^{0 \cdot x}$, значит правая часть вида $P_1(x) \cdot e^{\alpha x}$ ($\alpha = 0$).

Поскольку $k_1 = 1 \neq \alpha$, $k_2 = 4 \neq \alpha$, то y^* будем искать в виде:

$$y^* = Q_1(x) \cdot e^{\alpha x} = (Ax + B) \cdot e^{0 \cdot x} = Ax + B.$$

Найдём $(y^*)'$, $(y^*)''$:

$$(y^*)' = (Ax + B)' = A \Rightarrow (y^*)'' = (A)' = 0.$$

Подставив $(y^*)'$ и $(y^*)''$ в исходное уравнение, найдём A и B .

$$0 - 5 \cdot A + 4 \cdot (Ax + B) = x \Rightarrow 4Ax - 5A + B = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4A \cdot x - 5A + B = 1 \cdot x + 0 \Rightarrow \begin{cases} -5A + 4B = 0 \\ 4A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{5}{16} \\ A = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Отсюда } y^* = Ax + B \Rightarrow y^* = \frac{1}{4}x + \frac{5}{16}.$$

Следовательно, общее решение исходного ЛНДУ примет вид: $y = \tilde{y} +$

$$y^* = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + \frac{1}{4}x + \frac{5}{16}.$$

$$\text{Ответ: } y = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + \frac{1}{4}x + \frac{5}{16}.$$

Пример 4. Дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n x^n}{7^n \sqrt[3]{n+1}}$. Записать первые четыре члена ряда и найти его область сходимости.

Выпишем первые четыре члена ряда:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n x^n}{7^n \sqrt[3]{n+1}} &= \frac{8^1 x^1}{7^1 \sqrt[3]{1+1}} + \frac{8^2 x^2}{7^2 \sqrt[3]{2+1}} + \frac{8^3 x^3}{7^3 \sqrt[3]{3+1}} + \frac{8^4 x^4}{7^4 \sqrt[3]{4+1}} + \dots = \\ &= \frac{8x}{7\sqrt[3]{2}} + \frac{64x^2}{49\sqrt[3]{3}} + \frac{512x^3}{343\sqrt[3]{4}} + \frac{4096x^4}{2401\sqrt[3]{5}} + \dots \end{aligned}$$

Выпишем общий член ряда и центр сходимости:

$$a_n = \frac{8^n}{7^n \sqrt[3]{n+1}}, \quad x_0 = 0.$$

Найдём радиус сходимости:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8^n}{7^n \sqrt[3]{n+1}} \cdot \frac{7^{n+1} \sqrt[3]{n+2}}{8^{n+1}} \right) = \frac{7}{8}.$$

Тогда интервал сходимости $(x_0 - R; x_0 + R)$ примет вид $\left(-\frac{7}{8}; \frac{7}{8}\right)$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала.

$$\underline{x = \frac{7}{8}}: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n x^n}{7^n \sqrt[3]{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n \left(\frac{7}{8}\right)^n}{7^n \sqrt[3]{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

Так как $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ при $n \rightarrow \infty$ и $\frac{1}{3} < 1$, то по признаку сравнения в предельной форме ряд расходится.

$$\underline{x = -\frac{7}{8}}: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n x^n}{7^n \sqrt[3]{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n \left(-\frac{7}{8}\right)^n}{7^n \sqrt[3]{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

Такой знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, поскольку выполняются следующие условия:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} = 0;$
- 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \frac{1}{\sqrt[3]{4}} > \frac{1}{\sqrt[3]{5}} > \dots > \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} > \dots$

Ответ: $\left[-\frac{7}{8}; \frac{7}{8}\right)$ – область сходимости.

Пример 5. Записать три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = y(x)$, являющейся решением задачи Коши $y' = x^2 + y^3 - e^x$; $y(0) = 0$.

Согласно формуле Тейлора, искомую функцию можно представить в виде $y(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{y''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{y'''(0)}{6} \cdot x^3 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$.

Подставляя начальное условие $y(0) = 0$ в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$y'(0) = 0^2 + y^3(0) - e^0 \Rightarrow y'(0) = 0 + 0^3 - 1 \Rightarrow \underline{y'(0) = -1}.$$

Учитывая, что $y = y(x)$, дифференцируем исходное уравнение по переменной x , откуда найдём $y''(0)$.

$$y'' = 2x + 3y^2 \cdot y' - e^x \Rightarrow y''(0) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot y^2(0) \cdot y'(0) - e^0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y''(0) = 0 + 3 \cdot 0^2 \cdot (-1) - 1 \Rightarrow \underline{y''(0) = -1}.$$

Полученное уравнение снова продифференцируем по переменной x , откуда найдём $y'''(0)$.

$$y''' = 2 + 6y \cdot y' \cdot y' + 3y^2 \cdot y'' - e^x \Rightarrow y'''(0) = 2 + 6 \cdot y(0) \cdot y'(0) \cdot \\ \cdot y'(0) + 3 \cdot y^2(0) \cdot y''(0) - e^0 = 2 + 6 \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 0^2 \cdot (-1) - \\ - 1 \Rightarrow \underline{y'''(0) = 1}.$$

$$\text{Следовательно, } y = 0 + (-1) \cdot x + \frac{(-1)}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cong -x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

$$\text{Ответ: } y \cong -x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

5. Вопросы к экзамену

1. Функции двух переменных. Область определения.
2. Частные производные. Полный дифференциал функции двух переменных.
3. Экстремум функции двух переменных.
4. Определение числового ряда. Общий член числового ряда.
5. Определение частичной суммы ряда. Определение суммы ряда. Определение остатка ряда.
6. Определение сходящегося и расходящегося ряда.
7. Свойства сходящихся рядов.
8. Необходимый признак сходимости ряда.
9. Сходимость обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.
10. Сходимость ряда геометрической прогрессии $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$.
11. Знакоположительные ряды. Признак сравнения.
12. Знакоположительные ряды. Признак сравнения в предельной форме.
13. Знакоположительные ряды. Признак Даламбера.
14. Знакоположительные ряды. Радикальный признак Коши.
15. Знакопеременные ряды. Достаточное условие сходимости.
16. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.
17. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
18. Определение степенного ряда.
19. Определение точки сходимости и точки расходимости.
20. Теорема Абеля.
21. Интервал сходимости. Радиус сходимости. Область сходимости степенного ряда.
22. Способы определения области сходимости.
23. Свойства степенных рядов.
24. Разложение функции в ряд. Ряд Тейлора и Маклорена. Разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

25. Применение рядов в приближенных вычислениях.
26. Определение дифференциального уравнения (ДУ). Порядок, решение ДУ.
27. ДУ первого порядка, разрешенные относительно производной. Задача Коши. Общее и частное решение (общий и частный интеграл) ДУ.
28. ДУ с разделяющимися переменными.
29. Линейные ДУ первого порядка.
30. ДУ второго порядка, разрешенные относительно производной. Задача Коши. Общее и частное решение (общий и частный интеграл) ДУ. ДУ, допускающие понижение порядка.
31. Линейные однородные ДУ (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами. Свойства решений ЛОДУ. Понятие фундаментальной системы решений. Определитель Вронского и его связь с линейной зависимостью и независимостью частных решений ЛОДУ второго порядка.
32. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ второго порядка. Характеристическое уравнение, его корни и общее решение ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.
33. Линейные неоднородные ДУ (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения ЛНДУ.
34. Частное решение ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Метод неопределенных коэффициентов.

Список основной литературы

1. Шипачев, В. С. Высшая математика : учебник / В.С. Шипачев. — Москва : ИНФРА-М, 2022. — 479 с. — (Высшее образование). — DOI 10.12737/5394. - ISBN 978-5-16-010072-2. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1850356>
2. Шершнеv, В. Г. Математический анализ : учебное пособие / В. Г. Шершнеv. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 288 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-005488-9. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product>

Список дополнительной литературы

1. Берман А.Ф. Краткий курс математического анализа: Учебник / А.Ф. Берман, И.Г. Араманович. — М.: Лань, 2010. — 736 с.
2. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. — 8-е изд., испр. и доп. — М.: Лань, 2014. — 464 с.

Математический анализ: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы №2

Составители: Журавская Светлана Александровна
Тарсис Екатерина Юрьевна
Фомина Татьяна Викторовна