

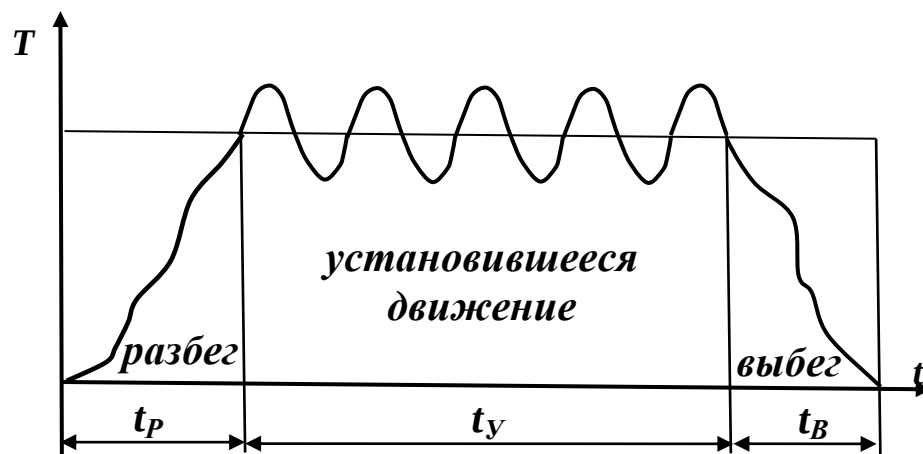
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

Ю.И. ЕВДОКИМОВ

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

ЧАСТЬ 3
ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Курс лекций



$$T - T_o = \Sigma A$$

Новосибирск 2020

**НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

Ю.И. ЕВДОКИМОВ

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

ЧАСТЬ 3

ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Курс лекций

Новосибирск 2020

УДК 621.01

ББК 34.41

Евдокимов Ю.И. Теория механизмов и машин. Ч. 3: Динамика механизмов и машин: курс лекций / Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т. – Новосибирск: Изд-во НГАУ, 2020. – 66 с.

Курс лекций содержит основные положения курса «Теория механизмов и машин», изложенные в краткой конспективной форме. Часть 3 содержит теоретические положения разделов: режимы и уравнения движения машины под действием заданных сил; трение в кинематических парах; коэффициент полезного действия механизмов и агрегатов; регулирование движения машины; уравнивание вращающихся масс в механизмах.

Изложение дано на основе графических, аналитических и графоаналитических методов.

Приведены примеры решения задач по различным разделам курса.

Курс лекций предназначен для студентов всех направлений подготовки Инженерного института очной и заочной форм обучения (Агроинженерия, Технология транспортных процессов, Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, Профессиональное обучение (по отраслям), Техносферная безопасность).

Курс лекций может быть рекомендован для студентов Агрономического факультета (Природообустройство и водопользование), Биолого-технологического факультета (Продукты питания животного происхождения, Технология продукции и организация общественного питания, Стандартизация и метрология), а также студентам, обучающимся по инженерным направлениям подготовки.

Утвержден и рекомендован к переизданию учебно-методическим советом Инженерного института (протокол от 29 сентября 2020 г. № 2)

ЛЕКЦИЯ 16

Исследование движения механизмов под действием заданных сил. Введение

К механизму машинного агрегата во время его движения приложены различные силы. Это — движущие силы, силы сопротивления, силы тяжести звеньев и многие другие. Характер их действия может быть разным: некоторые из них зависят от положения звеньев механизма, другие — от их скорости, третьи — постоянны. Своим действием приложенные силы сообщают механизму тот или иной закон движения.

Кинематические характеристики — скорость, ускорение, время срабатывания, коэффициент неравномерности и др. — определяются посредством решения уравнения движения. Выбор способа решения уравнения движения зависит от характера действия заданных сил и от передаточных свойств механизма. При этом размеры, массы и моменты инерции звеньев должны быть известными. Однако распространена и обратная задача, когда заданы кинематические характеристики режима движения машины и необходимо найти массы, моменты инерции, а следовательно, и размеры звеньев, при которых механизм, нагруженный заданными силами, двигался бы в требуемом режиме. В настоящей части курса рассматриваются способы решения как прямой задачи — динамического исследования механизма машинного агрегата, так и обратной — его динамического проектирования. При этом необходимо подчеркнуть, что при решении обеих задач предполагается, что все звенья механизма являются абсолютно жёсткими.

Основные задачи динамического анализа механизмов и машин

1. Определение закона движения механизма под действием заданных сил.
2. Определение реакций в кинематических парах механизма.
3. Определение потерь энергии на преодоление трения в кинематических парах. Определение механического коэффициента полезного действия механизмов и агрегатов.
4. Уравновешивание механизмов и отдельных их звеньев.
5. Способы регулирования движения машины.

Установившееся и неустановившееся движение машины

Весь промежуток времени работы машины от пуска до полной остановки можно разбить на следующие фазы:

1. Разбег,
2. Установившееся движение,
3. Выбег.

На рис. 16.1 изображена диаграмма $\omega(t)$ изменения угловой скорости главного вала машины в зависимости от времени работы.

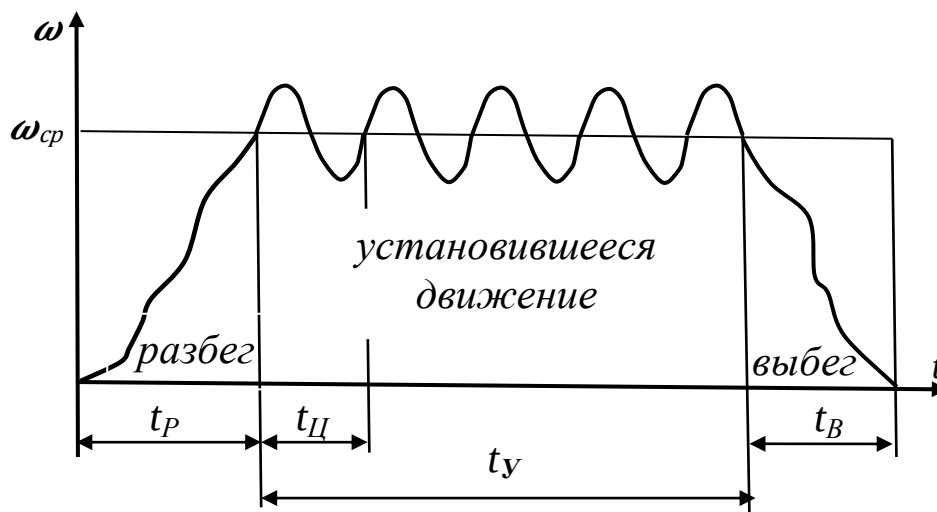


Рис. 16.1. Фазы работы машины

На рис. 16.1 приняты следующие обозначения:

t_P – время разбега;

$t_У$ – время установившегося движения;

t_B – время выбега;

$t_Ц$ – время одного цикла работы машины.

При динамическом исследовании механизмов с одной степенью свободы применяется теорема об изменении кинетической энергии механической системы: **изменение кинетической энергии механической системы на некотором её перемещении равно алгебраической сумме работ всех сил (как внешних, так и внутренних), действующих на данную систему на том же перемещении, т.е.**

$$T - T_0 = A, \quad (16.1)$$

где T – кинетическая энергия системы в рассматриваемый момент времени;

T_0 – кинетическая энергия системы в начальный момент времени;

A – алгебраическая сумма работ всех сил, действующих на систему при перемещении её из начального в рассматриваемое положение.

Правую часть уравнения (16.1) можно представить как разность работ движущих сил и сил сопротивления:

$$A = A_D - A_C, \quad (16.2)$$

где A_D – алгебраическая сумма работ движущих сил;

A_C – алгебраическая сумма работ сил сопротивления.

Учитывая уравнение (16.2), получим из (16.1)

$$T - T_0 = A_D - A_C. \quad (16.3)$$

Используя уравнение (16.3), рассмотрим работу машины на каждой фазе отдельно.

Разбег. Кинетическая энергия в начальный момент времени равна нулю, т.е. $T_0 = 0$. Кинетическая энергия в конце разбега больше нуля, т.е. $T > 0$. Тогда из уравнения (16.3) получим:

$$A_D = T + A_C. \quad (16.4)$$

Установившееся движение. При установившемся движении машины угловая скорость главного вала колеблется около своего среднего значения ω_{cp} , т. е. изменяется периодически. Период изменения угловой скорости соответствует продолжительности одного цикла работы машины. Циклы работы последовательно повторяются друг за другом, поэтому для изучения работы машины на фазе установившегося движения достаточно рассмотреть её работу внутри одного цикла.

При установившемся движении кинетическая энергия машины в начале и конце цикла одинакова, т.е. $T_0 = T$, поэтому получим из (16.3):

$$A_D = A_C. \quad (16.5)$$

Из уравнения (16.5) следует, что **для установившегося движения машины необходимо, чтобы работа движущих сил за время одного цикла равнялась работе сил сопротивления за тот же промежуток времени.**

Выбег. При остановке машины её кинетическая энергия равна нулю, т.е. $T = 0$. Тогда из уравнения (16.3) получим

$$A_C = T_0 + A_D, \quad (16.6)$$

где T_0 – кинетическая энергия машины в начале торможения, соответствующая средней угловой скорости ω_{cp} главного вала.

При торможении чаще всего движущие силы отключаются. При этом работа движущих сил равна нулю, т.е. $A_D = 0$. Тогда из уравнения (16.6) получим:

$$A_C = T_0. \quad (16.7)$$

Уравнения (16.4), (16.5) и (16.7) являются основой для исследования движения машины на различных фазах работы машины.

Динамическая модель машинного агрегата

Механизм машинного агрегата обычно является многозвенной системой, нагруженной силами и моментами, приложенными к различным ее звеньям. Чтобы лучше представить себе это, рассмотрим в качестве примера силовую установку, в которой двигатель внутреннего сгорания (ДВС) приводит в движение через зубчатую передачу вал потребителя механической энергии, т.е. рабочей машины (рис. 16.2). Пусть таким потребителем будет электрогенератор, или вентилятор, или центробежный насос, или какая-либо другая рабочая машина.

К поршню 3 приложена движущая сила P , к ротору 4 рабочей машины – момент сопротивления M_{PM} , ко всем звеньям – силы тяжести и во всех кинематических парах действуют силы трения. Если ДВС имеет несколько цилиндров, то число подвижных звеньев будет уже больше четырех. При этом на

каждый поршень будет действовать движущая сила, так что картина нагружения механизма станет еще более сложной.

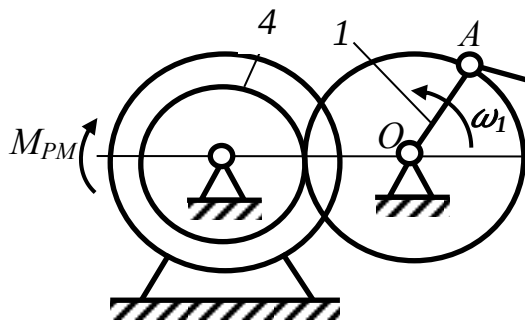


Рис. 16.2. Схема машинного агрегата

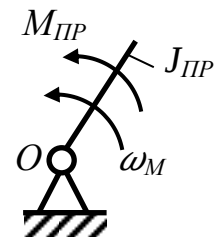


Рис. 16.3. Звено приведения

Определение закона движения такой сложной многозвенной системы представляет собой трудную задачу. Однако в рассматриваемом примере механизм имеет **одну** степень свободы ($W = 1$). Это значит, что, прежде всего надо определить закон движения всего лишь одного из его звеньев, которое тем самым будет являться начальным. Такая постановка задачи приводит к мысли, заменить весь сложный многозвенный механизм одним условным звеном.

Если заданный механизм имеет звено, находящееся в непрерывном вращательном движении, то именно его и целесообразно выбирать в качестве начального. Выберем в качестве начального звена исследуемого механизма коленчатый вал ДВС, т.е. звено 1 (рис. 16.2).

К условному звену (рис. 16.3) предъявим такое требование: пусть его момент инерции $J_{ПР}$ и момент сил $M_{ПР}$, которым оно нагружено, будут такими, что закон движения условного звена получится полностью совпадающим с законом движения начального звена 1. Это значит, что условное звено окажется своеобразной динамической моделью механизма. Отсюда следует, что если определить закон движения этой простой модели (рис. 16.3), то автоматически станет известным искомый закон движения начального звена заданного механизма, т. е. будет справедливым для любого момента времени уравнение

$$\omega_1 = \omega_M, \quad (16.8)$$

где ω_1 – угловая скорость начального звена (во взятом примере звена 1),
 ω_M – угловая скорость модели.

Из сказанного следует, что при построении модели механизма все силы и моменты, приложенные к нему, оказываются приведенными к одному звену и заменёнными приведённым моментом сил $M_{ПР}$, т. е. той расчетной величиной, которая в теоретической механике называется обобщенной силой. Следовательно, $M_{ПР}$ является эквивалентом всей заданной нагрузки, приложенной к механизму. Равным образом, массы всех звеньев (точнее говоря, их инертности) оказываются также приведенными к одному звену и заменёнными приведённым моментом инерции $J_{ПР}$, который является, таким образом, эквива-

лентом всей инертности механизма. Сам же заданный многосвязный механизм (рис. 16.2), нагруженный сложной системой сил и моментов, оказывается замененным простой моделью (рис. 16.3). Итак, построение динамической модели состоит в приведении сил (определение $M_{\text{пр}}$) и в приведении масс (определение $J_{\text{пр}}$). Подчеркнём при этом, что динамическая модель должна быть обязательно построена так, чтобы было выполнено уравнение (16.8); иначе сам переход от заданного реального механизма к его модели становится бессмысленным.

Приведение сил

Выполнение уравнения (16.8), как следует из уравнения Лагранжа II рода, будет обеспечено в том случае, если **при приведении сил будет соблюдено условие равенства мгновенных мощностей**. Учитывая это условие, можно дать следующее определение.

Приведённым моментом сил для данной системы сил называется такой момент $M_{\text{пр}}$, приложенный к звену приведения, мгновенная мощность которого равна алгебраической сумме мгновенных мощностей приводимых сил.

Из определения приведённого момента сил следует:

$$M_{\text{пр}} \cdot \omega = \sum_1^n N_k \quad (16.9)$$

или

$$M_{\text{пр}} = \frac{\sum_1^n N_k}{\omega}, \quad (16.10)$$

где ω – угловая скорость звена приведения,

N_k – мгновенная мощность приводимой силы с номером k .

Элементарная работа dA_k силы F_k на участке ds_k (рис. 16.4) будет равна

$$dA_k = F_k \cdot ds_k \cdot \cos \alpha_k \quad (16.11)$$

Мгновенная мощность N_k приводимой силы F_k определяется формулой

$$N_k = \frac{dA_k}{dt} = F_k \frac{ds_k}{dt} \cos \alpha_k,$$

или

$$N_k = F_k \cdot V_k \cdot \cos \alpha_k, \quad (16.12)$$

где V_k – скорость точки K ($V_k = \frac{ds_k}{dt}$).

Аналогично определяется элементарная работа dA_k момента M_k , действующего на звено k (рис. 16.5) на угловом перемещении $d\varphi_k$ звена:

$$dA_k = M_k \cdot d\varphi_k. \quad (16.13)$$

Мгновенная мощность N_k момента M_k на угловом перемещении $d\varphi_k$ звена k определяется формулой:

$$N_k = \frac{dA_k}{dt} = M_k \frac{d\varphi_k}{dt}$$

или

$$N_k = M_k \cdot \omega_k, \quad (16.14)$$

где ω_k – угловая скорость звена k ($\omega_k = \frac{d\varphi_k}{dt}$).

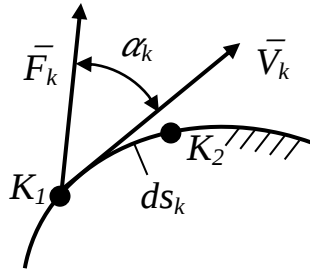


Рис. 16.4. Движение точки K под действием силы $\bar{F}_K$

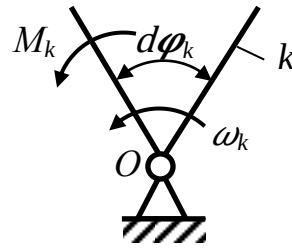


Рис. 16.5. Вращение звена k под действием момента M_k

Движущие силы, действующие на механизм, приводятся к приведённому моменту M_D движущих сил, а силы сопротивления – к приведённому моменту M_C сил сопротивления. После определения приведённых моментов M_D и M_C можно определить работы движущих сил и сил сопротивления на интервале перемещения от φ_0 до φ :

$$A_D = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_D d\varphi \text{ и } A_C = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_C d\varphi$$

или

$$A = A_D - A_C = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (M_D - M_C) d\varphi, \quad (16.15)$$

где A_D и A_C – работы движущих сил и сил сопротивления, соответственно, на интервале перемещения от φ_0 до φ ,

A – суммарная работа движущих сил и сил сопротивления на том же интервале перемещения.

Приведение масс

При исследовании движения звена приведения ему присваивается приведённый момент инерции $J_{пр}$ механизма. Величина приведённого момента инерции механизма определяется из условия **равенства кинетической энергии звена приведения и кинетической энергии приводимых звеньев**.

Кинетическая энергия механизма равна сумме кинетических энергий его подвижных звеньев:

$$T = \sum_1^n T_i, \quad (16.16)$$

где n – число подвижных звеньев механизма,

T_i – кинетическая энергия звена i .

Рассмотрим определение кинетической энергии T звена для различных видов его движения.

1. Вращательное движение звена относительно неподвижной оси (рис. 16.6).

$$T = J_O \frac{\omega^2}{2},$$

де J_O – момент инерции звена относительно оси вращения O ,
 ω – угловая скорость звена.

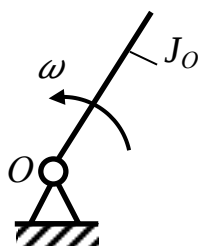


Рис. 16.6. Вращение звена
 вокруг неподвижной оси

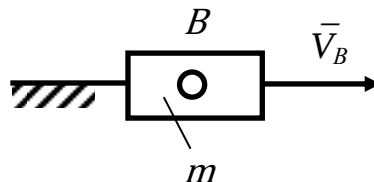


Рис. 16.7. Поступательное
 движение звена

2. Поступательное движение звена (рис. 16.7).

$$T = m \frac{V_B^2}{2},$$

где m – масса звена,
 V_B – скорость звена.

3. Сложное плоское движение звена (рис. 16.8).

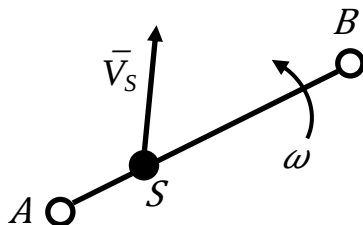


Рис. 16.8. Сложное плоское
 движение звена

Движение звена AB разложим на переносное поступательное вместе с центром масс S и относительное вращательное вокруг точки S . Кинетическая энергия T звена состоит из двух слагаемых:

$$T = T_{\text{пост}} + T_{\text{вр}}, \quad (16.17)$$

где $T_{\text{пост}}$ – кинетическая энергия звена в переносном поступательном движении;
 $T_{\text{вр}}$ – кинетическая энергия звена в относительном вращательном движении.

Учитывая уравнение ((16.17), получим:

$$T = m \frac{V_S^2}{2} + J_S \frac{\omega^2}{2}, \quad (16.18)$$

где m – масса звена,
 V_S – скорость центра S масс звена,
 J_S – центральный момент инерции звена,
 ω – угловая скорость звена.

Кинетическая энергия звена приведения (рис. 16.3) определяется формулой:

$$T = J_{\text{ПР}} \frac{\omega^2}{2}. \quad (16.19)$$

Из условия равенства кинетической энергии звена приведения и приводимых звеньев механизма следует:

$$T = \sum_1^n T_i. \quad (16.20)$$

Учитывая уравнения (16.19) и (16.20) получим:

$$J_{\text{ПР}} \frac{\omega^2}{2} = \sum_1^n (m_i \frac{v_{Si}^2}{2} + J_{Si} \frac{\omega_i^2}{2}). \quad (16.21)$$

Из уравнения (16.21) следует правило определения приведённого момента инерции механизма:

$$J_{\text{ПР}} = \frac{\sum_1^n T_i}{\omega^2/2} = \sum_1^n (m_i \frac{v_{Si}^2}{\omega^2} + J_{Si} \frac{\omega_i^2}{\omega^2}). \quad (16.22)$$

Величина $J_{\text{ПР}}$ является переменной и зависящей от обобщённой координаты φ .

Уравнения движения механизма

Применяя метод приведения сил и масс, в соответствии с уравнением (16.1) можно записать:

$$J_{\text{ПР}}^{(\varphi)} \frac{\omega^2}{2} - T_0 = A, \quad (16.23)$$

где $J_{\text{ПР}}^{(\varphi)}$ — приведённый момент инерции в текущем положении механизма (соответствующий углу φ);

$T_0 = J_{\text{ПР}}^{(\varphi_0)} \cdot \frac{\omega_0^2}{2}$ — кинетическая энергия механизма в начальный момент, соответствующий углу φ_0 ,

ω_0 — угловая скорость звена приведения в начальный момент (соответствующий φ_0),

A — суммарная работа движущих сил и сил сопротивления на интервале движения механизма от φ_0 до φ ($A = A_D - A_C$).

Уравнение (16.23) представляет собой **уравнение движения механизма в форме кинетических энергий**.

Из уравнения (16.23) следует:

$$\omega = \sqrt{\frac{2(T_0 + A)}{J_{\text{ПР}}^{(\varphi)}}}. \quad (16.24)$$

Уравнение (16.24) позволяет найти угловую скорость ω звена приведения в рассматриваемый момент, если известна его угловая скорость ω_0 (при φ_0), а так же заданы массы звеньев и силы, действующие на механизм.

Уравнение (16.24) применимо только для условий, при которых моменты M_D и M_C являются функциями угла φ .

Продифференцируем уравнение (16.23) по углу φ :

$$J_{\text{ПР}}' \frac{\omega^2}{2} + J_{\text{ПР}}^{(\varphi)} \omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{dA}{d\varphi}. \quad (16.25)$$

Учитывая, что $dA = (M_{\text{Д}} - M_{\text{С}}) \cdot \frac{dA}{d\varphi}$,

и $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, получим из (16.25):

$$J_{\text{ПР}}' \frac{\omega^2}{2} + J_{\text{ПР}}^{\varphi} \cdot \varepsilon = M_{\text{Д}} - M_{\text{С}}, \quad (16.26)$$

где ε – угловое ускорение звена приведения.

Уравнение (16.26) представляет собой **уравнение движения механизма в форме моментов**.

В частном случае, если $J_{\text{ПР}} = \text{const}$ (например, для зубчатых передач с неподвижными осями колёс) получим из (16.26):

$$J_{\text{ПР}} \cdot \varepsilon = M_{\text{Д}} - M_{\text{С}},$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{M_{\text{Д}} - M_{\text{С}}}{J_{\text{ПР}}}, \quad (16.27)$$

где $M_{\text{Д}}$ и $M_{\text{С}}$ – приведённые моменты движущих сил и сил сопротивления.

Примеры определения приведённых моментов сил и масс механизма

Пример 1. Определить приведённый момент $M_{\text{ПР}}$ сил и приведённый момент инерции $J_{\text{ПР}}$ кривошипно-ползунного механизма.

Исходные данные:

кинематическая схема механизма (рис. 16.9);

$l_{\text{OA}}, l_{\text{AB}}, l_{\text{AS}}$ – размеры звеньев (точка S является центром масс звена 2);

φ – угол, определяющий положение начального звена 1;

m_2, m_3 – массы звеньев 2 и 3;

J_1, J_{S2} – центральные моменты инерции звеньев 1 и 2;

P – внешняя сила, действующая на ползун 3.

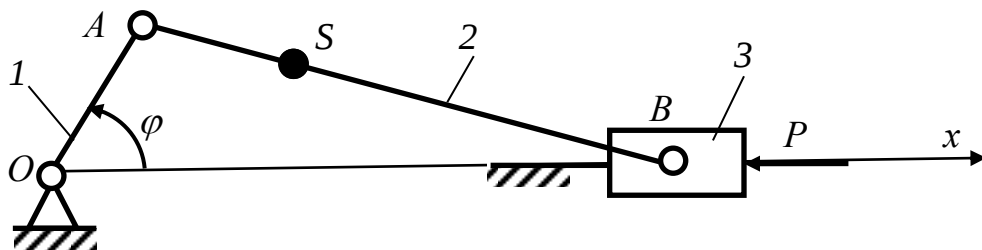


Рис. 16.9. Кривошипно-ползунный механизм

Построим на рис. 16.10 в произвольном масштабе μ_v план скоростей механизма. Для этого составим векторное уравнение, связывающее скорости точек A и B звена 2:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA},$$

$$//x \quad \perp OA \quad \perp AB$$

где $\bar{V}_B$ – скорость точки B (направлена параллельно оси x);
 $\bar{V}_A$ – скорость точки A (направлена перпендикулярно OA);
 $\bar{V}_{BA}$ – скорость точки B в относительном вращении звена 2 вокруг точки A (направлена перпендикулярно AB).

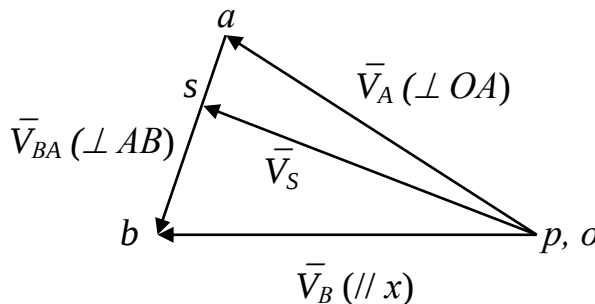


Рис. 16.10. План скоростей

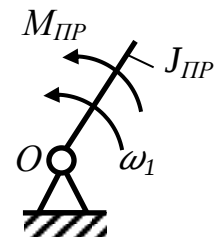


Рис. 16.11. Звено приведения

В качестве звена приведения примем звено, вращающееся вокруг неподвижной опоры с угловой скоростью ω_1 (рис. 16.11).

Мощность приведённого момента сил определяется формулой:

$$N_{\text{ПР}} = M_{\text{ПР}} \cdot \omega_1.$$

Мощность приводимой силы P определяется соотношением:

$$N_p = P \cdot V_B.$$

Из условия равенства мгновенных мощностей приведённого момента сил $M_{\text{ПР}}$ и приводимой силы P следует:

$$M_{\text{ПР}} \cdot \omega_1 = P \cdot V_B,$$

откуда

$$M_{\text{ПР}} = P \frac{V_B}{\omega_1}.$$

Учитывая, что $V_B = pb \cdot \mu_v$ и $\omega_1 = \frac{V_A}{l_{OA}}$, $V_A = pa \cdot \mu_v$, получим:

$$M_{\text{ПР}} = P \frac{pb}{pa} l_{OA},$$

где pb и pa – длины отрезков на плане скоростей механизма.

Как видно из последней формулы, масштаб μ_v плана скоростей здесь роли не играет, и поэтому может быть выбран произвольным.

Приведённый момент инерции $J_{\text{ПР}}$ механизма определим из условия равенства кинетических энергий звена приведения и приводимых звеньев:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где T – кинетическая энергия звена приведения,

T_1 , T_2 и T_3 – кинетические энергии звеньев 1, 2 и 3 соответственно.

Кинетическая энергия звена приведения определяется формулой:

$$T = J_{\text{пр}} \frac{\omega_1^2}{2}.$$

Определим кинетическую энергию каждого звена отдельно:

$$T_1 = J_1 \frac{\omega_1^2}{2},$$

$$T_2 = m_2 \frac{V_S^2}{2} + J_{S2} \frac{\omega_2^2}{2},$$

$$T_3 = m_3 \frac{V_B^2}{2},$$

где V_S – скорость центра масс S звена 2,

ω_2 – угловая скорость звена 2.

Учитывая, что

$$V_S = ps \cdot \mu_V \text{ и } \omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}}, V_{BA} = ab \cdot \mu_V,$$

получим:

$$J_{\text{пр}} \frac{\omega_1^2}{2} = J_1 \frac{\omega_1^2}{2} + m_2 \frac{V_S^2}{2} + J_{S2} \frac{\omega_2^2}{2} + m_3 \frac{V_B^2}{2},$$

откуда

$$J_{\text{пр}} = J_1 + m_2 \frac{V_S^2}{\omega_1^2} + J_{S2} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + m_3 \frac{V_B^2}{\omega_1^2}$$

или

$$J_{\text{пр}} = J_1 + m_2 \left(\frac{ps}{pa} \right)^2 \cdot l_{0A}^2 + J_{S2} \left(\frac{ab}{pa} \right)^2 \cdot \left(\frac{l_{0A}}{l_{AB}} \right)^2 + m_3 \left(\frac{pb}{pa} \right)^2 \cdot l_{0A}^2,$$

где V_S – скорость центра масс S звена 2,

ω_2 – угловая скорость звена 2,

ps , ab и pb – длины отрезков на плане скоростей механизма.

Пример 2. Определить угловое ускорение ε_1 колеса 1 зубчатой передачи (рис. 16.12). На колесо 1 действует момент $M_1 = 8$ Н·м, на колесо 3 – момент $M_3 = 10$ Н·м. Числа зубьев колёс: $z_1 = 20$, $z_2 = 16$, $z_3 = 40$. Центральные моменты инерции колёс: $J_1 = 0,01$ кг·м², $J_2 = 0,0064$ кг·м², $J_3 = 0,04$ кг·м².

Исследование зубчатого механизма сведём к исследованию его динамической модели, т.е. звена приведения (рис. 16.13). Оси зубчатых колёс передачи неподвижны, поэтому для решения задачи можно использовать уравнение

движения (16.27). Угловая скорость звена привода равна угловой скорости колеса 1.

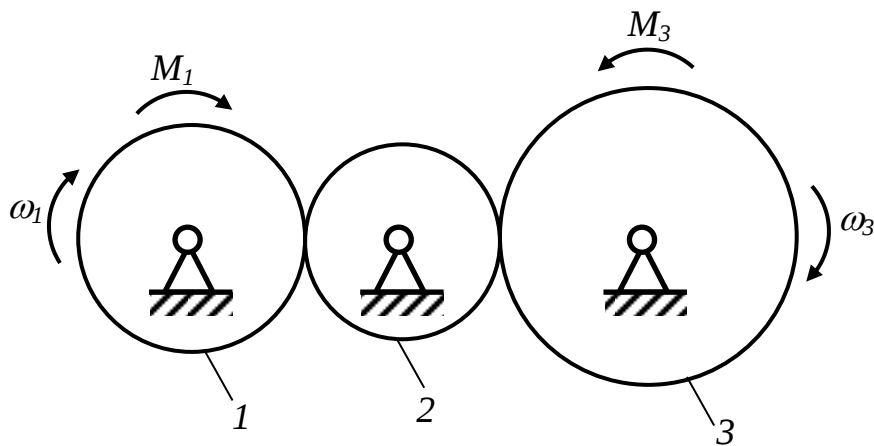


Рис. 16.12. Зубчатая передача

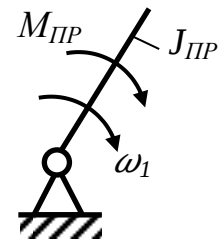


Рис. 16.13. Звено привода

Угловое ускорение ε_1 звена привода определяется соотношением:

$$\varepsilon_1 = \frac{M_{\text{пр}}}{J_{\text{пр}}} ,$$

где $M_{\text{пр}}$ – приведённый момент сил;

$J_{\text{пр}}$ – приведённый момент инерции механизма.

Определим приведённый момент сил из условия равенства мгновенных мощностей:

$$N_{\text{пр}} = N_1 + N_3 ,$$

где $N_{\text{пр}}$ – мгновенная мощность приведённого момента сил;

N_1 – мгновенная мощность момента M_1 , действующего на колесо 1;

N_3 – мгновенная мощность момента M_3 , действующего на колесо 3.

Предположим, что направление угловой скорости ω_1 колеса 1 совпадает с направлением момента M_1 . Тогда направление угловой скорости ω_3 колеса 3 будет противоположным направлению момента M_3 . Учитывая это предположение, получим:

$$N_{\text{пр}} = M_{\text{пр}} \cdot \omega_1 ,$$

$$N_1 = M_1 \cdot \omega_1 ,$$

$$N_3 = - M_3 \cdot \omega_3 .$$

Учитывая это, получим:

$$M_{\text{пр}} \cdot \omega_1 = M_1 \cdot \omega_1 - M_3 \cdot \omega_3 ,$$

откуда

$$M_{\text{пр}} = M_1 - M_3 \cdot \frac{\omega_3}{\omega_1} .$$

Заменим отношение угловых скоростей отношением чисел зубьев колёс передачи:

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_3}.$$

Тогда величина приведённого момента сил будет определяться следующим образом:

$$M_{\text{пр}} = M_1 - M_3 \cdot \frac{z_1}{z_3} = 8 - 10 \frac{20}{40} = 3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Знак (+) здесь указывает, что принятое предварительно направление угловой скорости ω_1 , совпадающее с направлением момента M_1 , оказалось верным, т.е. момент M_1 является движущим, а момент M_3 – моментом сопротивления.

Величину приведённого момента инерции механизма определим из условия равенства кинетических энергий:

$$T_{\text{пр}} = T_1 + T_2 + T_3,$$

где $T_{\text{пр}}$ – кинетическая энергия звена приведения,

T_1 , T_2 и T_3 – кинетические энергии колёс 1, 2 и 3.

Кинетические энергии звеньев определяются соотношениями:

$$T_{\text{пр}} = J_{\text{пр}} \frac{\omega_1^2}{2}, \quad T_1 = J_1 \frac{\omega_1^2}{2}, \quad T_2 = J_2 \frac{\omega_2^2}{2}, \quad T_3 = J_3 \frac{\omega_3^2}{2}.$$

Откуда следует

$$J_{\text{пр}} \frac{\omega_1^2}{2} = J_1 \frac{\omega_1^2}{2} + J_2 \frac{\omega_2^2}{2} + J_3 \frac{\omega_3^2}{2}.$$

Величина приведённого момента инерции механизма выражается соотношением:

$$J_{\text{пр}} = J_1 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + J_3 \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2.$$

Заменим отношения угловых скоростей отношениями чисел зубьев колёс передачи:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2} \quad \text{и} \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_3}.$$

После подстановки получим:

$$\begin{aligned} J_{\text{пр}} &= J_1 + J_2 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + J_3 \left(\frac{z_1}{z_3} \right)^2 = \\ &= 0,01 + 0,0064 \left(\frac{20}{16} \right)^2 + 0,04 \left(\frac{20}{40} \right)^2 = 0,03 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Угловое ускорение звена приведения определяется соотношением

$$\varepsilon_1 = \frac{M_{\text{пр}}}{J_{\text{пр}}} = \frac{3}{0,03} = 100 \frac{\text{рад}}{\text{сек}^2}.$$

Угловое ускорение ε_1 колеса 1 равно угловому ускорению звена приведения. Направление углового ускорения ε_1 получилось со знаком (+), следовательно, оно совпадает с направлением ω_1 .

ЛЕКЦИЯ 17

Трение в кинематических парах. Общие сведения

Трение представляет собой сопротивление, возникающее при относительном движении соприкасающихся тел.

Трение является одним из наиболее сложных явлений. Трение исследовалось многими учёными: Леонардо да Винчи (XVI век), Амонтоном (XVI I век), и Кулоном (XVI I I век), однако и сегодня многие проблемы трения полностью не решены.

Трение определяется механическими и молекулярными процессами на поверхностях скольжения. Оно зависит от материалов от чистоты обработки поверхностей, от плёнки (оксидов), покрывающей поверхности, от промежуточного слоя (газ, жидкость), продолжительности неподвижного контакта, скорости относительного скольжения, температуры, давления на поверхностях контакта и др.

Трение вызывает нагревание и износ материалов соприкасающихся поверхностей.

Элементарное представление о явлениях, происходящих при скольжении сухих поверхностей, можно составить рассмотрением следующей схемы (рис. 17.1). Если поверхность тела 1 находится под действием вертикальной нагрузки $\bar{Q}$, то давление на поверхностях соприкосновения распределяется неравномерно даже при самой совершенной их обработке. С улучшением обработки поверхностей увеличивается количество контактных точек.

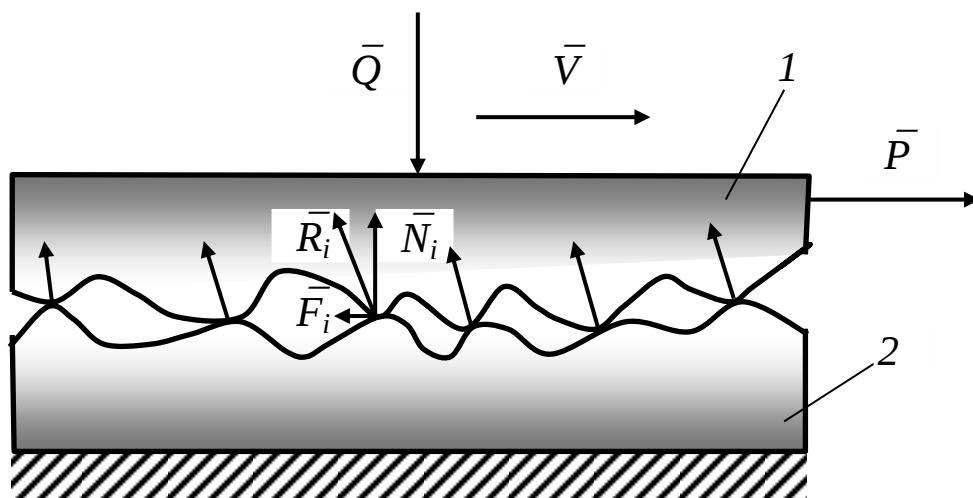


Рис. 17.1. Поверхности трения

При отсутствии сдвигающей силы $\bar{P}$ горизонтальные составляющие $\bar{F}_i$ реакций $\bar{R}_i$ в отдельных точках контакта взаимно уравниваются. При действии силы $\bar{P}$ происходит перераспределение давления в точках соприкосновения, так, что сумма их горизонтальных составляющих $\bar{F}_i$ уравни-

шивает силу $\bar{P}$, если тело 1 неподвижно или перемещается равномерно в направлении скорости $\bar{V}$ относительно тела 2.

В зависимости от величины силы $\bar{P}$ будет либо скольжение тел, либо относительные перемещения ограничатся очень малыми пластическими и упругими деформациями поверхностного слоя. С увеличением силы $\bar{P}$ увеличиваются до определённого предела и горизонтальные составляющие $\bar{F}_i$, после чего начинается скольжение.

Виды трения

В зависимости от вида относительного движения соприкасающихся тел трение можно разделить на следующие виды:

1. Трение скольжения;
2. Трение качения;
3. Трение при качении со скольжением.

Трение вида 2 и 3 имеет место только в высших кинематических парах, в которых контакт звеньев происходит в точке или по линии.

В свою очередь трение при скольжении различают на:

1. Сухое трение;
2. Трение со смазкой.

Трение в поступательной кинематической паре

Для пояснения принципов технических расчётов сухого трения рассмотрим находящееся на горизонтальной плоскости тело (рис. 17.2), к которому приложена внешняя сила $\bar{P}$, равномерно возрастающая от нуля.

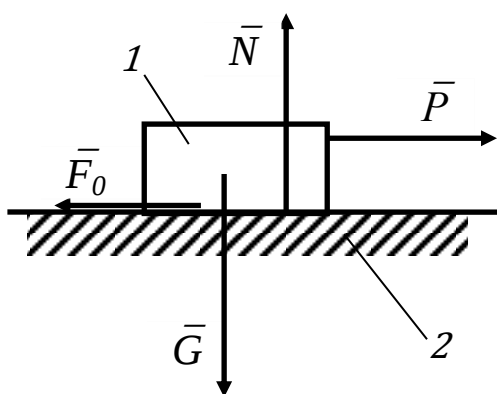


Рис. 17.2. Тело на плоскости

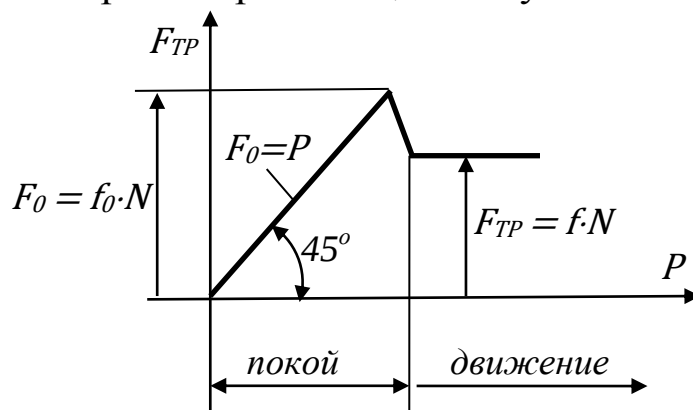


Рис. 17.3. График $F_{TP}(P)$

До момента трогания тела с места кроме силы $\bar{P}$ на тело действуют: сила тяжести $\bar{G}$, нормальная реакция $\bar{N}$, сила трения покоя $\bar{F}_0$. При достижении величины силы P до определённого предела начнётся движение тела. При этом величина силы P , необходимая для трогания тела с места, будет больше величины этой силы при движении тела по плоскости. Величина силы трения

F_{TP} движения будет меньше силы трения покоя F_0 . При движении тела величина силы трения F_{TP} будет оставаться постоянной (рис. 17.3).

Учитывая, что явление трения исследована недостаточно и сила трения зависит от многих факторов, силу трения движения определяют по закону Амонтона-Кулона:

$$F_{TP} = f \cdot N. \quad (17.1)$$

Аналогично определяют также предельную силу трения покоя.

$$F_0 = f_0 \cdot N. \quad (17.2)$$

В уравнениях (17.1) и (17.2) обозначены: f – коэффициент трения движения; f_0 – коэффициент трения покоя.

Закон Амонтона-Кулона значительно упрощает расчёт сил трения. Однако большие трудности возникают при выборе из справочников соответствующего конкретным условиям коэффициента трения. Для приближённых расчётов можно использовать значения коэффициента трения скольжения, данные в табл. 17.1.

Рассмотрим поступательную кинематическую пару, образованную ползуном, который перемещается по неподвижной плоскости под действием внешней силы $\bar{P}$ (рис. 17.4).

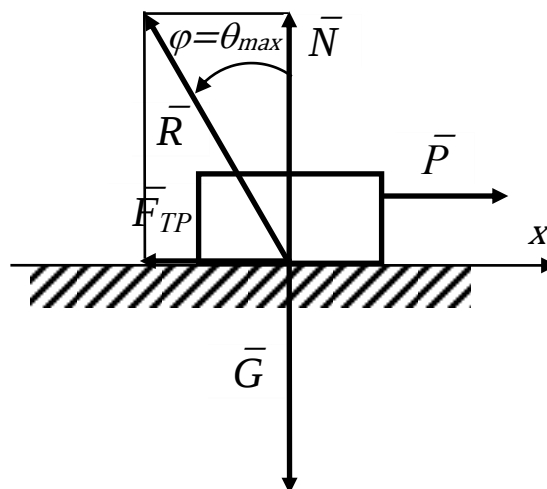


Рис. 17.4. Поступательная кинематическая пара

На ползун действует сила тяжести $\bar{G}$. Нормальная реакция $\bar{N}$, действующая со стороны плоскости на ползун и сила трения $\bar{F}_{TP}$ между плоскостью и ползуном дают суммарную реакцию плоскости $\bar{R}$, т.е.

$$\bar{R} = \bar{F}_{TP} + \bar{N}. \quad (17.3)$$

Сила трения $\bar{F}_{TP}$ в зависимости от силы $\bar{P}$ меняет своё значение от нуля до F_{TPmax} , т.е.

$$0 \leq F_{TP} \leq F_{TPmax}. \quad (17.4)$$

Реакция $\bar{R}$ отклоняется при этом от нормали к поверхностям контакта на угол θ . Угол θ меняет своё значение в зависимости от силы $\bar{P}$ от нуля до θ_{max} , т.е.

$$0 \leq \theta \leq \theta_{max}. \quad (17.5)$$

Угол наибольшего отклонения реакции $\bar{R}$ от нормали к поверхностям контакта называется углом трения φ , т.е.

$$\varphi = \theta_{\max}. \quad (17.6)$$

При скольжении ползуна будет иметь место зависимость

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\text{ТРmax}}}{N} \quad (17.7)$$

или

$$F_{\text{ТРmax}} = \operatorname{tg} \varphi \cdot N. \quad (17.8)$$

Обозначив $\operatorname{tg} \varphi = f$, получим из (17.8):

$$F_{\text{ТРmax}} = f \cdot N, \quad (17.9)$$

где величина f называется коэффициентом трения движения или просто коэффициентом трения.

Таким образом, геометрическая интерпретация коэффициента трения f , выраженная уравнениями (17.7), (17.8) и (17.9), вполне соответствует закону Амонтона-Кулона (17.1).

Рассмотрим тело, находящееся на плоскости (рис. 17.5). На тело действуют силы: $\bar{P}$ – заданная внешняя сила, $\bar{G}$ – сила тяжести, $\bar{R}$ – реакция плоскости.

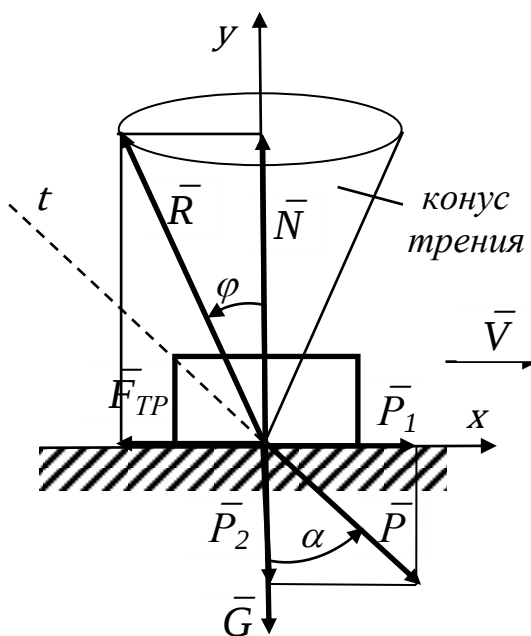


Рис. 17.5. Конус трения

Реакция $\bar{R}$ при движении тела в направлении скорости $\bar{V}$ отклоняется от нормали к поверхностям контакта на угол трения φ . Линия действия реакции $\bar{R}$ при различных направлениях движения тела по плоскости описывает конус, который называется **конусом трения**.

Таким образом, **конус трения – это конус, у которого образующие отклонены от его оси на угол трения.**

Рассмотрим свойства конуса трения.

Разложим силу $\bar{P}$ на две составляющие:

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2, \quad (17.10)$$

где $P_1 = P \cdot \sin \alpha$; $P_2 = P \cdot \cos \alpha$. (17.11)

Составим уравнение равновесия тела в форме суммы проекций сил на вертикальную ось y :

$$N - P_2 - G = 0,$$

откуда

$$N = P \cdot \cos \alpha + G. \quad (17.12)$$

По второму закону Ньютона получим:

$$m \cdot a = P_1 - F_{\text{тр}}, \quad (17.13)$$

где m – масса тела; a – ускорение тела; $F_{\text{тр}}$ – сила трения.

При этом

$$F_{\text{тр}} = N \cdot \operatorname{tg} \varphi. \quad (17.14)$$

Учитывая (17.11), (17.12) и (17.14) получим из уравнения (17.13):

$$m \cdot a = P \cdot \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi) - G \cdot \operatorname{tg} \varphi. \quad (17.15)$$

Обозначим в уравнении (17.15) величину $G \cdot \operatorname{tg} \varphi = F_0$, как силу трения покоя. Получим

$$m \cdot a = P \cdot \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi) - F_0. \quad (17.16)$$

Из уравнения (17.16) следуют свойства конуса трения:

1. Если угол $\alpha > \varphi$, т.е. линия действия t силы $\vec{P}$ лежит вне конуса трения, то тело может двигаться ускоренно, так как ускорение a , при этом может принимать положительные значения ($a > 0$). Для движения тела с ускорением необходимо, чтобы сила трения покоя F_0 была меньше первого слагаемого правой части уравнения (17.16);
2. Если угол $\alpha \leq \varphi$, т.е. линия действия t силы $\vec{P}$ лежит внутри конуса трения или на его поверхности, то ускорение тела будет отрицательным ($a < 0$). Это значит, что будет иметь место самоторможение, при котором движение тела в данном направлении будет невозможным.

Таблица 17.1

**Коэффициенты трения скольжения
между телами различных материалов**

Материалы	Коэффициенты трения	
	Сухие и чистые поверхности	Смазанные и жирные поверхности
Алюминий – алюминий	1,05 – 1,35	0,3
Алюминий – малоуглеродистая сталь	0,61	–
Бронза – сталь	–	0,16
Бронза – чугун	0,22	–
Дерево – чистое сухое дерево	0,25 – 0,5	–
Дерево – влажное дерево	0,2	–
Дерево – чистый сухой металл	0,2 – 0,6	–
Дерево – влажные металлы	0,2	–
Дерево – бетон	0,62	–
Дерево – кирпич	0,6	–
Дерево – влажный снег	0,14	–
Дерево вощенное – сухой снег	0,04	–
Железо – железо	1,0	0,15 – 0,20
Латунь – сталь	0,35	0,19
Латунь – чугун	0,3	–
Кожа – чистый металл	0,6	–
Кожа – дерево	0,3 – 0,4	–
Медь – медь	1	0,08
Медь –чугун	1,05	–
Медь – низкоуглеродистая сталь	0,53	0,18
Плексиглас, оргстекло – плексиглас, оргстекло	0,8	0,8
Плексиглас, оргстекло – сталь	0,4 – 0,5	–
Резина – сухой асфальт	0,5 – 0,8	–
Резина – влажный асфальт	0,25 – 0,75	–
Резина – сухой бетон	0,6 – 0,85	–
Резина – влажный бетон	0,45 – 0,75	–
Сталь – сталь	0,8	0,16
Стекло – стекло	0,9 – 1,0	0,1 – 0,6

Трение на наклонной плоскости

Рассмотрим движение тела вверх по наклонной плоскости (рис. 17.6). На тело действуют силы: $\vec{P}$ – заданная внешняя сила, $\vec{G}$ – сила тяжести, $\vec{R}$ – реакция плоскости.

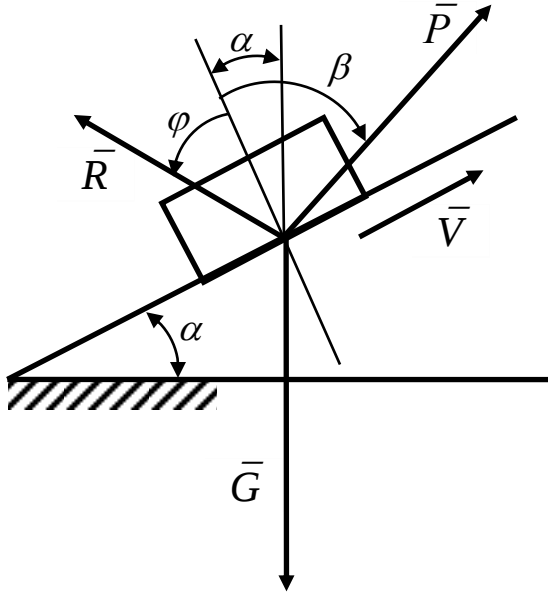


Рис. 17.6. Наклонная плоскость

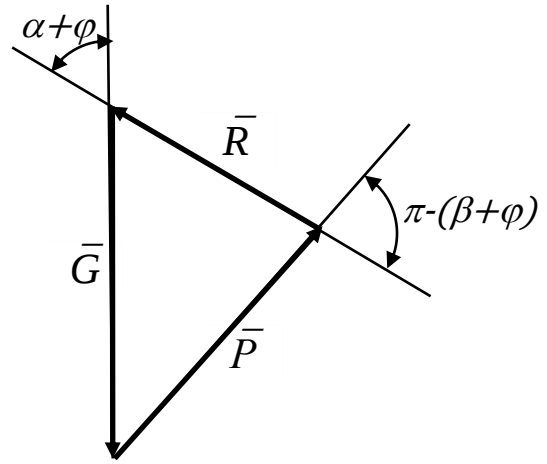


Рис. 17.7. Треугольник сил

Для равномерного движения тела необходимо выполнение условия:

$$\vec{G} + \vec{P} + \vec{R} = 0. \quad (17.17)$$

Используя векторное уравнение (17.17), построим на рис. 17.7 план сил, действующих на тело. Из треугольника сил по теореме синусов следует:

$$\frac{P}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{G}{\sin(\beta + \varphi)}$$

откуда

$$P = G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)}, \quad (17.18)$$

где α – угол наклона плоскости,

φ – угол трения между телом и плоскостью,

β – угол между направлением силы $\vec{P}$ и нормалью к плоскости контакта.

Уравнение (17.18) определяет величину силы $\vec{P}$, необходимую для равномерного движения тела вверх по наклонной плоскости.

Трение в клиновидной кинематической паре

Поступательная пара в механизмах часто выполняется в форме клиновидного ползуна 1 и неподвижной направляющей 2 (рис. 17.8).

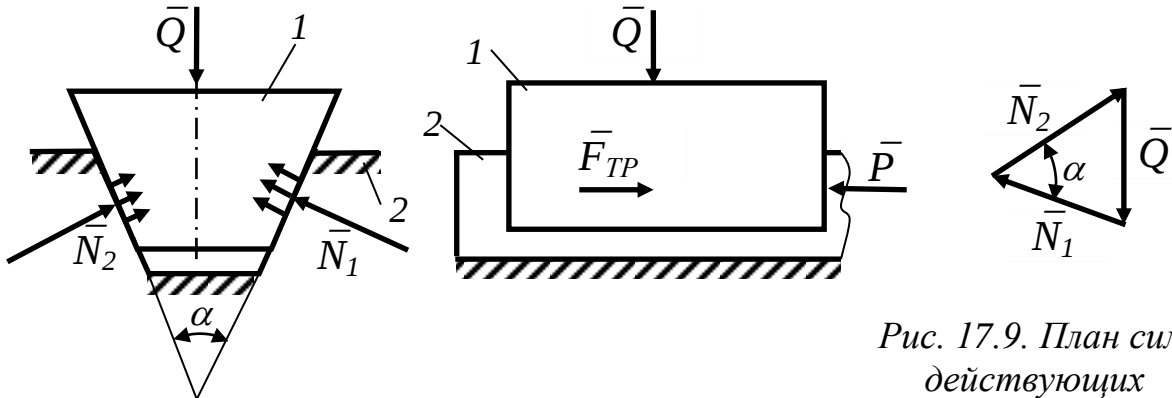


Рис. 17.8. Клиновидная пара

Рис. 17.9. План сил, действующих на клиновидный ползун

При движении ползуна 1 по направляющей 2 на него действует результирующая сила трения $\bar{F}_{TP}$, величина которой определяется соотношением:

$$F_{TP} = F_1 + F_2 \quad (17.19)$$

Так как $F_1 = f \cdot N_1$ и $F_2 = f \cdot N_2$ получим

$$F_{TP} = f(N_1 + N_2), \quad (17.20)$$

откуда

$$N_1 + N_2 = \frac{F_{TP}}{f}, \quad (17.21)$$

где F_1 и F_2 – силы трения между каждой из двух плоскостей контакта ползуна и направляющей;

f – коэффициент трения между ползуном и направляющей;

N_1 и N_2 – нормальные составляющие реакций между плоскостями контакта ползуна и направляющей.

Условие равновесия ползуна, на который действует нагрузка $\bar{Q}$, выражается векторным уравнением

$$\bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{Q} = 0. \quad (17.22)$$

Используя это уравнение, построим на рис. 17.9 план сил, действующих на ползун.

Из треугольника сил на рис. 17.9 следует

$$(N_1 + N_2) \sin \frac{\alpha}{2} = Q, \quad (17.23)$$

откуда

$$(N_1 + N_2) = \frac{Q}{\sin(\alpha/2)}. \quad (17.24)$$

Подставляя выражение (17.21) в уравнение (17.24), получим

$$\frac{F_{TP}}{f} = \frac{Q}{\sin(\alpha/2)} \quad (17.25)$$

или

$$F_{TP} = \frac{f}{\sin(\alpha/2)} Q. \quad (17.26)$$

Для равномерного движения клиновидного ползуна необходимо выполнение условия

$$P = F_{TP}. \quad (17.27)$$

С учётом (17.27) получим из (17.26):

$$P = \frac{f}{\sin(\alpha/2)} Q. \quad (17.28)$$

$$\text{Обозначив в (17.28) } f_{\Pi P} = \frac{f}{\sin(\alpha/2)}, \quad (17.29)$$

получим

$$P = f_{\Pi P} \cdot Q, \quad (17.30)$$

где $f_{\Pi P}$ – приведённый коэффициент трения клиновидной кинематической пары.

Из уравнения (17.29) следует, что приведённый коэффициент трения $f_{\Pi P}$ клиновидной кинематической пары больше коэффициента трения f поступательной пары с одной плоскостью контакта и зависит от величины угла α . Поэтому величина силы P , необходимая для движения ползуна в клиновидной кинематической паре, будет больше, чем в паре с одной плоскостью контакта. Это свойство клиновидной пары используется в конструкции пары, образованной задней бабкой и направляющей станины токарного станка, а также – в клиновидной ремённой передаче.

Трение во вращательной кинематической паре

Во вращательной кинематической паре, образованной звеньями 1 и 2 (рис. 17.10), элементом соприкосновения звеньев является цилиндрическая поверхность.

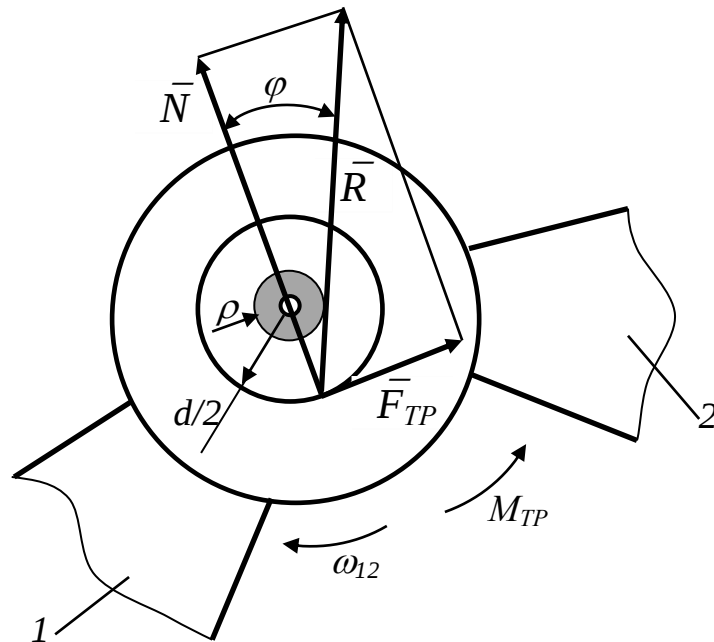


Рис. 17.10. Вращательная кинематическая пара

Реакция $\bar{N}$ между звеньями без учёта сил трения проходит через центр кривизны соприкасающихся поверхностей, т.е. центр шарнира пары. При относительном движении звеньев 1 и 2 между ними возникает сила трения $\bar{F}_{TP}$. Результирующую реакцию сил $\bar{N}$ и $\bar{F}_{TP}$ обозначим через $\bar{R}$. Реакция $\bar{R}$ при движении отклоняется от нормали к поверхностям соприкосновения на угол трения φ и проходит касательно к кругу трения радиуса ρ .

Момент M_{TP} силы трения относительно центра шарнира направлен против относительной угловой скорости ω_{12} вращения звеньев и определяется по величине соотношением:

$$M_{TP} = F_{TP} \frac{d}{2}, \quad (17.31)$$

где d – диаметр оси вращательной пары.

Учитывая, что

$$F_{TP} = N \cdot \operatorname{tg} \varphi = N \cdot f,$$

получим:

$$M_{TP} = N \cdot f \frac{d}{2}, \quad (17.32)$$

где f – коэффициент трения между звеньями пары.

Трение качения

Сопротивление, оказываемое телом при чистом качении без скольжения, получило название трения качения. Природа трения качения иная, чем природа трения при скольжении. Сопротивление, появляющееся при качении тел друг по другу, определяется, главным образом, внутренним трением материала.

При перекачивании тела по поверхности другого тела происходит взаимная упругая деформация соприкасающихся тел.

Сопротивление при качении зависит: от прижимающей силы; модулей упругости материалов перекачиваемых тел; радиусов кривизны элементов соприкосновения; коэффициентов трения материалов; относительной угловой скорости тел.

Ввиду недостаточности исследования явления трения качения и сложности картины распределения давлений, сопротивление при качении определяется экспериментально. Принято считать, что при качении катка по плоскости (рис. 17.11), возникает впереди бегущая волна материалов, в результате чего реакция $\bar{N}$ смещается от центра катка на расстояние k .

Во многих случаях по причине конструктивной целесообразности движущую силу $\bar{P}$ прикладывают в центре катка. Тогда момент силы $\bar{P}$ относительно точки C , лежащей на поверхности катка, определяется выражением:

$$M_{ДВ} = P \cdot r, \quad (17.33)$$

где r – радиус катка.

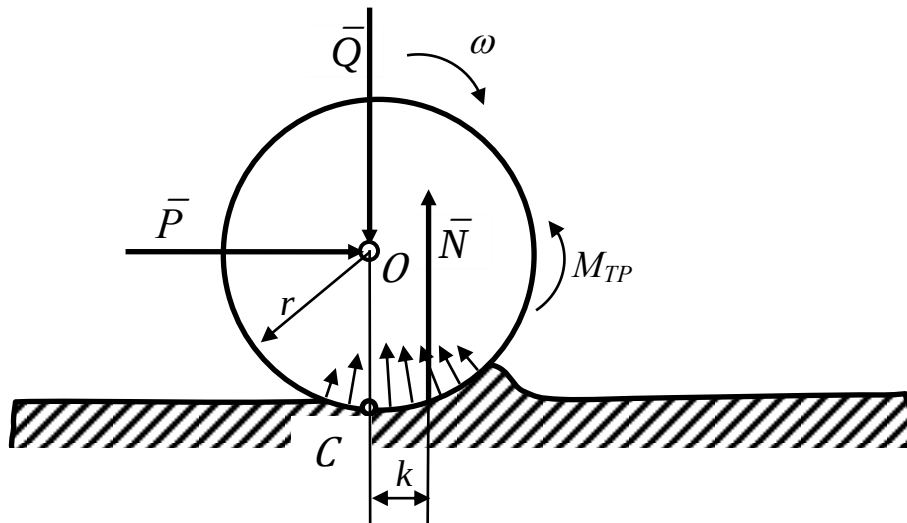


Рис. 17.11. Каток на плоскости

Момент реакции $\bar{N}$ относительно центра O катка определяется формулой

$$M_{TP} = N \cdot k. \quad (17.34)$$

Расстояние k , на которое происходит смещение реакции $\bar{N}$ от центра катка, называется коэффициентом трения качения. Коэффициент трения качения имеет размерность длины (мм).

Из условий равновесия катка $M_{ДВ} = M_{TP}$ и $N = Q$ с учётом (17.33) и (17.34), получим:

$$P \cdot r = Q \cdot k,$$

откуда

$$P = Q \frac{k}{r}. \quad (17.35)$$

Из формулы (17.35) видно, что с уменьшением радиуса катка сила, необходимая для его перекатывания, увеличивается.

В табл. 17.2 представлены величины некоторых коэффициентов трения качения для разных материалов тел.

**Коэффициенты трения качения
между телами различных материалов**

Материалы катка	Материалы подстилающей поверхности	Коэффициенты трения качения в мм
Мягкое дерево	Мягкое дерево	1,5
Мягкое дерево	Сталь	0,8
Твёрдое дерево	Твёрдое дерево	0,8
Эбонит	Бетон	10 – 20
Эбонит	Сталь	7,7
Резина	Бетон	15 – 35
Закалённая сталь	Закалённая сталь	0,01
Полимер	Сталь	2
Сталь	Асфальт	6
Сталь	Тротуарная плитка	1,5
Сталь	Сталь	0,5
Железо	Мягкое дерево	5,6
Железо	Гранит	2,1
Железо	Железо	0,51
Чугунное литьё	Чугунное литьё	0,8

Примеры технических расчётов с учётом трения

Пример 1. Определить величину силы $\bar{P}$ необходимую для равномерного движения платформы на катках по горизонтальной поверхности (рис. 17.12). Заданы: Q – нагрузка, действующая на платформу; D – диаметр катков; k_1 – коэффициент трения качения между платформой и катком; k_2 – коэффициент трения качения между катком и горизонтальной поверхностью. Силой тяжести катков допускается пренебречь.

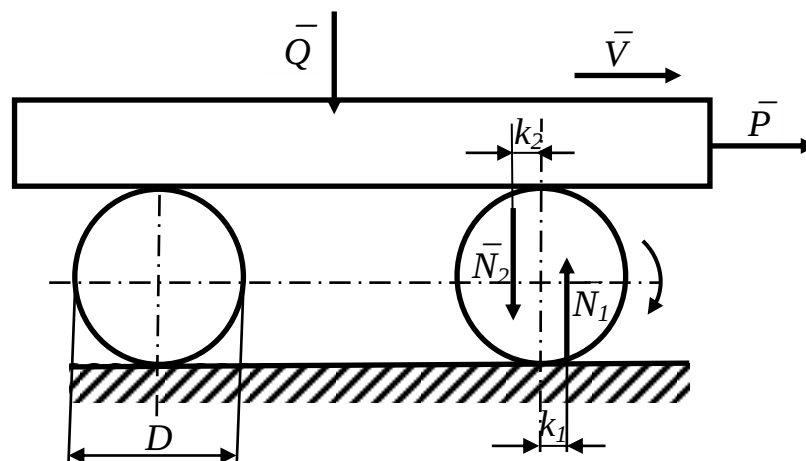


Рис. 17.12. Платформа на катках

Для равномерного движения платформы по каткам необходимо выполнение условия:

$$N_{ДВ} = N_{СОПР} ,$$

где $N_{ДВ}$ – мощность движущих сил;

$N_{СОПР}$ – мощность сил сопротивления.

Сила P является движущей. В качестве сил сопротивления выступают силы трения качения между платформой и катками и между катками и горизонтальной поверхностью.

Мощность силы P при перемещении платформы с постоянной скоростью V определяется соотношением:

$$N_{ДВ} = P \cdot V.$$

Скорость движения платформы определяется формулой:

$$V = D \cdot \omega ,$$

где ω – угловая скорость катка при движении платформы.

Мощность сил сопротивления при этом определяется выражением:

$$N_{СОПР} = M_K \cdot \omega ,$$

где M_K – общий момент сил трения качения между платформой и катками и между катками и горизонтальной поверхностью,

Тогда получим:

$$P \cdot D \cdot \omega = M_K \cdot \omega$$

или

$$P = \frac{M_K}{D} .$$

Момент M_i трения качения для одного катка складывается из моментов M_1 и M_2 т.е.

$$M_i = M_1 + M_2 ,$$

где M_1 – момент трения качения между катками и горизонтальной поверхностью,

M_2 – момент трения качения между платформой и катками.

На каток действуют нормальные реакции N_1 со стороны горизонтальной поверхности и N_2 – со стороны платформы.

Моменты M_1 и M_2 определяются соотношениями:

$$M_1 = N_1 \cdot k_1, \quad M_2 = N_2 \cdot k_2 .$$

Учитывая, что без учёта сил тяжести катков $N_1 = N_2 = Q_i$, получим

$$M_i = Q_i(k_1 + k_2),$$

где Q_i – часть нагрузки, приходящаяся на один каток.

При этом $\sum_1^n Q_i = Q$, где n в свою очередь – число катков.

Учитывая, что общий момент трения качения для всех катков равен сумме моментов трения качения в каждом катке, получим:

$$M_K = \sum_1^n Q_i (k_1 + k_2) = Q(k_1 + k_2).$$

После подстановки получим

$$P = Q \frac{k_1 + k_2}{D}.$$

Из этого уравнения следует, что величина силы P , необходимая для равномерного движения платформы, не зависит от числа катков.

Пример 2. Определить величину силы $\bar{P}$ необходимую для равномерного движения платформы на колёсах по горизонтальной поверхности (рис. 17.13). Заданы: Q – нагрузка, действующая на платформу; D – диаметр колёс; d – диаметр осей колёс; f – коэффициент трения скольжения между опорой платформы и осью колеса; k – коэффициент трения качения между колесом и горизонтальной поверхностью. Силой тяжести колёс допускается пренебречь.

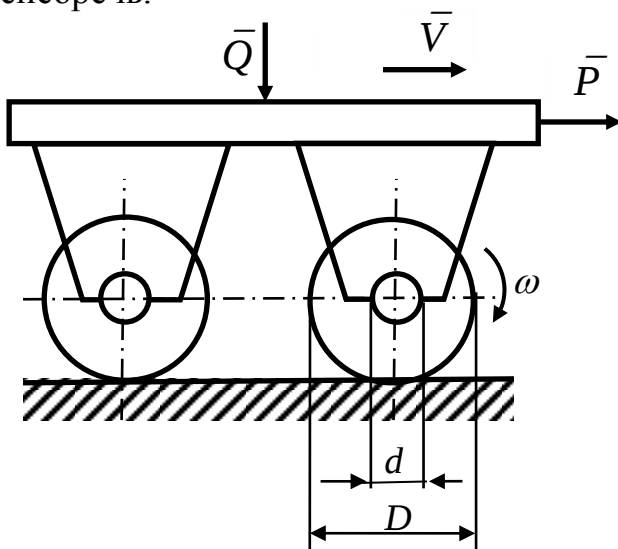


Рис. 17.13. Платформа на колёсах

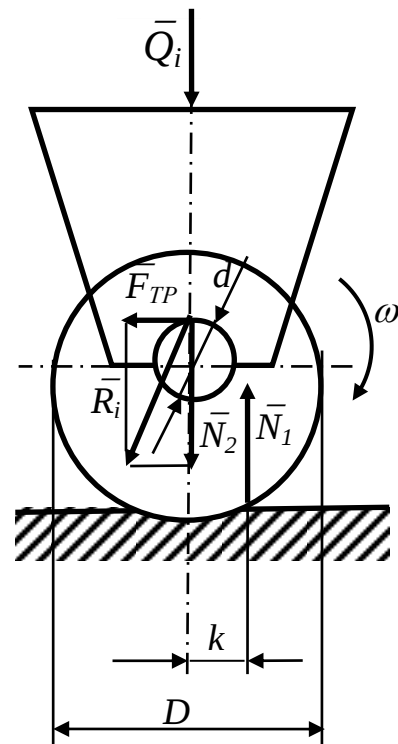


Рис. 17.14. Силы трения, действующие на колесо

Для равномерного движения платформы по каткам необходимо выполнение условия:

$$N_{ДВ} = N_{сопр},$$

где $N_{ДВ}$ – мощность движущих сил;

$N_{сопр}$ – мощность сил сопротивления.

Сила P является движущей. В качестве сил сопротивления выступают силы трения скольжения между опорами платформы и осями колёс, а также силы трения качения между колёсами и горизонтальной поверхностью.

Мощность силы P при перемещении платформы с постоянной скоростью V определяется соотношением:

$$N_{ДВ} = P \cdot V.$$

Скорость движения центра оси колеса равна скорости движения платформы и выражается формулой:

$$V = \omega \frac{D}{2},$$

где ω – угловая скорость колеса при движении платформы.

Мощность сил сопротивления определяется выражением:

$$N_{\text{сопр}} = M_{\text{тр}} \cdot \omega,$$

где $M_{\text{тр}}$ – суммарный момент сил трения, действующих на колёса в местах их контакта с платформой и поверхностью качения.

Рассмотрим силы трения, действующие на отдельное колесо (рис. 17.14). При качении колеса по горизонтальной поверхности возникает момент трения качения

$$M_1 = N_1 \cdot k,$$

где N_1 – реакция между колесом и поверхностью качения.

Между опорой платформы и осью колеса возникает сила трения $F_{\text{тр}}$, момент которой относительно оси определяется соотношением

$$M_2 = F_{\text{тр}} \frac{d}{2}.$$

Учитывая, что

$$F_{\text{тр}} = f \cdot N_2,$$

получим

$$M_2 = f \cdot N_2 \frac{d}{2},$$

где N_2 – нормальная реакция между опорой платформы и осью колеса.

Без учёта сил тяжести колеса $N_1 = N_2 = Q_i$. Тогда получим

$$M_1 = Q_i \cdot k \text{ и } M_2 = f \cdot Q_i \frac{d}{2},$$

где Q_i – часть нагрузки, приходящаяся на одно колесо. При этом $Q = \sum_1^n Q_i$.

Общий момент сил трения для одного колеса выражается соотношением:

$$M_i = M_1 + M_2$$

или

$$M_i = Q_i \left(k + f \frac{d}{2} \right).$$

Суммарный момент сил трения для всех колёс платформы:

$$M_{\text{тр}} = \sum_1^n M_i = Q \left(k + f \frac{d}{2} \right),$$

где n – число колёс.

Мощность сил сопротивления

$$N_{\text{сопр}} = Q \left(k + f \frac{d}{2} \right) \cdot \omega.$$

После подстановки получим величину силы P , необходимую для равномерного движения платформы на колёсах:

$$P = Q \left(\frac{2k}{D} + f \frac{d}{D} \right).$$

Из этой формулы следует, что число колёс не влияет на величину силы P . С увеличением диаметра D колёс и уменьшением диаметра d осей колёс величина силы P будет уменьшаться.

Пример 3. На вращающийся маховик (рис 17. 15) действует рычаг, к которому приложена сила. Определить число n оборотов маховика до полной его остановки. Дано: P – сила, действующая на рычаг; ω_0 – начальная угловая скорость маховика; D – диаметр маховика; J – центральный момент инерции маховика; l_{AC} – расстояние от центра A вращения рычага до точки C приложения силы P ; l_{AB} – расстояние от центра вращения рычага до точки B контакта рычага и маховика; f – коэффициент трения между рычагом и маховиком.

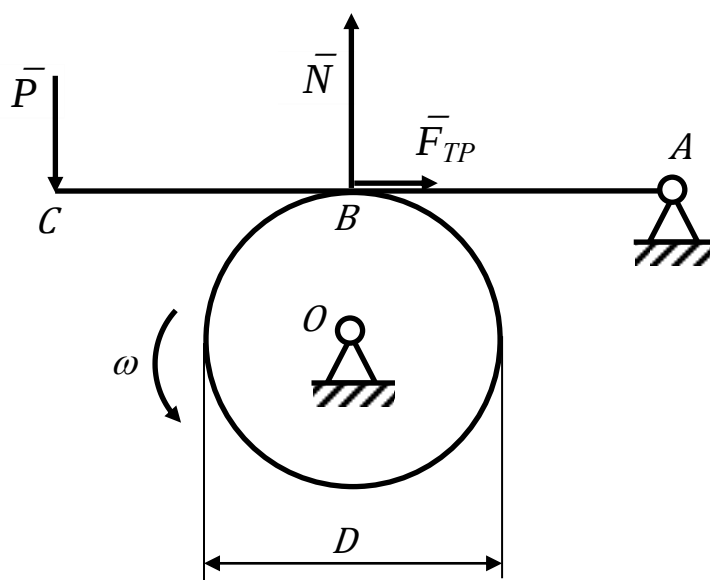


Рис. 17.15. Рычаг, действующий на маховик

Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = A_D - A_C,$$

где T – кинетическая энергия системы в рассматриваемый момент времени;

T_0 – кинетическая энергия системы в начальный момент;

A_D – работа движущих сил на данном перемещении системы;

A_C – работа сил сопротивления на данном перемещении.

В момент остановки маховика $T = 0$ и $A_D = 0$. В начальный момент

$$T_0 = J \frac{\omega_0^2}{2} \text{ и } A_C = M_{TP} \cdot \varphi,$$

где M_{TP} – момент силы трения F_{TP} между маховиком и рычагом;

φ – угол поворота маховика с начала торможения до его остановки.

Учитывая, что $F_{TP} = f \cdot N$ и $M_{TP} = F_{TP} \frac{D}{2} = f \cdot N \frac{D}{2}$, получим:

$$J \frac{\omega_0^2}{2} = f \cdot N \frac{D}{2} \varphi,$$

где N – нормальная реакция в точке контакта между рычагом и маховиком.

Величина нормальной реакции N определяется из условия равновесия рычага:

$$P \cdot l_{AC} = N \cdot l_{AC} ,$$

откуда

$$N = P \frac{l_{AC}}{l_{AB}} .$$

После подстановки получим в радианной мере величину угла φ поворота маховика до полной его остановки.

$$\varphi = \frac{J \cdot \omega_0^2}{f \cdot P \cdot D} \frac{l_{AB}}{l_{AC}} .$$

Число оборотов маховика при этом определяется формулой

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} .$$

Таким образом, получим

$$n = \frac{J \cdot \omega_0^2}{2\pi \cdot f \cdot P \cdot D} \frac{l_{AB}}{l_{AC}} .$$

Из этой формулы следует, что с увеличением диаметра D маховика при прочих равных условиях, число n его оборотов до остановки будет уменьшаться.

ЛЕКЦИЯ 18

Коэффициент полезного действия механизмов. Основные определения

Цель применения машины – выполнение определённых технологических операций. Энергия, подводимая к машине, расходуется на преодоление сил полезного сопротивления, а также на преодоление сил вредного сопротивления. В качестве сил полезного сопротивления в машине выступают, силы на преодоление технологического сопротивления, на подъём груза и др. Силы вредного сопротивления – это силы трения, силы гидравлического и аэродинамического сопротивления и др.

Наиболее распространённым критерием энергетической оценки машины является коэффициент полезного действия (к. п. д.).

Существуют различные к. п. д. машин: тепловые, гидравлические и др. В курсе теории механизмов и машин рассматривается *механический к. п. д.*, который является важным экономическим параметром машины.

Механическим коэффициентом полезного действия называется отношение работы сил полезного сопротивления к работе движущих сил за время цикла т.е.

$$\eta = \frac{A_{\text{ПС}}}{A_{\text{Д}}} . \quad (18.1)$$

Движение машины при этом рассматривается только в установившемся режиме, для которого выполняется соотношение:

$$A_{\text{Д}} = A_{\text{С}}, \quad (18.2)$$

где $A_{\text{Д}}$ – работа движущих сил за время цикла,

$A_{\text{С}}$ – работа сил сопротивления за то же время.

Как видно из (18.1), к. п. д. показывает, какая доля механической энергии подведённой к машине полезно расходуется на совершение той работы, для которой создана машина (например, на выполнение технологической обработки изделий, на производство электроэнергии, на подъём груза и т.д.)

Работа $A_{\text{С}}$ сил сопротивления состоит из работы $A_{\text{ПС}}$ сил полезного сопротивления и работы $A_{\text{ВС}}$ сил вредного сопротивления. Тогда из уравнения (18.2) следует

$$A_{\text{Д}} = A_{\text{ПС}} + A_{\text{ВС}}. \quad (18.3)$$

Поделив левую и правую части (18.3) на $A_{\text{Д}}$, получим

$$1 = \frac{A_{\text{ПС}}}{A_{\text{Д}}} + \frac{A_{\text{ВС}}}{A_{\text{Д}}}$$

или

$$\eta = 1 - k_{\varphi}. \quad (18.4)$$

Величина $k_{\varphi} = \frac{A_{BC}}{A_D}$, входящая в (18.4), называется **коэффициентом потерь**.

Коэффициент потерь характеризует, какая доля механической энергии, подведённая к машине, вследствие наличия различных видов трения превращается, в теплоту и бесполезно теряется, рассеиваясь в окружающем пространстве.

Так как при работе машины потери на трение неизбежны, то всегда $k_{\varphi} > 0$ и $\eta < 1$. При холостом ходе $A_D = A_{BC}$, $\eta = 0$, $k_{\varphi} = 1$. В реально работающих механизмах выполняется условие: $1 > \eta > 0$.

Возможно, что в результате расчёта по предельным значениям сил трения величина A_{BC} будет больше чем A_D . Тогда получим $k_{\varphi} > 1$ и $\eta < 0$. Механизмы, соответствующие этим условиям называются **самотормозящимися**. Для механизма, находящегося в состоянии самоторможения, к.п.д. теряет физический смысл, так как механизм при этом неподвижен. В таких механизмах никакая движущая сила, приложенная к входному звену, не может вызвать его движение в заданном направлении. Самотормозящиеся механизмы часто используются в практике, например, в подъёмных устройствах для удержания висящего груза в поднятом положении без тормоза, в зажимных и фиксирующих устройствах и др.

Разделив числитель и знаменатель уравнения (18.1) на время цикла t , получим формулу, которая часто применяется в технических расчётах:

$$\eta = \frac{N_{ПС}}{N_D}, \quad (18.5)$$

где $N_{ПС}$ и N_D – мощности сил полезного сопротивления и движущих сил, соответственно.

Обычно к. п. д. отдельных механизмов определяются экспериментально и указываются в справочниках.

С точки зрения оценки различных машин с помощью величины их к. п. д. не подлежат сравнению машины различного назначения, например паровая машина и токарный станок. Сравнительную оценку машинам можно дать только в том случае, если по к.п.д. сравниваются однородные машины, выполняющие одинаковые или близкие функции. Для многих машин дать их оценку по величине к. п. д. является бессмысленным. О качестве таких машин можно судить по абсолютному значению затраченной работы или мощности. Таким образом, определяя к. п. д. машины, всегда нужно иметь в виду её назначение, а также характер её работы.

Последовательное соединение механизмов

Рассмотрим машинный агрегат, состоящий из механизмов M_1 , M_2 и M_3 , которые соединяются между собой последовательно (рис. 18.1). К механизму M_1 подведена мощность движущих сил N_D . При работе агрегата происходит потеря мощности N_D за счёт сил трения и других сил вредного сопротивления

в каждом из механизмов. Обозначим через N_1 и N_2 мощности на выходе механизмов M_1 и M_2 . Мощности N_1 и N_2 являются одновременно мощностями движущих сил для механизмов M_2 и M_3 . После потерь мощности движущих сил в каждом механизме получим мощность $N_{ПС}$ на выходе механизма M_3 . Мощность $N_{ПС}$ предназначена на преодоление сил полезного сопротивления машинного агрегата.

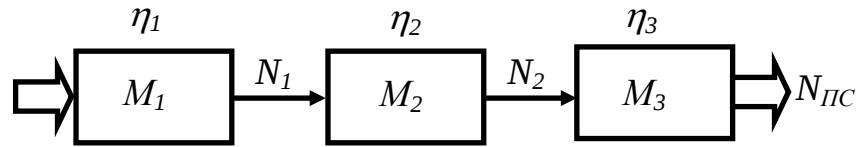


Рис. 18.1. Последовательное соединение механизмов

Обозначим к. п. д. механизмов M_1 , M_2 и M_3 через η_1 , η_2 и η_3 , соответственно. Используя уравнение (18.5), можно записать:

$$N_1 = N_д \cdot \eta_1, \quad N_2 = N_1 \cdot \eta_2, \quad N_{ПС} = N_2 \cdot \eta_3. \quad (18.6)$$

После подстановки получим из (18.6):

$$N_{ПС} = N_д \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3$$

или

$$N_{ПС} / N_д = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3$$

Учитывая, что $N_{ПС} / N_д = \eta$, получим:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3. \quad (18.7)$$

Таким образом, **общий к. п. д. агрегата, состоящего из последовательно соединённых механизмов, равен произведению к. п. д. отдельных механизмов, входящих в состав агрегата.**

Каждый из частных к. п. д. агрегата меньше единицы, поэтому общий к.п.д. всего агрегата при последовательном соединении механизмов меньше самого малого к.п.д. механизма из всех, входящих в состав агрегата.

Параллельное соединение механизмов

Схема машинного агрегата, состоящего из механизмов M_1 , M_2 и M_3 , которые соединяются между собой параллельно, изображена на (рис. 18.2). К. п. д. механизмов M_1 , M_2 и M_3 обозначены через η_1 , η_2 и η_3 , соответственно.

Мощность $N_д$ движущих сил, подведённая к агрегату, распределяется в определённых частях $N_{д1}$, $N_{д2}$ и $N_{д3}$ между механизмами M_1 , M_2 и M_3 , т.е.

$$N_д = N_{д1} + N_{д2} + N_{д3}. \quad (18.9)$$

При этом

$$N_{д1} = a_1 N_д, \quad N_{д2} = a_2 N_д, \quad N_{д3} = a_3 N_д, \quad (18.10)$$

где a_1 , a_2 , a_3 — коэффициенты распределения мощности $N_д$ по механизмам M_1 , M_2 и M_3 .

При работе агрегата в каждом из механизмов происходит потеря мощности движущих сил за счёт сил трения и других сил вредного сопротивления. Обозначим через $N_{ПС1}$, $N_{ПС2}$ и $N_{ПС3}$ мощности на выходе механизмов M_1 , M_2

и M_3 . Общая мощность $N_{ПС}$ сил полезного сопротивления, для преодоления которых предназначен агрегат, равна сумме:

$$N_{ПС} = N_{ПС1} + N_{ПС2} + N_{ПС3} . \quad (18.11)$$

При этом

$$N_{ПС1}=b_1 N_{ПС} , \quad N_{ПС2}=b_2 N_{ПС} , \quad N_{ПС3}=b_3 N_{ПС} , \quad (18.12)$$

где b_1 , b_2 и b_3 – коэффициенты, представляющие доли мощностей сил полезного сопротивления на выходе механизмов M_1 , M_2 и M_3 от суммарной мощности $N_{ПС}$.

Суммы коэффициентов распределения мощностей определяются соотношениями:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 \quad (18.13)$$

и

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1. \quad (18.14)$$

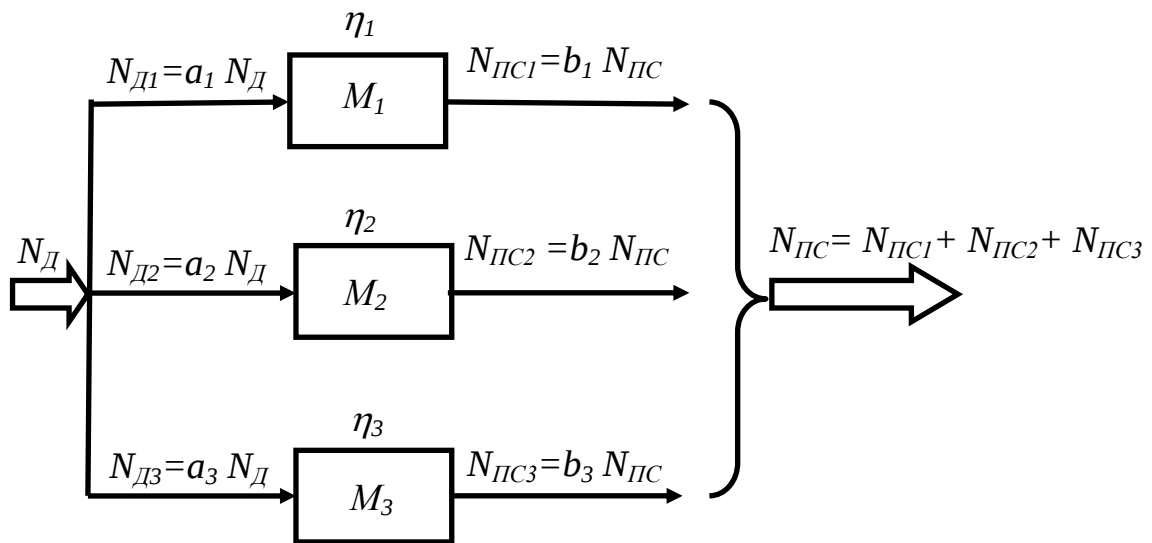


Рис. 18.2. Параллельное соединение механизмов

Для каждого из механизмов в составе агрегата можно записать:

$$\eta_1 = \frac{N_{ПС1}}{N_{Д1}} = \frac{N_{ПС1}}{a_1 N_D}, \eta_2 = \frac{N_{ПС2}}{N_{Д2}} = \frac{N_{ПС2}}{a_2 N_D}, \eta_3 = \frac{N_{ПС3}}{N_{Д3}} = \frac{N_{ПС3}}{a_3 N_D}, \quad (18.15)$$

откуда

$$N_{ПС1} = a_1 \eta_1 N_D, \quad N_{ПС2} = a_2 \eta_2 N_D, \quad N_{ПС3} = a_3 \eta_3 N_D. \quad (18.16)$$

Подставляя (18.16) в (18.11), получим:

$$N_{ПС} = N_D(a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + a_3 \eta_3). \quad (18.17)$$

Общий к. п. д. агрегата с учётом (18.16) выражается формулой

$$\eta = \frac{N_{ПС}}{N_D} = a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + a_3 \eta_3. \quad (18.18)$$

Подставляя в (18.9) выражения

$$N_{Д1} = \frac{N_{ПС1}}{\eta_1} = \frac{b_1 N_{ПС}}{\eta_1}, \quad N_{Д2} = \frac{N_{ПС2}}{\eta_2} = \frac{b_2 N_{ПС}}{\eta_2}, \quad N_{Д3} = \frac{N_{ПС3}}{\eta_3} = \frac{b_3 N_{ПС}}{\eta_3}, \quad (18.19)$$

получим

$$N_D = N_{ПС} \left(\frac{b_1}{\eta_1} + \frac{b_2}{\eta_2} + \frac{b_3}{\eta_3} \right), \quad (18.20)$$

откуда следует

$$\eta = \frac{N_{\text{ПС}}}{N_{\text{Д}}} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{b_1/\eta_1 + b_2/\eta_2 + b_3/\eta_3}. \quad (18.21)$$

Таким образом, из уравнений (18.18) и (18.21) с учётом (18.14) получим формулы для определения общего к. п. д. машинного агрегата при параллельном соединении механизмов:

$$\eta = a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + a_3 \eta_3 \quad (18.22)$$

и

$$\eta = \frac{1}{b_1/\eta_1 + b_2/\eta_2 + b_3/\eta_3}. \quad (18.23)$$

Если в исходных данных заданы коэффициенты распределения a_1 , a_2 и a_3 , то для определения общего к. п. д. машинного агрегата следует использовать уравнение (18.22). Если заданы коэффициенты b_1 , b_2 и b_3 , то для расчёта общего к. п. д. применяется уравнение (18.23).

Смешанное соединение механизмов

В технике часто применяются смешанные соединения, включающие в себя как последовательные, так и параллельные соединения механизмов в составе машинного агрегата. Рассмотрим, например, схему агрегата (рис. 18.3), в котором мощность $N_{\text{Д}}$ движущих сил распределяется на две параллельные между собой ветви. Одна ветвь состоит из последовательно соединённых механизмов M_1 и M_2 . Другая ветвь содержит механизм M_3 .

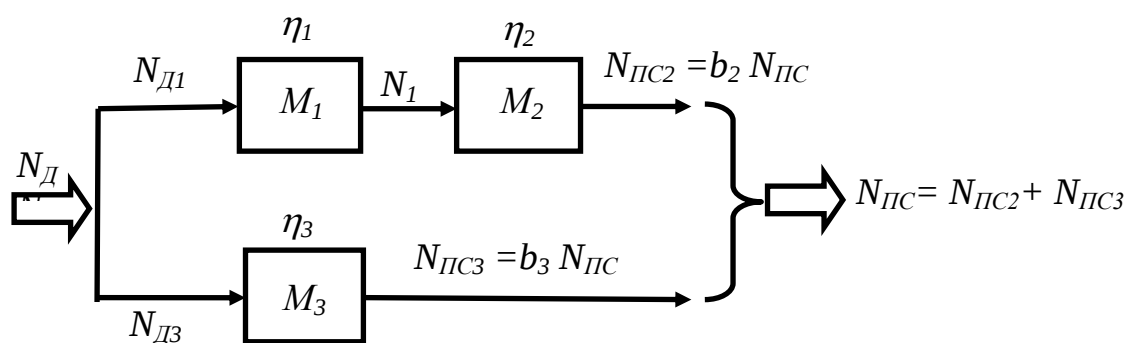


Рис. 18.3. Смешанное соединение механизмов

В соответствии с уравнением (18.23) составим выражение, определяющее общий к. п. д. машинного агрегата:

$$\eta = \frac{1}{b_2/\eta_{12} + b_3/\eta_3} = \frac{1}{b_2/(\eta_1\eta_2) + b_3/\eta_3}, \quad (18.24)$$

где b_2 и b_3 – коэффициенты, представляющие доли мощностей сил полезного сопротивления на выходе механизмов M_2 и M_3 от суммарной мощности $N_{\text{ПС}}$;

η_{12} – коэффициент полезного действия последовательной цепи механизмов M_1 и M_2 .

Примеры определения коэффициентов полезного действия частных механизмов и машинных агрегатов

Пример 1. Винтовая пара. Схема винтовой кинематической пары, образованной винтом 1 и неподвижной гайкой 2 с квадратным профилем резьбы изображена на (рис. 18.4).

Необходимо определить к. п. д. винтовой пары и величину момента M , приложенного к винту для преодоления нагрузки Q .

Исходные данные: d_{CP} – средний диаметр резьбы; h – шаг резьбы; α – угол подъёма винтовой линии резьбы; f – коэффициент трения между винтом и гайкой; Q – внешняя осевая нагрузка.

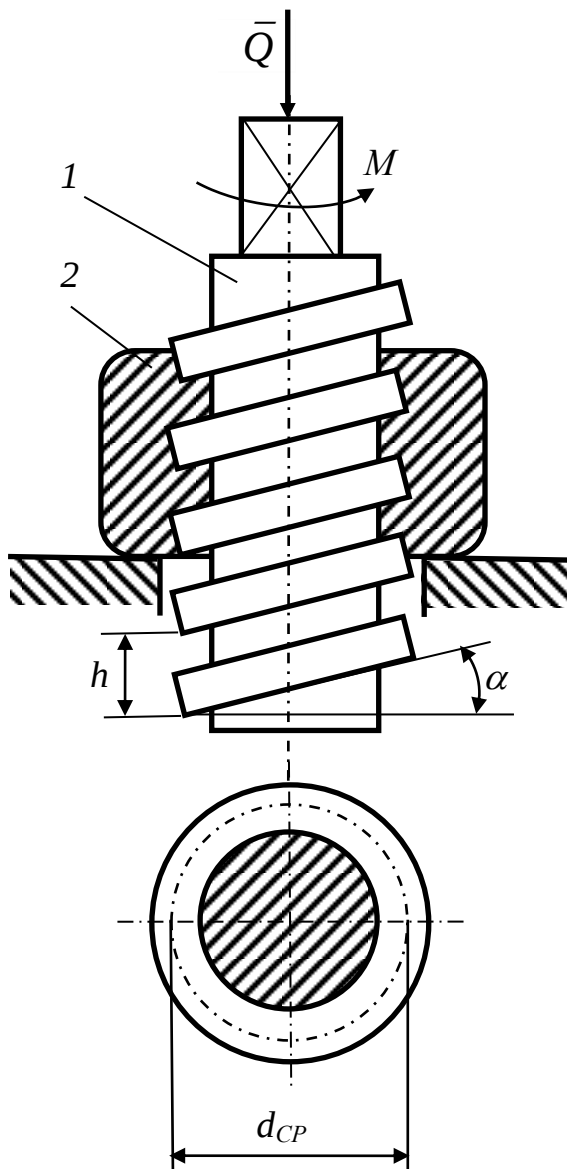


Рис. 18.4. Винтовая пара

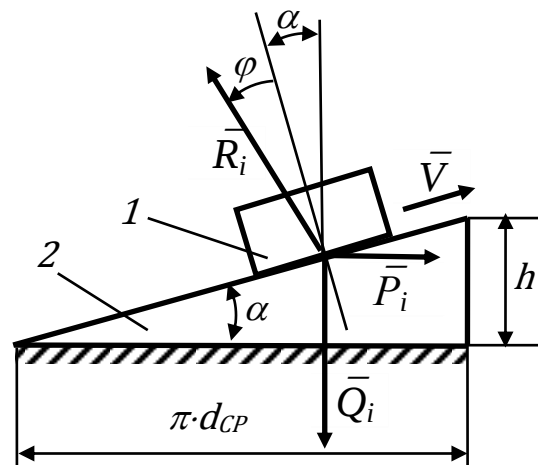


Рис. 18.5. Развёртка витка резьбы винта

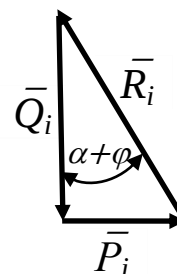


Рис. 18.6. План сил, действующих на элемент винта

На винт действуют: внешняя осевая нагрузка Q , реакция R со стороны гайки и момент M .

На рис. 18. 5 изображена развёртка одного витка резьбы. На элемент винта 1 действуют: элементарная часть $\bar{Q}_i$ внешней нагрузки; элементарная реакция $\bar{R}_i$ со стороны поверхности гайки; элементарная часть $\bar{P}_i$ движущей силы, которая возникает от действия момента M . Для равномерного движения элемента винта вверх по винтовой поверхности гайки необходимо выполнение условия:

$$\bar{Q}_i + \bar{P}_i + \bar{R}_i = 0. \quad (18.25)$$

Используя это векторное уравнение, построим на рис. 18.5 план сил, действующих на элемент винта. Из треугольника сил выразим силу P_i , необходимую для равномерного движения элемента винта:

$$P_i = Q_i \operatorname{tg}(\alpha + \varphi), \quad (18.26)$$

где $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{\pi \cdot d_{CP}}$;

$$\varphi = \operatorname{arctg} f.$$

Момент силы $\bar{P}_i$ относительно оси винта можно выразить соотношением:

$$M_i = P_i \frac{d_{CP}}{2}. \quad (18.27)$$

Учитывая уравнение (18.26), получим:

$$M_i = Q_i \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \frac{d_{CP}}{2}. \quad (18.28)$$

Нагрузка $\bar{Q}$ распределяется равномерно по всей винтовой поверхности, следовательно,

$$Q = \sum Q_i. \quad (18.29)$$

Величина полного момента M , действующего на винт равна сумме элементарных моментов M_i т.е.

$$M = \sum M_i. \quad (18.30)$$

Тогда из (18.30) с учётом (18.28), получим:

$$M = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \frac{d_{CP}}{2}. \quad (18.31)$$

Таким образом, соотношение (18.31) определяет величину момента M , необходимую для преодоления нагрузки $\bar{Q}$, действующей на винт.

При повороте винта с однозаходной резьбой на один оборот работа движущих сил, совершаемых моментом M , определяется соотношением:

$$A_D = M \cdot 2\pi. \quad (18.32)$$

С учётом (18.31), получим

$$A_D = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \frac{d_{CP}}{2} 2\pi. \quad (18.33)$$

За один оборот винт переместится на величину шага h резьбы. Работа сил полезного сопротивления будет при этом следующей:

$$A_{ПС} = Q \cdot h. \quad (18.34)$$

Из рис. 18.5 следует:

$$h = \pi d_{cp} \operatorname{tg} \alpha. \quad (18.35)$$

Тогда

$$A_{\text{ПС}} = Q\pi d_{\text{ср}} \operatorname{tg} \alpha. \quad (18.36)$$

С учётом (18.33) и (18.36) получим:

$$\eta = \frac{A_{\text{ПС}}}{A_{\text{Д}}} = \frac{Q\pi d_{\text{ср}} \operatorname{tg} \alpha}{Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \frac{d_{\text{CP}}}{2} 2\pi}. \quad (18.37)$$

После сокращений в уравнении (18.37) выражение, определяющее коэффициент полезного действия винтовой пары, будет иметь вид:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}. \quad (18.38)$$

Пример 2. Блок с неподвижной осью. Через блок (рис. 18.7) перекинут трос, к одному концу которого крепится груз Q , к другому концу троса приложена сила P .

Без учёта жёсткости троса найти к. п. д. блока и величину силы P для равномерного подъёма груза Q .

Исходные данные: Q – величина груза; D – диаметр блока; d – диаметр оси блока; f – коэффициент трения между осью блока и неподвижной опорой.

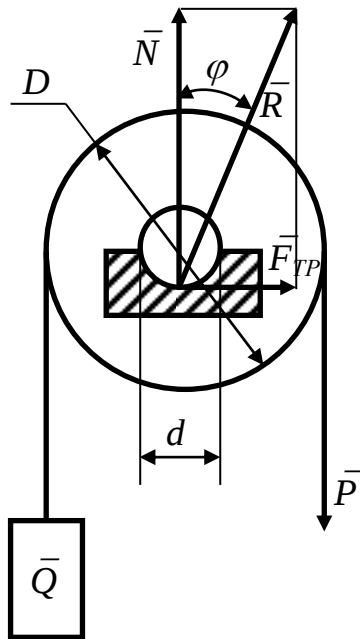


Рис. 18.7. Блок с неподвижной осью

Для равномерного движения груза необходимо выполнение условия

$$A_{\text{Д}} = A_{\text{ПС}} + A_{\text{ВС}},$$

где $A_{\text{Д}}$ – работа движущих сил,

$A_{\text{ПС}}$ – работа сил полезного сопротивления,

$A_{\text{ВС}}$ – работа сил вредного сопротивления.

В качестве движущей силы выступает сила P . Силой полезного сопротивления является сила тяжести груза Q . Силы вредного сопротивления – это силы трения между осью блока и неподвижной Приложив силу P к тросу, переместим груз на некоторое расстояние S . Блок повернётся при этом на угол

$$\alpha = \frac{2S}{D}.$$

Работа силы P при перемещении груза на расстояние S будет следующей;

$$A_D = P \cdot S.$$

Работа силы полезного сопротивления определяется соотношением

$$A_{ПС} = Q \cdot S.$$

Работа сил вредного сопротивления, т.е. сил трения между осью блока и неподвижной опорой выражается формулой

$$A_{BC} = M_{ТР} \cdot \alpha,$$

где $M_{ТР}$ – момент силы трения $F_{ТР}$ относительно центра блока.

Величина момента трения определяется выражением

$$M_{ТР} = F_{ТР} \frac{d}{2},$$

где $F_{ТР} = f \cdot N$.

Нормальная реакция N без учёта силы трения определяется соотношением

$$N = 2Q.$$

Учитывая полученные выражения, можно выразить формулой величину силы P , необходимую для равномерного подъёма груза:

$$P = Q \left(1 + f \frac{2d}{D} \right).$$

К. п. д. блока определяется соотношением

$$\eta = \frac{A_{ПС}}{A_D} = \frac{Q \cdot S}{P \cdot S} = \frac{Q}{P}.$$

Подставляя в эту формулу выражение для силы P , получим к. п. д. блока:

$$\eta = \frac{1}{\left(1 + f \frac{2d}{D} \right)}.$$

Анализируя данную формулу, можно прийти к выводу, что уменьшение диаметра d оси и увеличение диаметра D приведёт к увеличению к. п. д. блока.

Пример 3. Червячная лебёдка. Схема червячной лебёдки изображена на рис. 18.8. Вал электродвигателя жёстко скреплён с червяком. На барабан лебёдки наматывается трос, к концу которого крепится груз Q .

Необходимо определить мощность двигателя для равномерного подъёма груза. Жёсткость троса при этом допускается не учитывать.

Исходные данные: Q – величина силы тяжести груза; n – число оборотов в минуту вала червяка; D – диаметр барабана лебёдки; k – число заходов резьбы на червяке; z – число зубьев на червячном колесе; f – коэффициент трения

между червяком и червячным колесом; α – угол подъёма винтовой линии резьбы на червяке.

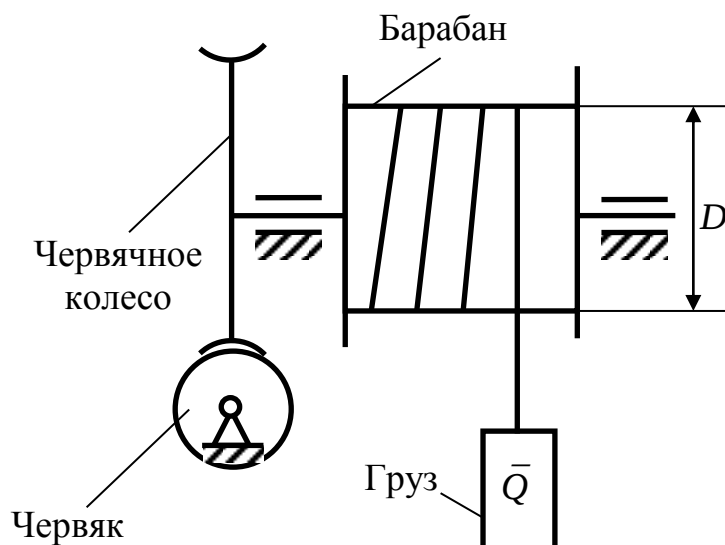


Рис. 18.8. Червячная лебёдка

К. п. д. механизма лебёдки можно выразить формулой:

$$\eta = \frac{N_{\text{ПС}}}{N_{\text{Д}}},$$

откуда

$$N_{\text{Д}} = \frac{N_{\text{ПС}}}{\eta},$$

где $N_{\text{Д}}$ – мощность движущих сил,

$N_{\text{ПС}}$ – мощность сил полезного сопротивления, т. е. сил, необходимых на подъём груза Q .

К. п. д. червячной пары определяется формулой для винтовой пары, т. е.

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)},$$

где φ – угол трения.

Величина угла трения выражается соотношением

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f.$$

Мощность сил полезного сопротивления определяется формулой

$$N_{\text{ПС}} = Q \cdot V_Q,$$

где V_Q – скорость подъёма груза, равная окружной скорости V_B барабана.

Окружная скорость барабана находится из соотношения

$$V_B = \omega_2 \frac{D}{2},$$

где ω_2 – угловая скорость барабана и жёстко связанного с ним червячного колеса.

Передаточное отношение червячной пары

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z}{k}.$$

Отсюда следует

$$\omega_2 = k \frac{\omega_1}{z},$$

где ω_1 и ω_2 – угловые скорости червяка и червячного колеса, соответственно.

При этом $\omega_1 = \frac{\pi n}{30}$ (рад/с).

После подстановки приведённых выражений в формулу для N_d , получим формулу для определения мощности движущих сил червячной лебёдки:

$$N_d = \frac{Q \cdot D \cdot k \cdot \pi \cdot n \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}{60 \cdot z \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

Пример 4. Зубчатая передача. Определить общий к. п. д. зубчатой передачи, схема которой изображена на рис. 18.9. На схеме приняты следующие обозначения: 1, 2, 3, 4, 5, 6 – зубчатые колёса; Π_1 , Π_2 , Π_3 , Π_4 – подшипники. К валу ведущего зубчатого колеса 1 подведены движущие силы мощностью N_d .

Исходные данные: η_{12} , η_{34} , η_{56} – к. п. д. зубчатых зацеплений колёс 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6; $\eta_{\Pi 1}$, $\eta_{\Pi 2}$, $\eta_{\Pi 3}$, $\eta_{\Pi 4}$ – к. п. д. подшипников 1, 2, 3, 4; b_4 и b_6 – коэффициенты распределения мощности сил полезного сопротивления на выходные валы колёс 4 и 6, соответственно.

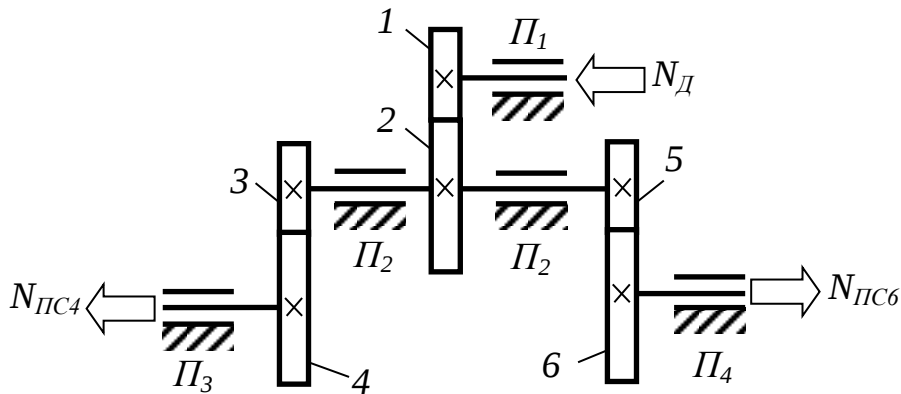


Рис. 18.9. Зубчатая передача

Зубчатая передача представляет собою смешанное соединение отдельных частей.

Первая часть состоит из последовательного соединения подшипника Π_1 , зубчатой пары колёс 1 и 2, двойного подшипника Π_2 . К. п. д. η_1 первой части передачи определяется в соответствии с уравнением (18.7) для последовательного соединения механизмов формулой:

$$\eta_1 = \eta_{\Pi 1} \cdot \eta_{12} \cdot \eta_{\Pi 2}.$$

Вторая часть передачи содержит последовательное соединение зубчатой пары колёс 3, 4 и подшипника Π_3 . К. п. д. η_2 второй части передачи определяется аналогично:

$$\eta_2 = \eta_{\Pi_3} \cdot \eta_{34}.$$

Третья часть передачи состоит из последовательного соединения пары колёс 5, 6 и подшипника Π_4 . К. п. д. η_3 третьей части передачи определяется уравнением:

$$\eta_3 = \eta_{\Pi_4} \cdot \eta_{56}.$$

Вторая и третья часть передачи соединяются между собой параллельно. Поэтому общий к. п. д. η_{23} второй и третьей частей передачи определяется в соответствии с формулой (18.23) выражением:

$$\eta_{23} = \frac{1}{b_4/\eta_2 + b_6/\eta_3}.$$

Тогда для общего к. п. д. передачи можно записать соотношение:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_{23}.$$

Подставив выражения для η_1 , η_2 , η_3 и η_{23} в это уравнение, получим:

$$\eta = \eta_{\Pi_1} \cdot \eta_{12} \cdot \eta_{\Pi_2} \frac{1}{b_4/(\eta_{34} \cdot \eta_{\Pi_3}) + b_6/(\eta_{56} \cdot \eta_{\Pi_4})}.$$

При этом общая мощность сил полезного сопротивления $N_{ПС}$ определяется суммой:

$$N_{ПС} = N_{ПС4} + N_{ПС6},$$

а сумма коэффициентов распределения b_4 и b_6 равна единице, т.е.

$$b_4 + b_6 = 1.$$

ЛЕКЦИЯ 19

Регулирование движения машины. Общие сведения

При установившемся движении машины, как известно, за время одного цикла работа движущих сил равна сумме работ сил сопротивления, т.е.

$$A_D = A_{ПС} + A_{ВС}, \quad (19.1)$$

где A_D – работа движущих сил,

$A_{ПС}$ – работа сил полезного сопротивления,

$A_{ВС}$ – работа сил вредного сопротивления.

При этом среднее значение приведённого момента движущих сил за время цикла равно среднему значению приведённого момента сил сопротивления:

$$M_D = M_C \quad (19.2)$$

Угловая скорость ω начального звена механизма при установившемся движении является периодической функцией, зависящей от угла поворота φ начального звена. На рис. 19.1 представлены графики изменения приведённых моментов движущих сил $M_D(\varphi)$ и сил сопротивления $M_C(\varphi)$ за время одного цикла. График $\omega(\varphi)$ на рис. 19.1 изображает изменение угловой скорости начального звена механизма за время одного цикла, равного времени одного оборота.

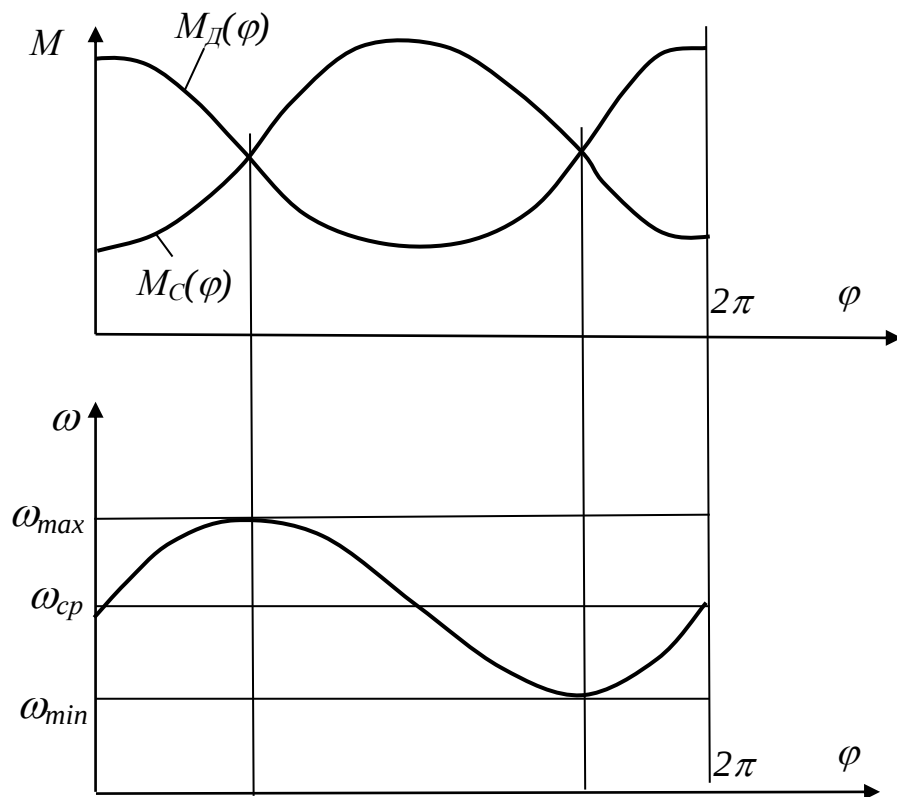


Рис. 19.1. Графики приведённых моментов сил и угловой скорости начального звена

Неравномерность хода машины является следствием двух факторов:

1. Изменяющимися в течении цикла приведённых моментов движущих сил и сил сопротивления, действующих на машину :

2. Периодического изменения приведённого момента инерции механизмов в составе машины.

Неравномерность движения механизма принято оценивать **коэффициентом неравномерности движения** начального звена:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}}, \quad (19.3)$$

где ω_{max} и ω_{min} – максимальное и минимальное значения угловой скорости начального звена в пределах одного цикла установившегося движения;

ω_{cp} – средняя угловая скорость начального звена механизма.

При этом

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \quad (19.4)$$

и

$$\omega_{cp} = \frac{2\pi}{t}, \quad (19.5)$$

где t – время цикла.

Колебания скорости главного вала машины вызывают дополнительные динамические нагрузки, вследствие чего снижается долговечность и надёжность машин. Кроме этого, колебания скорости ухудшают рабочий процесс машины. Следовательно, поскольку колебания скорости полностью устранить нельзя, то нужно по возможности хотя бы сократить их размах.

Для машин, выполняющих различные технологические процессы колебания угловой скорости главного вала допустимы лишь в определённых пределах, установленных практикой. В таблице 19.1 представлены величины коэффициентов неравномерности движения для некоторых машин, применяемых в практике.

Таблица 19.1

Значения коэффициентов неравномерности движения

Машины	Коэффициенты неравномерности
Насосы	1/5...1/30
Сельскохозяйственные машины	1/10...1/50
Металлообрабатывающие станки	1/20...1/50
Ткацкие, полиграфические, мукомольные машины	1/20...1/50
Судовые двигатели	1/20...1/100
Двигатели внутреннего сгорания, компрессоры	1/80...1/150
Электрические генераторы постоянного тока	1/100...1/200
Электрические генераторы переменного тока	1/200...1/300
Авиационные двигатели	1/100 и меньше

В зависимости от назначения, структуры и условий работы механизмов применяются следующие способы регулирования их движения:

1. Регулирование колебаний угловой скорости при периодическом изменении сил полезного сопротивления или движущих сил.

В этом случае задачу регулирования хода машины решают посредством установки маховика с большим моментом инерции. Маховик при этом выполняет роль механического аккумулятора энергии. Необходимая величина момента инерции маховика зависит от задаваемого коэффициента неравномерности δ .

2. Регулирование колебаний угловой скорости при непериодическом (случайном) изменении сил полезного сопротивления или движущих сил.

При внезапном изменении нагрузки и соотношения между движущими силами и силами сопротивления происходит нарушение равенства:

$$A_D = A_C, \quad (19.6)$$

где A_D – работа движущих сил за время цикла ;

A_C – работа сил сопротивления за то же время.

В этом случае для регулирования хода машины применяются центробежные регуляторы, которые уменьшают колебания угловой скорости начального звена механизма путём автоматического приведения в соответствие между собой движущих сил и сил сопротивления, поддерживая, таким образом, заданную величину средней угловой скорости ω_{cp} начального звена.

Определение момента инерции маховика

Существуют различные методы определения момента инерции маховика. Это – методы К. Н. Рериха, Ф. Виттенбауэра, Н.И. Мерцалова, И.И. Артоблевского.

Рассмотрим наиболее простой и наглядный метод, предложенный Н.И. Мерцаловым.

Основой для составления уравнения движения механизма одной степенью свободы служит теорема об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = A, \quad (19.7)$$

где T – кинетическая энергия механизма в рассматриваемый момент;

T_0 – кинетическая энергия механизма в начальный момент;

A – алгебраическая (с учётом знака) сумма работ всех сил, действующих на механизм, на данном перемещении.

Разобьём звенья механизма на две группы. К звеньям первой группы отнесём звенья с постоянным приведённым моментом инерции. Это – начальное звено и другие звенья, связанные с ним постоянным передаточным отношением. К звеньям второй группы отнесём остальные звенья механизма, приведённый момент инерции которых, есть величина переменная.

Тогда кинетическую энергию механизма можно представить в виде двух слагаемых:

$$T = T_I + T_{II}, \quad (19.8)$$

где T_I – кинетическая энергия звеньев первой группы;

T_{II} – кинетическая энергия звеньев второй группы.

Величину T можно выразить из уравнения (19.7):

$$T = T_0 + A. \quad (19.9)$$

Кинетическая энергия звеньев первой группы определяется соотношением:

$$T_I = \frac{1}{2} J_I \omega^2, \quad (19.10)$$

где J_I – приведённый момент инерции звеньев первой группы;

ω – угловая скорость звена приведения (равная угловой скорости начального звена).

Угловая скорость звена приведения при работе машины колеблется внутри цикла между значениями ω_{max} и ω_{min} . Кинетическая энергия звеньев первой группы так же меняет свои значения в интервале от $T_{I_{max}}$ до $T_{I_{min}}$.

При этом

$$T_{I_{max}} = \frac{1}{2} J_I \omega_{max}^2, \quad T_{I_{min}} = \frac{1}{2} J_I \omega_{min}^2. \quad (19.11)$$

Наибольший перепад кинетической энергии звеньев первой группы можно выразить следующим образом:

$$\Delta T_{I_{нб}} = \frac{1}{2} J_I (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2). \quad (19.12)$$

Учитывая уравнения (19.3) и (19.4), получим из (19.12) выражение для J_I :

$$J_I = \frac{\Delta T_{I_{нб}}}{\omega_{ср}^2 \delta}. \quad (19.13)$$

Уравнение (19.13) является расчётным для определения приведённого момента инерции звеньев первой группы, необходимого для обеспечения вращения начального звена механизма с заданной неравномерностью δ . Момент инерции звеньев первой группы включает в себя и момент инерции маховика. Таким образом, уравнение (19.13) является уравнением динамического синтеза механизма при установившемся режиме работы.

Кинетическая энергия звеньев второй группы определяется уравнением

$$T_{II} = \frac{1}{2} J_{II} \omega^2. \quad (19.14)$$

Угловая скорость ω звена приведения вследствие малости коэффициента неравномерности незначительно отличается от средней угловой скорости главного вала машины, т. е. $\omega \approx \omega_{ср}$. Поэтому можно принять

$$T_{II} = \frac{1}{2} J_{II} \omega_{ср}^2. \quad (19.15)$$

Таким образом, метод Н.И. Мерцалова не является, строго говоря, точным, но вследствие малости ошибки вполне пригоден для практических расчётов.

Учитывая изложенное, можно составить порядок определения момента инерции маховика по методу Н.И. Мерцалова графическим способом:

1. Приведение сил и моментов; построение диаграммы суммарного момента $M(\varphi) = M_d(\varphi) - M_c(\varphi)$, где $M_d(\varphi)$ – приведённый момент движущих сил, $M_c(\varphi)$ – приведённый момент сил сопротивления;

2. Построение диаграммы суммарной работы $A(\varphi)$ методом графического интегрирования диаграммы $M(\varphi)$;

3. Приведение масс; определение кинетической энергии звеньев второй группы $T_{II} = \frac{1}{2} J_{II} \omega_{cp}^2$ и построение диаграммы $T_{II}(\varphi)$;

4. Построение диаграммы кинетической энергии звеньев первой группы $T_I(\varphi) = T(\varphi) - T_{II}(\varphi)$ и определение величины ΔT_{IHB} наибольшего перепада кинетической энергии звеньев первой группы. Здесь вместо диаграммы $T(\varphi)$ можно использовать диаграмму $A(\varphi)$.

5. Определение момента инерции звеньев первой группы $J_I = \frac{\Delta T_{IHB}}{\omega_{cp}^2 \delta}$ и нахождение момента инерции маховика $J_M = J_I - J_H$, где J_H – момент инерции начального звена и других звеньев, связанных с ним постоянным передаточным отношением.

Рассмотрим в общем виде применение метода Н.И. Мерцалова для определения момента инерции маховика на примере кривошипно-ползунного механизма двигателя внутреннего сгорания (ДВС). На рис. 19.2 изображена кинематическая схема механизма ДВС и индикаторная диаграмма давления газов на поршень.

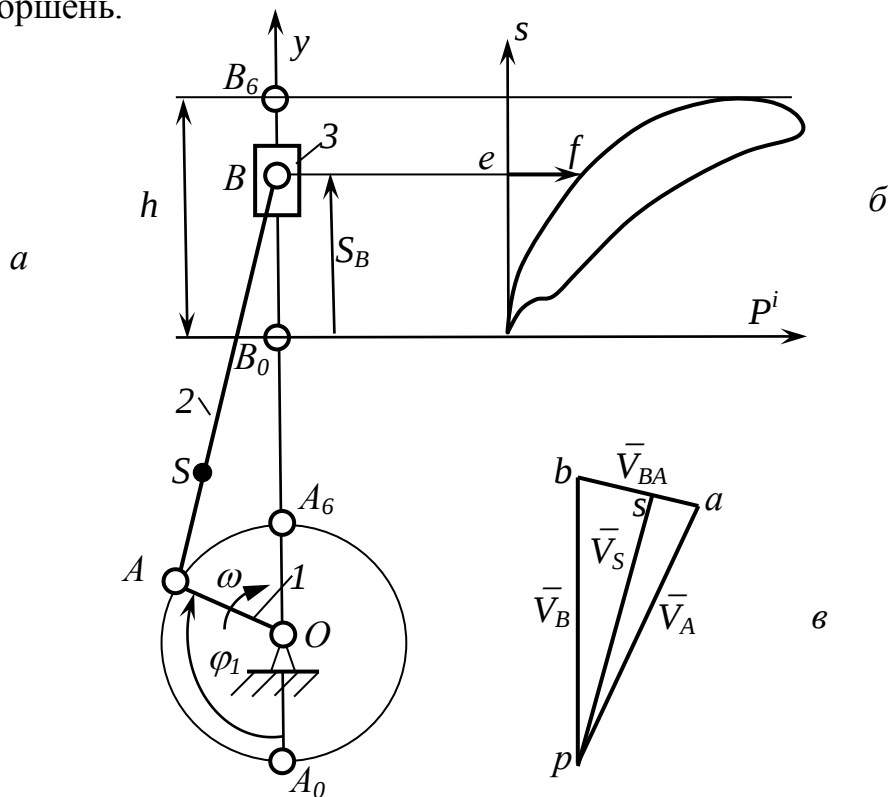


Рис. 19.2. Схема механизма ДВС:

а – планы положений; б – индикаторная диаграмма; в – план скоростей

Исходные данные:

- кинематическая схема механизма (рис. 19.2 а);
- l_{OA}, l_{AB}, l_{AS} – размеры звеньев (S – центр масс шатуна 2);
- ω_1 – средняя угловая скорость кривошипа 1;
- δ – коэффициент неравномерности движения;
- индикаторная диаграмма давления газов в цилиндре (рис. 19.2 б);
- D – диаметр поршня;
- m_2, m_3 – массы звеньев 2 и 3, соответственно;
- J_H – центральный момент инерции начального звена 1;
- J_{S2} – центральный момент инерции звена 2;

Силы сопротивления, действующие на механизм ДВС постоянны.

Последовательность определения момента инерции маховика:

1. Построение в определённом масштабе планов положений механизма для нескольких равноотстоящих положений кривошипа OA . На (рис. 19.2 а) показан только один план положений механизма;

2. Построение в произвольном масштабе плана скоростей для каждого положения механизма. На рис. 19.2 в показан только один план скоростей. Для его построения использовано векторное уравнение $\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$, где $\bar{V}_B$ – вектор скорости точки B (направлен параллельно оси y), $\bar{V}_A$ – вектор скорости точки A (направлен перпендикулярно отрезку OA), $\bar{V}_{BA}$ – вектор скорости точки B при вращении звена 2 вокруг точки A (направлен перпендикулярно отрезку AB плана положений);

3. Построение в определённом масштабе μ_{Pi} индикаторной диаграммы давления газов в цилиндре (рис. 19.2 б). Отрезок ef на диаграмме соответствует давлению газов для положения механизма, изображённого на рис. 19.2 а. В этом положении сила давления газов на поршень определяется формулой

$$P_{\Gamma} = P_i \cdot F_{\Pi}.$$

Индикаторное давление P_i в цилиндре и площадь поршня F_{Π} находятся из соотношений:

$$P_i = ef \cdot \mu_{Pi} \quad \text{и} \quad F_{\Pi} = \pi \frac{D^2}{4};$$

3. Определение приведённого момента движущих сил. Из условия равенства мгновенных мощностей $M_{\text{д}} \cdot \omega = P_{\Gamma} \cdot V_B$ следует:

$$M_{\text{д}} = P_{\Gamma} \frac{V_B}{\omega}.$$

Учитывая, что $\omega = \frac{V_A}{l_{OA}}$, заменим отношение скоростей $\frac{V_B}{\omega}$ отношением отрезков pb и pa на плане скоростей. Получим:

$$M_{\text{д}} = P_{\Gamma} \cdot l_{OA} \frac{V_B}{V_A}$$

или
$$M_{\text{д}} = P_{\Gamma} \cdot l_{OA} \frac{pb}{pa}.$$

Используя это уравнение, построим в определённом масштабе на рис. 19.3 а график $M_{\text{д}}(\varphi)$ приведённого момента движущих сил для ряда положений механизма;

4. Определение приведённого момента сил сопротивления, который по условию является постоянной величиной и равный по величине среднему значению приведённого момента движущих сил, т.е. $M_C = \text{const}$ и $M_C = M_{ДСР}(\varphi)$. На рис. 19.3 *а* график $M_C(\varphi)$ выполнен в виде прямой линии параллельной оси φ . Для построения графика суммарного момента $M(\varphi) = M_D(\varphi) - M_C(\varphi)$ на рис. 19.3 *а* достаточно переместить ось φ на величину $M_{ДСР}$. В системе координатных осей (M, φ') график $M(\varphi)$ совпадает с графиком $M_D(\varphi)$;

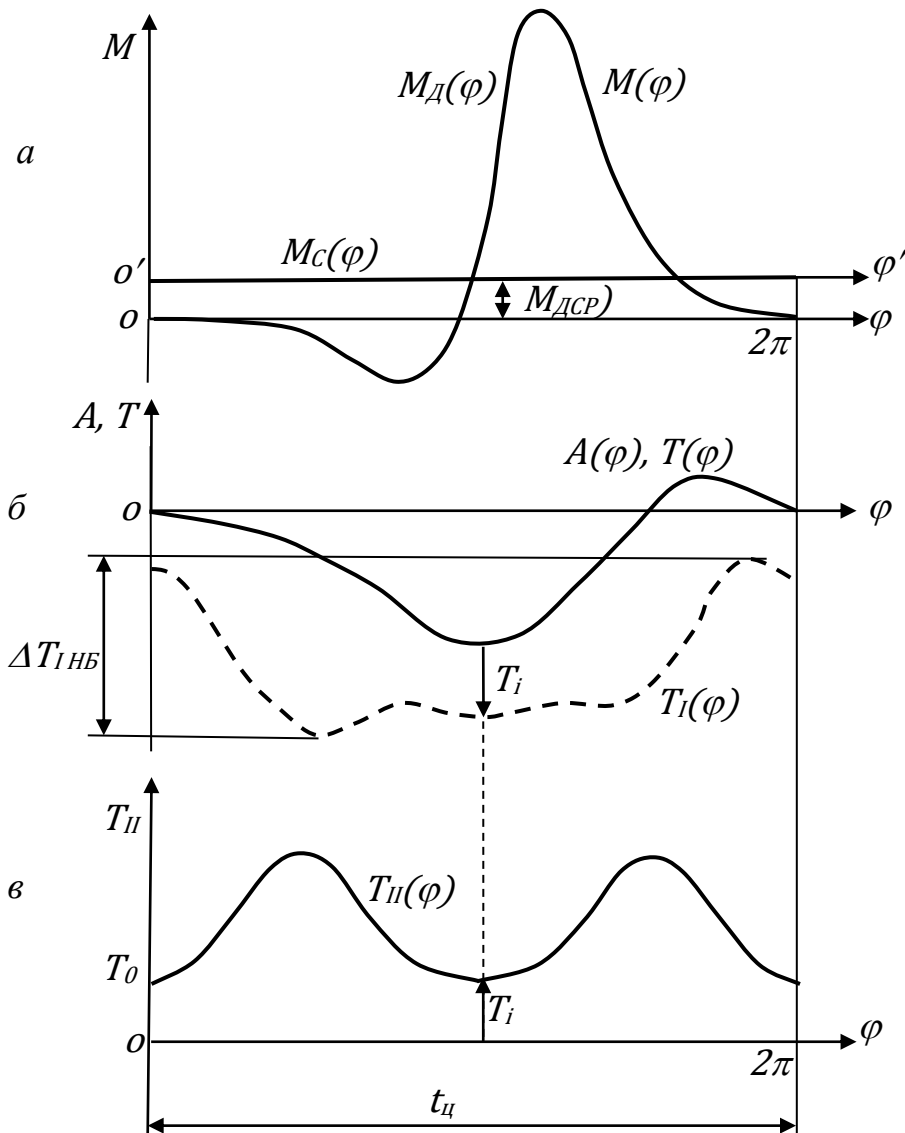


Рис. 19.3. Диаграммы для механизма ДВС:

- а* – приведённые моменты движущих сил и сил сопротивления;
- б* – работа суммарного момента сил и кинетическая энергия механизма;
- в* – кинетическая энергия звеньев второй группы

5. Построение графика суммарной работы $A(\varphi) = \int_0^{2\pi} M d\varphi$ (рис. 19.3 б). График $A(\varphi)$ можно построить методом графического интегрирования графика $M(\varphi)$. В качестве оси абсцисс, при этом, следует принять ось φ' ;

6. График кинетической энергии $T(\varphi)$ механизма имеет такой же вид, как и график работы $A(\varphi)$, так как $T(\varphi) - T_0 = A(\varphi)$, где T_0 – кинетическая энергия механизма в начальный момент ($T_0 = \text{const}$). На рис. 19.3 б график $T(\varphi)$ изображён без указания оси абсцисс.

7. Построение графика кинетической энергии $T_{II}(\varphi)$ звеньев второй группы, т.е. звеньев 2 и 3 механизма. Суммарная кинетическая энергия этих звеньев определяется соотношением:

$$T_{II} = T_2 + T_3,$$

где T_2 – кинетическая энергия шатуна 2,

T_3 – кинетическая энергия ползуна 3.

Шатун 2 совершает сложное плоское движение. Его кинетическая энергия выражается формулой:

$$T_2 = m_2 \frac{V_S^2}{2} + J_{S2} \frac{\omega_2^2}{2},$$

где V_S – скорость точки S шатуна 2,

ω_2 – угловая скорость шатуна 2.

Кинетическая энергия ползуна 3 определяется соотношением:

$$T_3 = m_3 \frac{V_B^2}{2}.$$

Тогда суммарная кинетическая энергия звеньев 2 и 3 определяется выражением:

$$T_{II} = m_2 \frac{V_S^2}{2} + J_{S2} \frac{\omega_2^2}{2} + m_3 \frac{V_B^2}{2}.$$

Так как $T_{II} = J_{II} \frac{\omega_1^2}{2}$, то

$$J_{II} \frac{\omega_1^2}{2} = m_2 \frac{V_S^2}{2} + J_{S2} \frac{\omega_2^2}{2} + m_3 \frac{V_B^2}{2},$$

откуда получим

$$J_{II} = m_2 \frac{V_S^2}{\omega_1^2} + J_{S2} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + m_3 \frac{V_B^2}{\omega_1^2}.$$

Учитывая, что $\omega_1 = \frac{V_A}{l_{OA}}$ и $\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}}$, получим:

$$J_{II} = m_2 \left(\frac{V_S}{V_A} \right)^2 l_{OA}^2 + J_{S2} \left(\frac{V_{BA}}{V_A} \right)^2 \left(\frac{l_{OA}}{l_{AB}} \right)^2 + m_3 \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^2 l_{OA}^2.$$

Заменим в этом выражении отношения скоростей отношениями соответствующих отрезков на плане скоростей:

$$J_{II} = m_2 \left(\frac{ps}{pa} \right)^2 l_{OA}^2 + J_{S2} \left(\frac{ab}{pa} \right)^2 \left(\frac{l_{OA}}{l_{AB}} \right)^2 + m_3 \left(\frac{pb}{pa} \right)^2 l_{OA}^2.$$

Используя уравнение

$$T_{II} = J_{II} \frac{\omega_1^2}{2},$$

построим на рис. 19.3 *в* график изменения кинетической энергии $T_{II}(\varphi)$ звеньев второй группы механизма. Масштаб построений при этом необходимо принять равным масштабу графика $T(\varphi)$;

8. Построение графика кинетической энергии звеньев первой группы звеньев, т.е. $T_I(\varphi) = T(\varphi) - T_{II}(\varphi)$. Отметим на графике $T_I(\varphi)$, изображённом на рис. 19.3 *б*, наибольший перепад $\Delta T_{I\text{НБ}}$ кинетической энергии звеньев первой группы;

9. Определение момента инерции J_M маховика по формуле:

$$J_M = \frac{\Delta T_{I\text{НБ}}}{\omega_{\text{ср}}^2 \delta} - J_{II},$$

где $\omega_{\text{ср}} = \omega_1$.

Основные размеры маховика

Конструкция маховика выполняется чаще всего в виде массивного обода, соединённого со ступицей при помощи диска (рис. 19.4). Маховик устанавливается на валу, который вращается с угловой скоростью ω_1 .

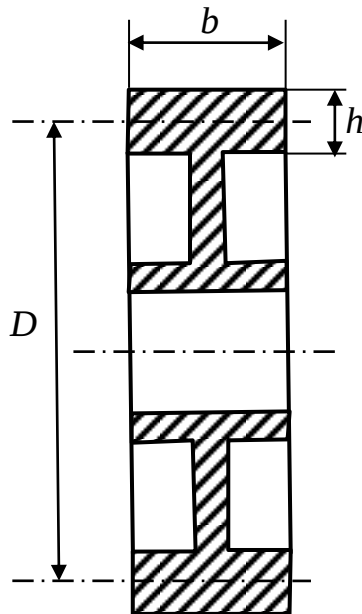


Рис. 19.4. Эскиз маховика

Величину диаметра маховика задают из условия, чтобы окружная скорость на ободе маховика не превышала допустимой для материала маховика величины. При несоблюдении этого условия возможен разрыв маховика центробежными силами инерции. Для предотвращения разрыва предельную окружную скорость на ободе маховика допускается принимать для чугунных маховиков $V_{\text{ОК}} \leq 40$ м/с, для стальных маховиков $V_{\text{ОК}} \leq 100$ м/с.

Максимальный допустимый диаметр стального маховика определяется формулой:

$$D_{\text{max}} = 2 \frac{V_{\text{ОК}}}{\omega_1}. \quad (19.16)$$

Конструктивный диаметр D маховика выбирается из условия:

$$D < D_{\text{max}}. \quad (19.17)$$

Момент инерции маховика, выполненного в виде массивного обода, соединённого со ступицей более тонким диском, определяется равенством

$$J_M = \frac{m \cdot D^2}{4}. \quad (19.18)$$

Величина $m \cdot D^2$, входящая в (19.18) является характеристикой маховика и называется **маховым моментом**.

Из уравнения (19.18) выразим массу маховика:

$$m = 4 \frac{J_M}{D^2}. \quad (19.19)$$

Массу обода маховика рекомендуется принимать из соотношения:

$$m_{об} = 0,9 \cdot m. \quad (19.20)$$

Соотношение высоты h обода к его ширине b принимается обычно следующим:

$$h = 0,4 \cdot b. \quad (19.21)$$

Учитывая, что масса обода маховика определяется из равенства

$$m_{об} = \pi \cdot D \cdot h \cdot b \cdot \gamma, \quad (19.22)$$

получим ширину обода:

$$b = \sqrt{\frac{0,9 \cdot m}{0,4 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot D}}, \quad (19.23)$$

где γ – плотность материала маховика.

Для стальных маховиков можно принять $\gamma = 7800 \text{ кг/м}^3$, для чугунных – $\gamma = 7100 \text{ кг/м}^3$.

Окончательная форма маховика определяется при выполнении рабочего проекта машины.

Регулирование непериодических колебаний скорости машины

В ряде случаев, при работе машины из-за внешних по отношению к ней причин, могут изменяться действующие на машину движущие силы или силы сопротивления.

При уменьшении сил сопротивления угловая скорость главного вала машины будет расти. При неизменной мощности двигателя его движущий момент при этом падает. При некотором новом значении угловой скорости главного вала машины движущий момент сравняется с уменьшенным моментом сил сопротивления. После этого снова наступит режим установившегося движения машины, но при новом значении средней угловой скорости главного вала, которое будет выше проектной.

При увеличении сопротивления средняя угловая скорость наоборот будет уменьшаться.

Такие изменения угловой скорости главного вала машины называются **непериодическими**.

Для того, чтобы при изменении внешних нагрузок восстановить расчётную среднюю угловую скорость главного вала машины необходимо изменить (увеличить или уменьшить) мощность движущих сил, подведённых к машине. Для этого применяются центробежные регуляторы скорости.

На рис. 19.5 изображены графики изменения угловой скорости ω главного вала машины в зависимости от времени t работы машины с использованием регулятора скорости – $\omega(t)$ и без применения регулятора – $\omega'(t)$.

Различают два вида центробежных регуляторов – регуляторы с воздействием на работу движущих сил (чаще применяются в машинах) и тормозные регуляторы с воздействием на силы вредного сопротивления, например трения, (применяются в приборах).

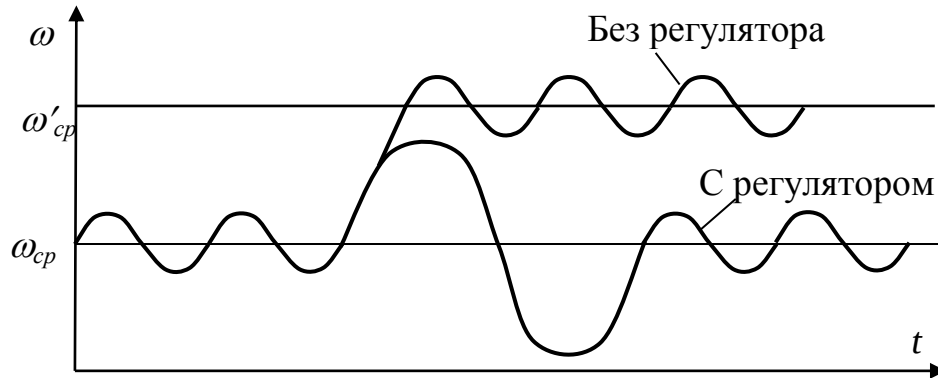


Рис. 19.5. Графики угловой скорости главного вала машины

На рис. 19.6 изображена схема центробежного регулятора скорости, применяемого в двигателях внутреннего сгорания.

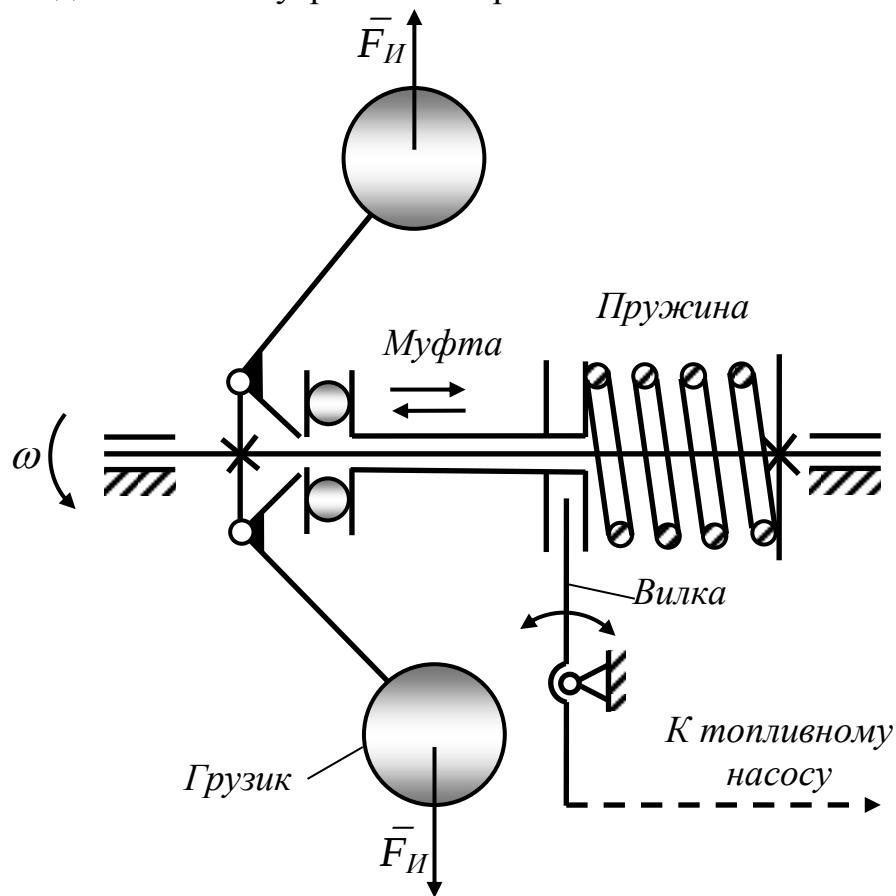


Рис. 19.6. Схема центробежного регулятора скорости

Изменение угловой скорости вала машины и, связанного с ним вала регулятора, приводит к изменению сил инерции $\bar{F}_И$ грузиков. Это, в свою очередь, приводит к перемещению муфты и повороту вилки, которая через тягу воздействует на орган регулирующий подачу топлива к двигателю.

Центробежный регулятор ставит движущие силы в соответствие с силами сопротивления, меняя подачу топлива к двигателю.

ЛЕКЦИЯ 20

Уравновешивание вращающихся масс. Общие сведения

В связи с появлением быстроходных машин ещё в конце XIX века возникли вопросы уравновешивания машин. При движении машины, циклически изменяющиеся по направлению и величине силы инерции неуравновешенных звеньев, создают дополнительные напряжения в деталях, увеличивают силы трения и износ в кинематических парах, расшатывают узлы крепления и вызывают вибрацию машины, стремясь разрушить связь рамы с фундаментом.

Широкое распространение в современной сельскохозяйственной и другой технике имеют быстро вращающиеся роторы, т.е. жёсткие тела, имеющие значительные размеры по оси вращения. Это – кривошипные, шкивы, маховики, зубчатые колеса, роторы, коленчатые валы, роторы электродвигателей, молотильных устройств, измельчителей кормов и др.

Неуравновешенность ротора обычно возникает в процессе его изготовления, а также из-за неравномерной плотности металла ротора, наличия раковин и пустот, смещения и перекоса отверстий в результате неточной его установки при обработке.

Рассмотрим для примера вращающийся неуравновешенный ротор (рис. 20.1). Масса ротора $m = 10$ кг. Угловая скорость вращения $n = 10\,000$ оборотов в минуту ($\omega = 1050$ рад/с). Смещение центра масс S ротора от оси O вращения $e = 1$ мм ($e = 0,001$ м).

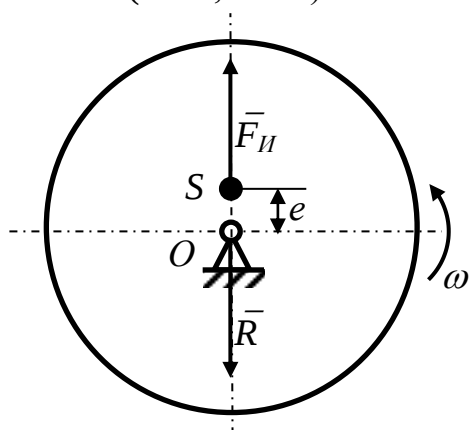


Рис. 20.1. Неуравновешенный ротор

При вращении ротора возникает центробежная сила инерции, величина которой определяется формулой:

$$F_I = m \cdot \omega^2 \cdot e = 10 \cdot 1050^2 \cdot 0,001 = 11\,000 \text{ Н.}$$

Вращаясь вместе с ротором, эта сила вызывает появление динамических давлений $\bar{R}$ переменного направления в подшипниках опоры, что может привести к разрушению подшипников и созданию аварийной ситуации.

Уравновесить ротор можно путём удаления или добавлением к нему определённых масс для правильного распределения всей массы ротора относительно оси вращения.

Операция для рационального размещения масс с целью исключения дополнительных динамических нагрузок, возникающих за счёт сил инерции, называется **уравновешиванием ротора**.

Условия уравновешенности вращающегося звена

На рис. 20.2 изображена схема звена, вращающегося вокруг оси z с угловой скоростью ω . Ротор имеет неуравновешенные массы m_1 и m_2 , которые лежат на расстоянии r_1 и r_2 от оси z .

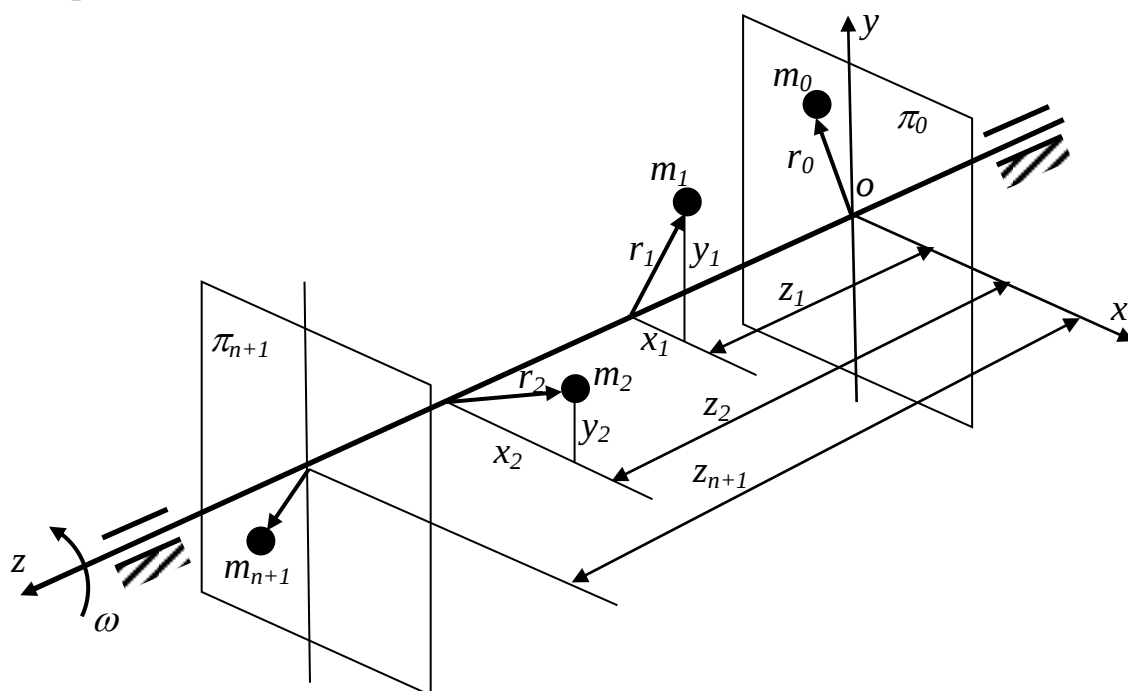


Рис. 20.2. Схема неуравновешенного звена

Элементарные силы инерции от неуравновешенных масс определяются соотношением:

$$F_i^{\text{и}} = m_i \cdot r_i \cdot \omega^2. \quad (20.1)$$

Величина $m_i \cdot r_i = q_i$, входящая в уравнение (20.1), называется **дисбалансом**.

Таким образом, при вращении ротора возникает система сил инерции, лежащих в параллельных плоскостях, но не параллельных между собой. Элементарные силы инерции перпендикулярны оси вращения z и пересекаются с ней. Такую систему сил инерции можно привести, как известно из курса теоретической механики, к двум силам, лежащим в плоскостях перпендикулярных к оси z . Следовательно, данную систему сил инерции можно уравновесить с помощью двух противовесов, массы которых обозначим через m_0 и m_{n+1} . Положения плоскостей коррекции π_0 и π_{n+1} , в которых можно расположить

эти дополнительные массы, можно выбрать произвольно, однако из конструктивных соображений положения плоскостей коррекции следует выбирать ближе к неподвижным опорам ротора.

На рис. 20.3 изображена система сил инерции масс m_1 , m_2 и m_0 , m_{n+1} ротора, спроектированная на плоскость $хоу$.

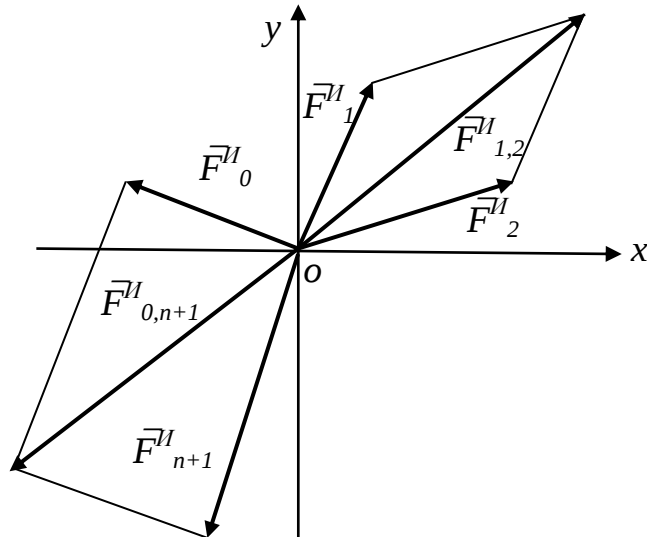


Рис. 20.3. Проекция сил инерции ротора

На рис. 20.3 обозначены:

$\vec{F}_1^I$ и $\vec{F}_2^I$ – силы инерции масс m_1 и m_2 ;

$\vec{F}_0^I$ и $\vec{F}_{n+1}^I$ – силы инерции масс m_0 и m_{n+1} ;

$\vec{F}_{1,2}^I$ – равнодействующая сил $\vec{F}_1^I$ и $\vec{F}_2^I$;

$\vec{F}_{0,n+1}^I$ – равнодействующая сил $\vec{F}_0^I$ и $\vec{F}_{n+1}^I$.

При этом $\vec{F}_{0,n+1}^I = -\vec{F}_{1,2}^I$.

Если звено не уравновешено, то система его сил инерции приводится к главному вектору сил инерции $\vec{F}^I$, приложенному к центру масс звена, и главному моменту M^I сил инерции. Следовательно, для полной, т.е. **динамической** уравновешенности ротора, необходимо и достаточно чтобы главный вектор и главный момент сил инерции равнялись нулю, т.е.

$$\vec{F}^I = \sum_0^{n+1} \vec{F}_i^I = 0, \quad (20.2)$$

$$\vec{M}^I = \sum_0^{n+1} \vec{M}_i^I = 0, \quad (20.3)$$

где $\vec{F}_i^I = \vec{q}_i \cdot \omega^2$ – элементарная сила инерции,

$\vec{M}_i^I = \vec{z}_i \cdot \vec{F}_i^I$ – элементарный момент силы инерции $\vec{F}_i^I$ относительно начала системы координат.

При этом

$$M^I = \omega^2 \sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2}, \quad (20.4)$$

где J_{xz} и J_{yz} – центральные моменты инерции ротора.

$$J_{xz} = \sum_0^{n+1} m_i \cdot x_i \cdot z_i, \quad J_{yz} = \sum_0^{n+1} m_i \cdot y_i \cdot z_i. \quad (20.5)$$

Условие (20.2) будет выполняться, если центр масс ротора будет лежать на оси вращения z , т.е.

$$x_S = 0 \quad \text{и} \quad y_S = 0, \quad (20.6)$$

где x_S и y_S – координаты центра масс ротора.

Условие (20.3) будет выполняться, если ось вращения ротора будет совпадать с его главной осью инерции. Это условие выражается следующим образом:

$$J_{xz} = 0 \quad \text{и} \quad J_{yz} = 0. \quad (20.7)$$

Статическая балансировка

В тех случаях, когда длина ротора по оси его вращения невелика, например, при балансировке дисков, маховиков, шестерён, шкивов и т. д. достаточно обеспечить лишь выполнение условий (20.6), т.е. выполнить только **статическую балансировку**. Ротор при этом необходимо устанавливать так, чтобы плоскость его симметрии располагалась строго перпендикулярно к оси вращения. Если из-за неточности монтажа это условие будет нарушено, то появится пара сил инерции, которая приведёт к динамической неуравновешенности ротора (рис. 20.4). На установленный с перекосом маховик будет действовать момент сил инерции $M_H = F_H \cdot h$.

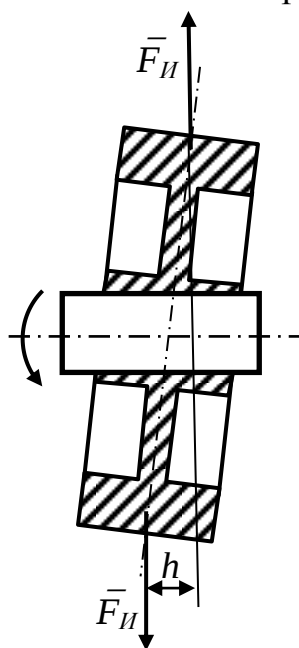


Рис. 20.4. Перекос маховика

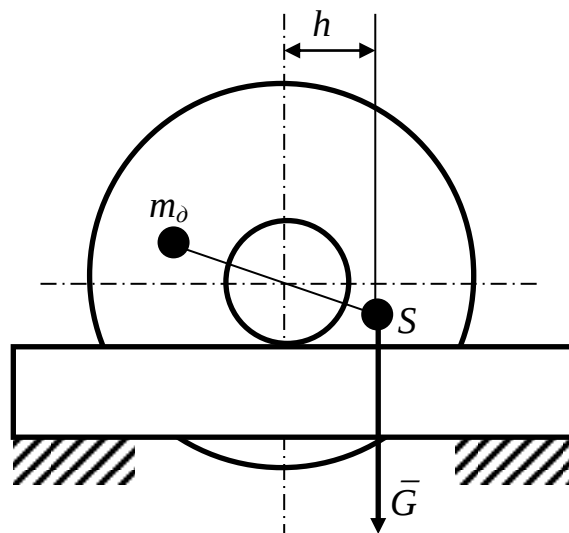


Рис. 20.5. Статическая балансировка ротора

Если вал статически неуравновешенного ротора положить на две неподвижные горизонтальные планки (рис. 20.5), то под действием момента $M = G \cdot h$ от неуравновешенной массы ротор повернётся и его центр тяжести S займёт своё самое нижнее положение.

Для того, чтобы совместить центр тяжести S с осью вращения, на ротор необходимо установить с противоположной центру S стороны дополнительную массу m_0 противовеса. Величину массы m_0 можно подобрать экспериментально (например, с помощью пластилина). Однако вследствие трения между валом и неподвижной опорой после статической балансировки ротора остаётся некоторый дисбаланс.

Динамическая балансировка

Целью динамической балансировки ротора является обеспечение выполнения условий (20.2) и (20.3), которые сводятся к условиям (20.6) и (20.7), соответственно. Это достигается тем, что в двух выбранных плоскостях π_1 и π_2 (рис. 20.6), жёстко связанных с ротором, устанавливают две дополнительные массы, располагая их таким образом, чтобы главный вектор $\bar{F}_u$ и главный момент M_u сил инерции были уравновешенными.

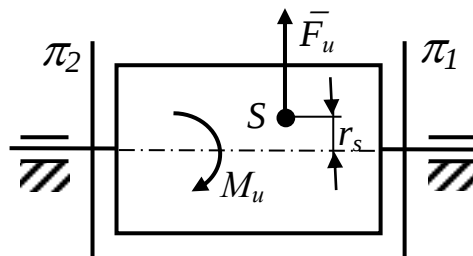


Рис. 20.6. Схема сил инерции ротора

Динамическую балансировку проводят на специальных машинах или станках, которые по амплитуде колебаний, передаваемых на опоры вращающегося ротора, позволяют определить величину и плоскость действия неуравновешенных сил инерции. Из большого числа балансировочных машин особенно широко применяются машины Б. В. Шитикова, схема которой показана на рис. 20.7.

В машине Б. В. Шитикова ротор укладывается на подшипники рамы, которая соединяется со стойкой с одной стороны шарнирно. Другая опора рамы имеет упругое соединение со стойкой. Вследствие этого рама с ротором могут покачиваться в плоскости перпендикулярной к оси шарнира.

Если сообщить ротору некоторую угловую скорость ω и затем дать ему возможность вращаться по инерции (в режиме выбега), то по мере уменьшения ω будут уменьшаться частота и амплитуда колебаний рамы. При совпадении ω с собственной частотой колебаний системы станка наступит резонанс: амплитуда колебаний рамы при этом резко возрастет и будет максимальной. Из теории колебаний известно, что резонансная амплитуда собственных колебаний пропорциональна возмущающему фактору, которым является в данном случае дисбаланс D :

$$A_{max} = \frac{1}{\mu} D, \quad (20.8)$$

где μ – коэффициент пропорциональности, зависящий от постоянных параметров станка.

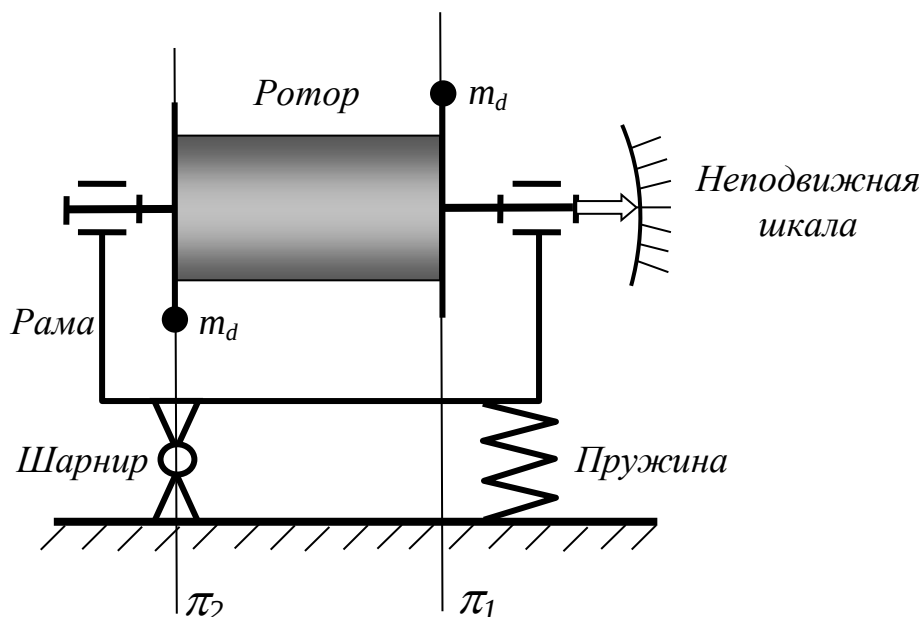


Рис. 20.7. Схема балансировочной машины Б.В. Шитикова

Зная μ , по замеренной амплитуде A_{max} из равенства (20.8), можно определить дисбаланс D ротора.

Определение постоянной μ производится на балансировочном станке способом трёх разгонов с использованием добавочного груза.

При первом разгоне определяется измерение максимальной амплитуды A_1 при резонансе от собственной неуравновешенности ротора.

Второй разгон выполняется после установки в плоскости π_1 противовеса с массой m_d на расстоянии r_d (рис. 20.8 а). Величины m_d и r_d назначаются при этом произвольно, но в пределах конструктивных ограничений. Максимальная амплитуда колебаний A_2 , измеренная при втором разгоне, представляет собой геометрическую сумму

$$\bar{A}_2 = \bar{A}_1 + \bar{A}_d, \quad (20.9)$$

где $\bar{A}_d$ – амплитуда колебаний, вызываемая массой m_d противовеса.

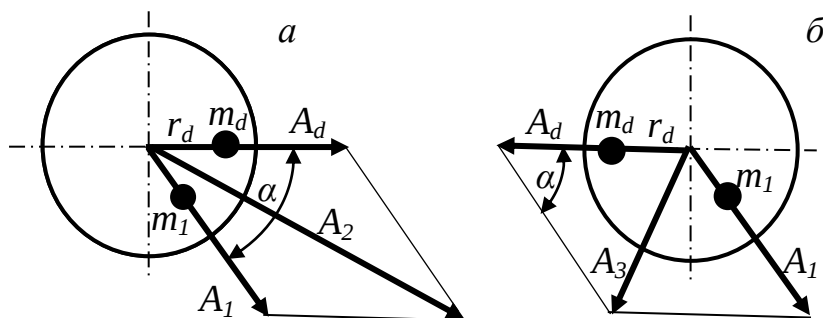


Рис. 20.8. Расчётная схема для определения дисбаланса ротора

Третий разгон выполняется после снятия противовеса и установки его в плоскости π_1 на том же расстоянии r_d , но с противоположной стороны по отношению к первой его установке (рис. 20.8 б). Максимальная амплитуда колебаний A_3 , измеренная при третьем разгоне, также представляет результат геометрического сложения

$$\bar{A}_3 = \bar{A}_1 + \bar{A}_d. \quad (20.10)$$

Расчётная формула выводится из условия, что параллелограммы амплитуд (рис. 20.8) равны, как имеющие равные стороны и углы. Результирующие амплитуды A_2 и A_3 являются диагоналями этих параллелограммов.

По теореме о сумме квадратов диагоналей параллелограмма

$$A_2^2 + A_3^2 = 2A_1^2 + 2A_d^2,$$

откуда

$$A_d = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2}{2} - A_1^2}. \quad (20.11)$$

Из формулы (20.8) следует:

$$\mu = \frac{m_d \cdot r_d}{A_d}. \quad (20.12)$$

Теперь, зная коэффициент μ станка, можно определить дисбаланс ротора от собственной неуравновешенности:

$$D_1 = \mu \cdot A_1. \quad (20.13)$$

Задавшись массой противовеса m_{Π} , можно определить расстояние от оси вала до противовеса

$$r_1 = \frac{D_1}{m_{\Pi}}. \quad (20.14)$$

Угловое положение противовеса в плоскости π_1 определяется по теореме косинусов:

$$\cos \alpha = \frac{A_1^2 + A_d^2 - A_3^2}{2 \cdot A_1 \cdot A_d}. \quad (20.15)$$

Значению $\cos \alpha$ соответствуют два значения угла α . То или иное значение α выбирается на основании результатов дополнительного испытания на станке.

После этого, переставив ротор так, чтобы концы его вала вместе с плоскостями π_1 и π_2 поменялись местами, аналогичным образом определяют массу противовеса и радиус его установки в плоскости π_2 . Противовес, установленный в плоскости π_1 не будет влиять на амплитуду колебаний ротора, так как плоскость π_1 после переустановки будет проходить через ось неподвижного шарнира.

При установке двух противовесов в плоскостях π_1 и π_2 ротор будет в динамическом отношении полностью уравновешен.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. *Теория механизмов и машин*: учеб. для втузов / К.В. Фролов, С.А. Попов и др.; под ред. К.В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1987, 1998, 2001, 2004.
2. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. – М.: Наука, 1988.
3. *Левитская О.Н.* Курс теории механизмов и машин / О.Н. Левитская, Н.И. Левитский. – М.: Высш. шк., 1985.
4. *Тимофеев Г.А.* Теория механизмов и машин: учеб. пособие / Г.А. Тимофеев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт; ИД Юрайт, 2010.

Дополнительный

5. *Кожевников С.Н.* Теория механизмов и машин / С.Н. Кожевников. – М., 1977.
6. *Кожевников С.Н.* Механизмы: справ. пособие / С.Н. Кожевников, Я.И. Есипенко, Я.М. Раскин; под ред. С.Н. Кожевникова. – М., 1976.
7. *Крайнев А.Ф.* Словарь-справочник по механизмам / А.Ф. Крайнев. – М., 1987.
8. *Попов С.А.* Курсовое проектирование по теории механизмов и машин / С.А. Попов, Г.А. Тимофеев. – М., 1998, 2002, 2004, 2008.
9. *Евдокимов Ю.И.* Теория механизмов и машин. Ч. 1: Структура, кинематика и кинетостатика механизмов: курс лекций / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Инженер. ин-т. – Новосибирск: Изд-во НГАУ, 2013. – 136 с.
10. *Евдокимов Ю.И.* Теория механизмов и машин. Ч. 2: Зубчатые и кулачковые механизмы: курс лекций / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Инженер. ин-т. – Новосибирск: Изд-во НГАУ, 2014. – 72 с.
11. *Лабораторные работы по теории механизмов и машин* / Новосиб. гос. аграр. ун-т; сост. Ю.И. Евдокимов. – Новосибирск, 2009.
12. *Тесты по теории механизмов и машин машин* / Новосиб. гос. аграр. ун-т; сост. Ю.И. Евдокимов. – Новосибирск, 2007.
13. *Курсовое проектирование по теории механизмов и машин в примерах*: учеб-метод. пособие / Новосиб. гос. аграр. ун-т; сост. Ю.И. Евдокимов. – Новосибирск, 2011.

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИЯ 16	3
Исследование движения механизмов	
под действием заданных сил. Введение	3
Основные задачи динамического анализа механизмов и машин	3
Установившееся и неустойчивое движение машины	3
Динамическая модель машинного агрегата	5
Приведение сил	7
Приведение масс	8
Уравнения движения механизма	10
Примеры определения приведённых моментов сил и масс	
механизма	11
ЛЕКЦИЯ 17	16
Трение в кинематических парах. Общие сведения	16
Виды трения	17
Трение в поступательной кинематической паре	17
Трение на наклонной плоскости	22
Трение в клиновидной кинематической паре	23
Трение во вращательной кинематической паре	24
Трение качения	25
Примеры технических расчётов с учётом трения	28
ЛЕКЦИЯ 18	33
Коэффициент полезного действия механизмов.	
Основные определения	33
Последовательное соединение механизмов	34
Параллельное соединение механизмов	35
Смешанное соединение механизмов	37
Примеры определения коэффициентов полезного	
действия частных механизмов и машинных агрегатов	38
ЛЕКЦИЯ 19	45
Регулирование движения машины. Общие сведения	45
Определение момента инерции маховика	47
Основные размеры маховика	53
Регулирование непериодических колебаний скорости машины	54
ЛЕКЦИЯ 20	56
Уравновешивание вращающихся масс. Общие сведения	56
Условия уравновешенности вращающегося звена	57
Статическая балансировка	59
Динамическая балансировка	60
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	63

Евдокимов Юрий Иванович

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН
ЧАСТЬ 3
ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Курс лекций

Редактор Н.К. Крупина
Компьютерная вёрстка Т.А. Измайлова

Переизданный курс лекции печатается в авторской редакции 2014 г.

Подписано в печать 29 сентября 2020 г.
Формат 60×84 1/16. Объём уч. – изд. л., усл. печ. л.
Тираж 120 экз. Изд. № . Заказ №

Отпечатано в Издательстве
Новосибирского государственного аграрного университета

630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160, каб. 106
Тел/факс (383) 267-09-10. E-mail: 2134539@mail.ru