

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

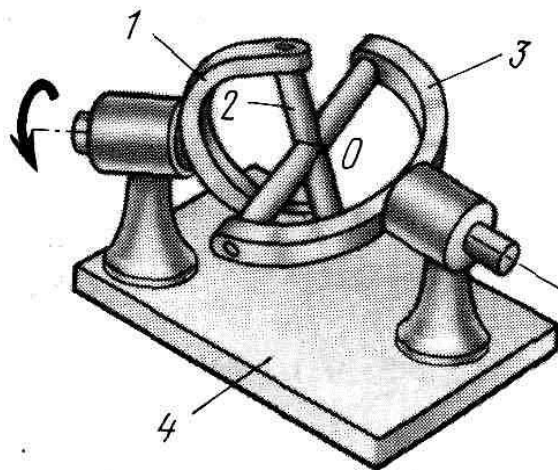
Ю.И. ЕВДОКИМОВ

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН.

ЧАСТЬ 1.

СТРУКТУРА, КИНЕМАТИКА И КИНЕТОСТАТИКА МЕХАНИЗМОВ

КУРС ЛЕКЦИЙ



Новосибирск 2020

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

Ю.И. ЕВДОКИМОВ

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН.

ЧАСТЬ 1.

**СТРУКТУРА, КИНЕМАТИКА
И КИНЕТОСТАТИКА МЕХАНИЗМОВ**

КУРС ЛЕКЦИЙ

Новосибирск 2020

УДК 621.01

ББК 34.41

Евдокимов Ю.И. Теории механизмов и машин. Часть 1: Структура, кинематика и кинетостатика механизмов: курс лекций / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Инженер. ин-т. – Новосибирск: Изд-во НГАУ, 2020 – 96 с. изд. перераб. и доп.

Курс лекций содержит основные положения курса «Теории механизмов и машин», изложение в краткой конспективной форме. В первой части представлены теоретическое положение разделов: структурный анализ и синтез, а также классификация механизмов; кинематический анализ и элементы геометрического синтеза плоских рычажных механизмов; силовое исследование плоских рычажных механизмов. Изложение дано на основе графических, аналитических, графоаналитических методов определения параметров механизмов.

По каждому разделу приведены примеры решения задач на основе рассмотренного теоретического материала.

Курс лекций предназначен для студентов всех направлений подготовки Инженерного института очной и заочной форм обучения (Агроинженерия, Технология транспортных процессов, Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, Профессиональное обучение (по отраслям), Техносферная безопасность).

Курс лекций может быть рекомендован для студентов Агрономического факультета (Природообустройство и водопользование), Биолого-технологического факультета (Продукты питания животного происхождения, Технология продукции и организация общественного питания, Стандартизация и метрология), а также студентам, обучающимся по инженерным направлениям подготовки.

Утвержден и рекомендован к переизданию учебно-методическим советом Инженерного института (протокол от 29 сентября 2020 г. № 2)

© ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ
Инженерный институт, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	6
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	7
ЛЕКЦИЯ 1	7
Введение	7
Краткий исторический очерк	8
Структура механизмов. Кинематические пары и их классификация	11
Кинематические цепи. Механизм	15
ЛЕКЦИЯ 2	18
Классификация механизмов	18
Число степеней свободы механизма	21
Структурный анализ и синтез плоских рычажных механизмов	23
ЛЕКЦИЯ 3	30
Кинематический анализ механизмов.	
Основные цели, задачи и методы	30
Определение положений звеньев механизма	30
Графоаналитический метод планов скоростей и ускорений	31
ЛЕКЦИЯ 4	34
Примеры кинематического анализа плоских рычажных механизмов	34
ЛЕКЦИЯ 5	52
Аналитическая кинематика плоских рычажных механизмов	50
Основные этапы кинематического анализа механизма аналитическим методом	52
Примеры кинематического анализа механизмов аналитическим методом	54
ЛЕКЦИЯ 6	57
Геометрический синтез плоских рычажных механизмов	57
Этапы проектирования механизмов	58
Условия существования кривошипа в шарнирном четырёхзвенном механизме	60
Синтез шарнирного четырёхзвенного механизма по двум крайним положениям коромысла	61
Синтез шарнирного четырёхзвенника по коэффициенту изменения средней угловой скорости выходного звена	62
Синтез шарнирного четырёхзвенника по углам давления в крайних положениях выходного звена	64
Синтез кривошипно-ползунного механизма по крайним положениям ползуна	65

Синтез кривошипно-ползунного механизма по коэффициенту изменения средней скорости ползуна_____	67
Синтез кривошипно-ползунного механизма с учётом углов давления в кинематических парах_____	69
Синтез кулисного механизма по коэффициенту изменения средней скорости выходного звена____	70
Синтез механизма с качающимся цилиндром_____	72
ЛЕКЦИЯ 7 _____	74
Силовой анализ плоских рычажных механизмов_____	74
Классификация сил, действующих в механизмах_____	74
Метод кинетостатики_____	75
Силы инерции звеньев механизма_____	76
Условия статической определимости кинематической цепи_____	78
Общий план силового расчёта плоского рычажного механизма____	80
Силовой расчёт двухповодковых структурных групп_____	81
Силовой расчёт начального звена_____	91
ЛЕКЦИЯ 8 _____	92
Рычаг Н.Е. Жуковского_____	92

ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие сельского хозяйства и повышение производительности труда невозможны без широкого применения механизации и автоматизации трудоёмких технологических процессов. Эффективная эксплуатация современной сложной сельскохозяйственной техники требует знания многих научных дисциплин, и в первую очередь теории механизмов и машин (ТММ). ТММ является базой для подготовки к освоению специальных курсов, на которых изучаются различные машины, применяемые в сельском хозяйстве.

Учебная дисциплина «Теория механизмов и машин» базируется на механико-математической подготовке студентов, обеспечиваемой предшествующими курсами: физика, математика, теоретическая механика.

Являясь научной основой специальных курсов по проектированию и эксплуатации машин отраслевого назначения, она ставит задачи научить студентов:

- общим методам исследования и проектирования механизмов и машин;
- пониманию общих принципов реализации движения с помощью механизмов и взаимодействия механизмов в машине;
- определять основные кинематические и динамические свойства различных механических систем;
- системному подходу к проектированию машин и механизмов, нахождению оптимальных параметров механизмов по заданным условиям работы.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Теория механизмов и машин*: учеб. для втузов / К.В. Фролов, С.А. Попов и др.; под ред. К.В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1987, 1998, 2001, 2004.
2. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. – М.: Наука, 1988.
3. *Левитская О.Н.* Курс теории механизмов и машин / О.Н. Левитская, Н.И. Левитский. – М.: Высш. шк., 1985.
4. *Тимофеев Г.А.* Теория механизмов и машин: учеб. пособие / Г.А. Тимофеев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт; ИД Юрайт, 2010.

Дополнительная

5. *Кожевников С.Н.* Теория механизмов и машин / С.Н. Кожевников. – М., 1977.
6. *Кожевников С.Н.* Механизмы: справ. пособие / С.Н. Кожевников, Я.И. Есипенко, Я.М. Раскин; под ред. С.Н. Кожевникова. – М., 1976.
7. *Крайнев А.Ф.* Словарь-справочник по механизмам / А.Ф.Крайнев. – М., 1987.
8. *Попов С.А.* Курсовое проектирование по теории механизмов и машин / С.А. Попов, Г.А. Тимофеев. – М., 1998, 2002, 2004, 2008.
9. *Лабораторные работы по теории механизмов и машин* / Новосиб. гос. аграр. ун-т; сост. Ю.И. Евдокимов. – Новосибирск, 2009.
10. *Тесты по теории механизмов и машин* / Новосиб. гос. аграр. ун-т; сост. Ю.И. Евдокимов. – Новосибирск, 2007.
11. *Курсовое проектирование по теории механизмов и машин в примерах*: учеб-метод. пособие / Новосиб. гос. аграр. ун-т; сост. Ю.И. Евдокимов. – Новосибирск, 2011.

ЛЕКЦИЯ 1 Введение

Теория механизмов и машин – наука об общих методах анализа и синтеза механизмов и машин.

Анализ механизма состоит в исследовании кинематических и динамических свойств механизма по заданной его схеме.

Синтез механизма заключается в проектировании схемы механизма по заданным его свойствам.

Машина есть устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения физического и умственного труда человека.

Технологическая машина изменяет форму, размеры, свойства, состояние исходных материалов и заготовок.

Транспортные машины преобразуют только положение материала в пространстве с требуемой скоростью.

Энергетическая машина предназначена для преобразования одного вида энергии в другой.

Машина-двигатель преобразует какой-либо вид энергии в механическую.

Машина-генератор преобразует механическую энергию в другой вид энергии.

Рабочая машина предназначена для преобразования материалов.

Информационная машина предназначена для получения и преобразования информации.

Контрольно-управляющая машина предназначена для преобразования информации с целью управления энергетическими или рабочими машинами.

Математическая машина предназначена для получения математических образов, соответствующих свойствам объекта.

Кибернетическая машина предназначена для имитации или замены человека в процессах деятельности, присущих только ему или объектам живой природы, и обладающая элементами искусственного интеллекта;

Машинный агрегат – техническая система, состоящая из одной или нескольких машин, соединённых последовательно или параллельно между собой, и предназначенная для выполнения каких-либо требуемых функций.

Машина осуществляет свой рабочий процесс посредством выполнения закономерных механических движений. Носителем этих движений является механизм. Следовательно, **механизм** – это система твердых тел, подвижно связанных путем соприкосновения и движущихся определенным, требуемым образом относительно одного из них, принятого за неподвижное. Очень многие механизмы выполняют функцию преобразования механического движения твердых тел.

Краткий исторический очерк

Простейшие механизмы (рычажные, зубчатые и др.) были известны с давних времен; постепенно шел процесс их исследования, совершенствования и внедрения в практику с целью облегчить труд человека, повысить производительность труда.

Так, известно, что выдающийся деятель культуры эпохи Возрождения и ученый Леонардо да Винчи (1452–1519) разработал проекты конструкций механизмов ткацких станков, печатных и деревообрабатывающих машин, им сделана попытка определить экспериментальным путем коэффициент трения. Итальянский врач и математик Д. Кардан (1501–1576) изучал движение механизмов часов и мельниц. Французские ученые Г. Амонтон (1663–1705) и Ш. Кулон (1736–1806) первыми предложили формулы для определения силы трения покоя и скольжения.

Выдающийся математик и механик Л. Эйлер (1707–1783), швейцарец по происхождению, 30 лет жил и работал в России, профессор, а затем действительный член Петербургской Академии наук, автор 850 научных трудов, решил ряд задач по кинематике и динамике твердого тела, исследовал колебания и устойчивость упругих тел, занимался и вопросами практической механики, исследовал, в частности, различные профили зубьев зубчатых колес и пришел к выводу о том, что наиболее перспективный профиль – эвольвентный.

Известный русский механик и изобретатель И. И. Ползунов (1728–1766) впервые разработал проект механизма двухцилиндрового парового двигателя (осуществить который ему, к сожалению, не удалось), сконструировал автоматический регулятор питания котла водой, устройство для подачи воды и пара и другие механизмы. Выдающийся механик И. И. Кулибин (1735–1818) создал знаменитые часы в форме яйца, представляющие собой самый сложный по тем временам механизм автоматического действия.

В связи с развитием машиностроения как отрасли промышленности появилась потребность в разработке общих научных методов исследования и проектирования механизмов, входящих в состав машин. Эти методы способствовали созданию наиболее совершенных для своего времени машин, выполняющих наилучшим образом определенные требуемые функции. Известно, что машиностроение как отрасль промышленности начала складываться еще в XVIII в., а в XIX в. она стала быстро развиваться, особенно в Англии и США.

В России первые машиностроительные заводы появились в XVIII в.; в 1861 г. их было уже свыше ста, а в 1900 г. примерно 1417.

Высокоразвитое отечественное машиностроение было одним из факторов, обеспечивших победу в Великой Отечественной войне; в настоящее время машиностроение в числе других отраслей народного хозяйства успешно решает задачи ускорения научно-технического прогресса страны.

Как наука теория механизмов и машин под названием «Прикладная механика» начала формироваться в начале XIX в., причем тогда разрабатывались в основном методы структурного, кинематического и динамического анализа механизмов. И лишь с середины XIX в. в теории механизмов и машин получают развитие общие методы синтеза механизмов. Так, знаменитый русский ученый, математик и механик академик П.Л.Чебышев (1821–1894) опубликовал 15 работ по структуре и синтезу рычажных механизмов, при этом на основе разрабо-

танных методов он изобрел и построил свыше 40 различных новых механизмов, осуществляющих заданную траекторию, останов некоторых звеньев при движении других и т. д.; структурная формула плоских механизмов называется сейчас формулой Чебышева.

Немецкий ученый Ф. Грасгоф (1826–1893) дал математическую формулировку условия проворачиваемости звена плоского рычажного механизма, которое необходимо при его синтезе. Английские математики Д. Сильвестр (1814–1897) и С. Робертс (1827–1913) разработали теорию рычажных механизмов для преобразования кривых (пантографов).

И. А. Вышнеградский (1831–1895), известный как один из основоположников теории автоматического регулирования, сконструировал ряд машин и механизмов (автоматический пресс, подъемные машины, регулятор насоса) и, будучи профессором Петербургского технологического института, создал научную школу конструирования машин.

Методы синтеза зубчатых механизмов, широко применяемых в различных машинах, отличаются определенной сложностью. Многие ученые работали в этой области. Французский геометр Т. Оливье (1793–1858) обосновал метод синтеза сопряженных поверхностей в плоских и пространственных зацеплениях с помощью производящей поверхности. Английский ученый Р. Виллис (1800–1875) доказал основную теорему плоского зацепления и предложил аналитический метод исследования планетарных зубчатых механизмов. Немецкий машиновед Ф. Рело (1829–1905) разработал графический метод синтеза сопряженных профилей, известный в настоящее время как «метод нормалей». Рело также является автором работ по структуре (строению) и кинематике механизмов. Русский ученый Х. И. Гохман (1851–1916) одним из первых опубликовал работу по аналитической теории зацепления.

Значительный вклад в динамику машин внес своими трудами «отец русской авиации» Н. Е. Жуковский (1847–1921). Он был не только основоположником современной аэродинамики, но и автором целого ряда работ по прикладной механике и теории регулирования хода машин.

Развитию механики машин способствовали работы Н. П. Петрова (1836–1920), заложившего основы гидродинамической теории смазки, В. П. Горячкина (1868–1935), который разработал теоретические основы расчета и построения сельскохозяйственных машин, вся сложность расчета которых заключается в том, что их исполнительные механизмы должны воспроизводить движения руки человека.

Русский ученый Л. В. Ассур (1878–1920) открыл общую закономерность в структуре многозвенных плоских механизмов, применяемую и сейчас при их анализе и синтезе. Он же разработал метод «особых точек» для кинематического анализа сложных рычажных механизмов. А. П. Малышев (1879–1962) предложил теорию структурного анализа и синтеза применительно к сложным плоским и пространственным механизмам.

Существенный вклад в становление механики машин как цельной теории машиностроения внес И. И. Артоболевский (1905–1977). Он является организатором советской школы теории механизмов и машин; им написаны многочисленные труды по структуре, кинематике и синтезу механизмов, динамике машин и теории машин-автоматов, а также учебники, получившие всеобщее признание.

Ученики и последователи И. И. Артоболевского – А. П. Бессонов, Вяч. А. Зиновьев (1899–1975), Н. И. Левитский, Н. В. Умнов, С. А. Черкудинов и многие другие – своими работами в области динамики машин (в том числе акустической и неголономной), оптимизационного синтеза механизмов, теории машин-автоматов и в других областях теории механизмов и машин содействовали дальнейшему ее развитию.

В 30-е и последующие годы большой вклад в теорию механизмов и машин внесли своими исследованиями Н. Г. Бруевич, один из создателей теории точности механизмов, Г. Г. Баранов (1899–1968), автор трудов по кинематике пространственных механизмов, С. Н. Кожевников, разработавший общие методы динамического анализа механизмов с упругими звеньями и механизмов тяжело нагруженных машин.

Следует отметить труды наших отечественных ученых: Н. И. Мерцалов (1866–1948) дополнил кинематическое исследование плоских механизмов теорией пространственных механизмов и разработал простой и надежный метод расчета маховика; Л. П. Смирнов (1877–1954) привел в строгую единую систему графические методы исследования кинематики механизмов и динамики машин; В. А. Гавриленко (1899–1977) разработал теорию эвольвентных зубчатых передач; Л. Н. Решетов развил теорию кулачковых механизмов и положил начало теории самоустанавливающихся механизмов.

Структура механизмов. Кинематические пары и их классификация

Механизм является системой твердых тел. Поэтому механизмы имеют как весьма простое, так и достаточно сложное и разнообразное строение (структуру). Строением механизма определяются такие его важнейшие характеристики, как виды осуществляемых движений, способы их преобразования, число степеней свободы. Формирование механизма, т. е. соединение отдельных его частей в единую систему, сопровождается наложением связей. Правильное их распределение в строении механизма в сильной степени предопределяет его надежную эксплуатацию. Поэтому при проектировании нужно из множества разнообразных механизмов выбрать самый подходящий и правильно подобрать его основные структурные элементы. А для этого прежде всего надо знать основные виды современных механизмов, их структурные характеристики, закономерности их строения.

Механизмы состоят из деталей, которые соединяются между собой жёстко или подвижно.

Деталь– изделие, изготовленное из однородного материала без применения сборочных операций. Например, болт, тело шатуна двигателя внутреннего сгорания, крышка шатуна.

Звено механизма – одна или несколько деталей, соединённых жёстко между собой, у которых исключается их относительное движение. Например, коленчатый вал, шатун в сборе, поршень вместе с поршневыми кольцами.

Кинематическая пара– соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение. Например: поступательная, вращательная, сферическая пары (рис. 1.1).

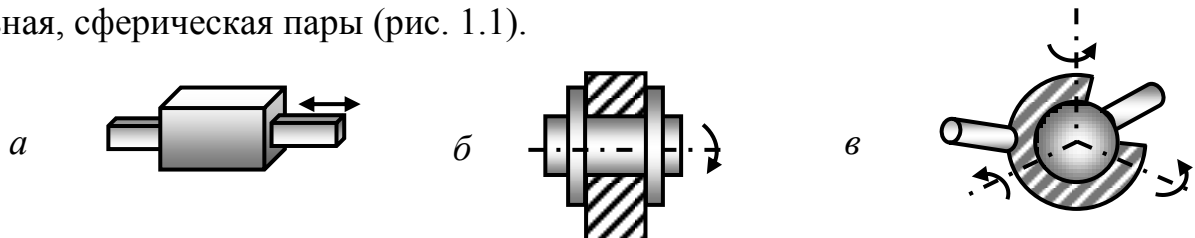


Рис. 1.1. Кинематические пары:

а – поступательная; б – вращательная; в – сферическая

Элемент кинематической пары–совокупность поверхностей, линий и отдельных точек звена, по которым оно соприкасается с другим звеном.

Кинематические пары классифицируются по различным признакам. По характеру соприкасающихся элементов кинематические пары делятся на высшие и низшие.

В **высших кинематических парах**элементом соприкосновения является **линия или точка**. Примеры: шар–плоскость, цилиндр–плоскость (рис 1.2).

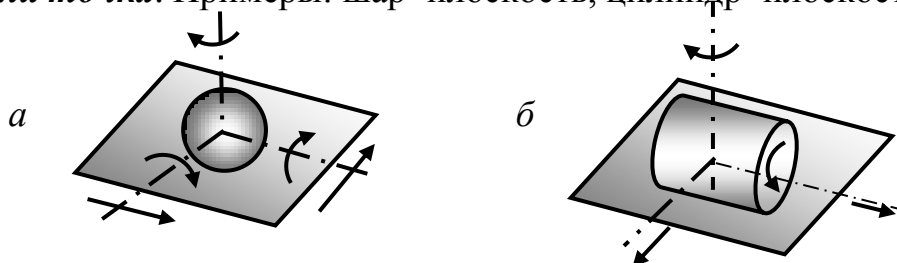


Рис. 1.2. Высшие кинематические пары:

а – шар–плоскость; б – цилиндр–плоскость

В **низших кинематических парах** элементом соприкосновения является **поверхность**. Примеры: поступательная, вращательная, цилиндрическая кинематические пары (рис. 1.2)

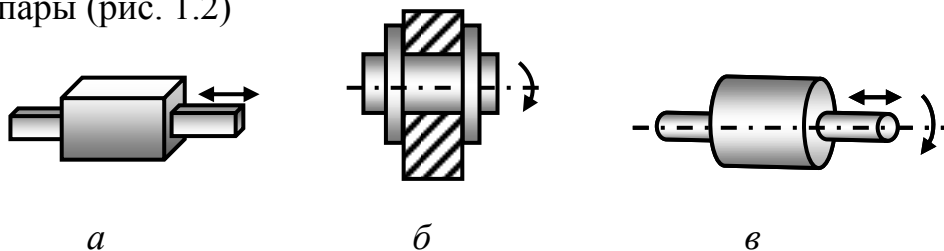


Рис. 1.2. Низшие кинематические пары:

а – поступательная; б – вращательная; в – цилиндрическая

Число степеней свободы (W) механической системы называется число независимых параметров, определяющих положение всех элементов системы.

Свободное тело в пространстве имеет шесть степеней свободы ($W=6$), так как оно может совершать относительно пространственной прямоугольной системы координат шесть независимых движений – три поступательных вдоль координатных осей и три вращательных – вокруг тех же осей (рис. 1.3). Положение такого тела определяется шестью независимыми параметрами (линейными и угловыми).

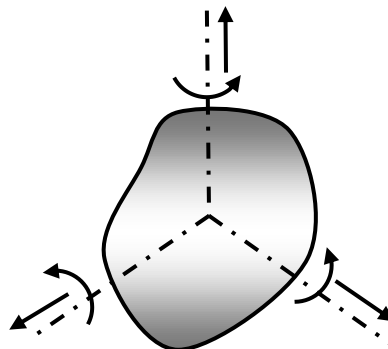
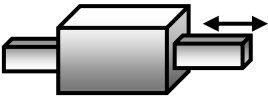
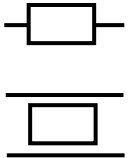
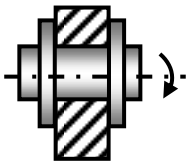
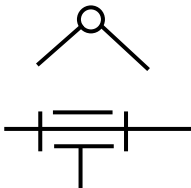
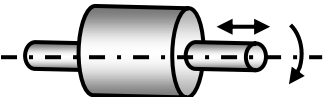
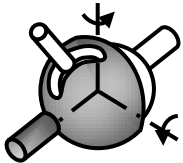
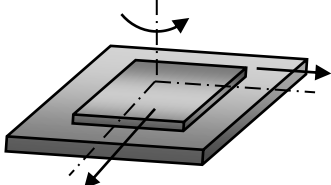
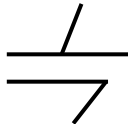
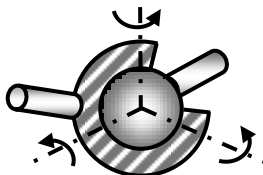
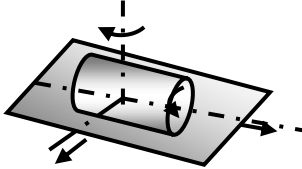
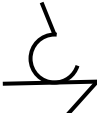
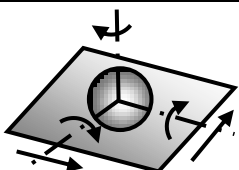
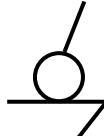


Рис.1.3. Свободное тело в пространстве

Вхождение звена в ту или иную кинематическую пару налагает ограничения на относительное движение звеньев.

По числу степеней свободы в относительном движении звеньев кинематические пары делятся на одно-, двух-, трех-, четырех- и пятиподвижные, которые налагают на относительное движение звеньев соответственно пять, четыре, три, две и одну связь. Изображения и характеристики некоторых кинематических пар приведены в табл. 1.1. Например, поступательная пара имеет одну степень свободы, так как допускает только одно движение одного звена относительно другого и, следовательно, является одноподвижной. Число связей, ограничивающих движение одного звена относительно другого в этой паре, равно пяти. Общая сумма чисел степеней свободы и числа связей в кинематических парах равна шести. Другая кинематическая пара – цилиндрическая допускает два движения одного звена относительно другого и является двухподвижной. Число степеней свободы в такой паре равно двум. Число связей, ограничивающих движение одного звена в этой паре относительно другого равно, четырём. В паре шар – плоскость число связей равно одному, так как движение одного звена относительно другого вдоль вертикальной оси невозможно без разрушения пары. Число возможных движений одного звена относительно другого в такой паре равно пяти. Кинематическая пара в этом случае является пятиподвижной, т.е. имеет пять степеней свободы.

Таблица 1.1. Виды кинематических пар

Название	Конструктивное изображение	Условное изображение.	Число степеней свободы	Число связей
Поступательная			1	5
Вращательная			1	5
Цилиндрическая			2	4
Сферическая с пальцем			2	4
Плоскостная			3	3
Сферическая			3	3
Цилиндр – плоскость			4	2
Шар – плоскость			5	1

ЛЕКЦИЯ 2

Кинематические цепи. Механизм

Кинематическая цепь—система звеньев, соединённых между собой кинематическими парами (рис. 2.1).

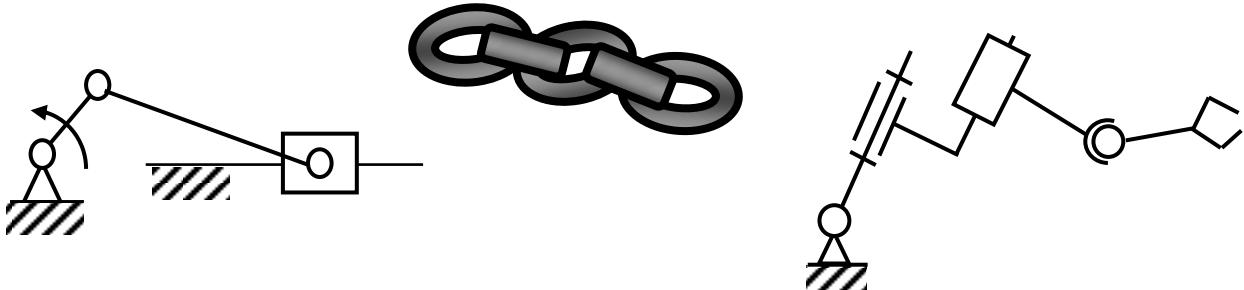


Рис. 2.1. Кинематические цепи

Виды кинематических цепей:

Замкнутые, в которых каждое звено входит в не менее чем две кинематические пары с другими звеньями (рис. 2.2).

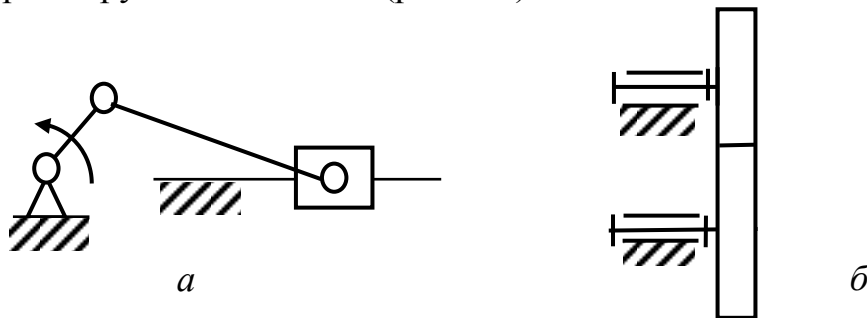


Рис. 2.2. Замкнутые кинематические цепи:

а — кривошипно-ползунный механизм; *б* — зубчатая передача

Незамкнутые, у которых имеются звенья, входящие только в одну кинематическую пару с другим звеном (звено 4 на рис. 2.3).

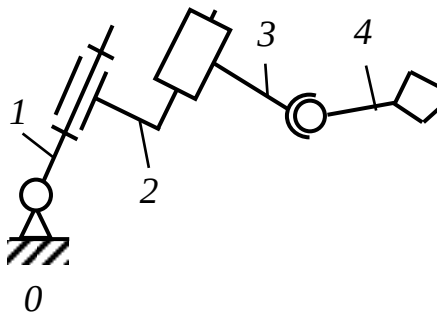


Рис. 2.3. Незамкнутая кинематическая цепь. Манипулятор

Плоские, у которых траектории движения точек всех звеньев находятся в параллельных между собою плоскостях (рис. 2.4).

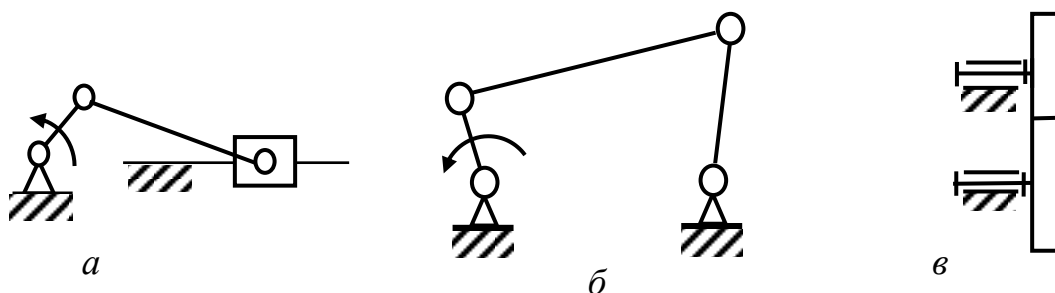


Рис. 2.4. Плоские кинематические цепи:

а – кривошипно-ползунный механизм; *б* – шарнирный четырёхзвенник;
в – зубчатая передача

Пространственные, содержащие звенья, траектории движения точек которых не лежат в параллельных между собою плоскостях (рис. 2.5).

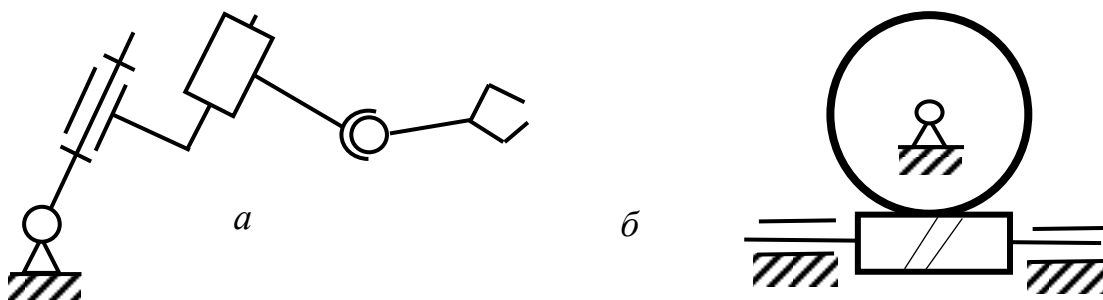


Рис. 2.5. Пространственные кинематические цепи:

а – манипулятор; *б* – червячная передача

Механизм – кинематическая цепь с неподвижным звеном, в которой при заданном движении одного или нескольких звеньев все другие звенья совершают вполне определённые движения.

Все кинематические цепи, изображённые на рисунках 2.2 – 2.5, представляют собой механизмы.

Любой механизм – это кинематическая цепь, но не любая кинематическая цепь может являться механизмом. Например, цепь, образованная кольцевыми звеньями и изображённая на рис. 2.1, не будет являться механизмом в силу неопределённости движения её звеньев при заданном движении одного звена.

Механизмы содержат неподвижное звено и ряд подвижных.

Звенья механизмов:

Стойка – неподвижное звено или звено, условно принимаемое за неподвижное, если механизм установлен на движущемся основании (звено 0 на рис. 2.6 и на рис. 2.7).

Входное звено – звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в определённые движения других звеньев (звено 1 на рис. 2.6). Входное звено получает движение от двигателя;

Выходное звено – звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм (звено 3 на рис. 2.6 и звено 5 на рис. 2.7). Выходное звено соединяется с рабочим органом машины.

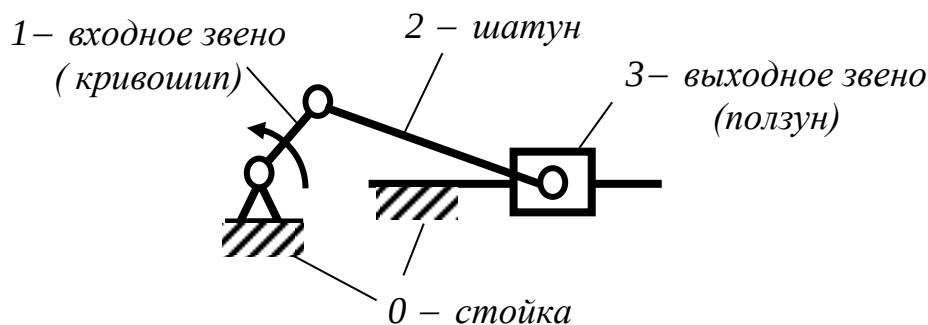


Рис. 2.6. Кривошипно-ползунный механизм

Кривошип – звено, образующее вращательную пару со стойкой и способное совершать вокруг неё полный оборот (звено 1 на рис. 2.6 и на рис. 2.7).

Шатун – звено не входящее в кинематические пары со стойкой (звено 2 на рис. 2.6 и звенья 2 и 4 на рис. 2.7).

Коромысло – звено, образующее вращательную пару со стойкой, но не способное совершать вокруг неё полный оборот (звено 3 на рис. 1.10).

Ползун – звено, совершающее поступательное движение относительно стойки (звено 3 на рис. 2.6 и звено 5 на рис. 2.7).

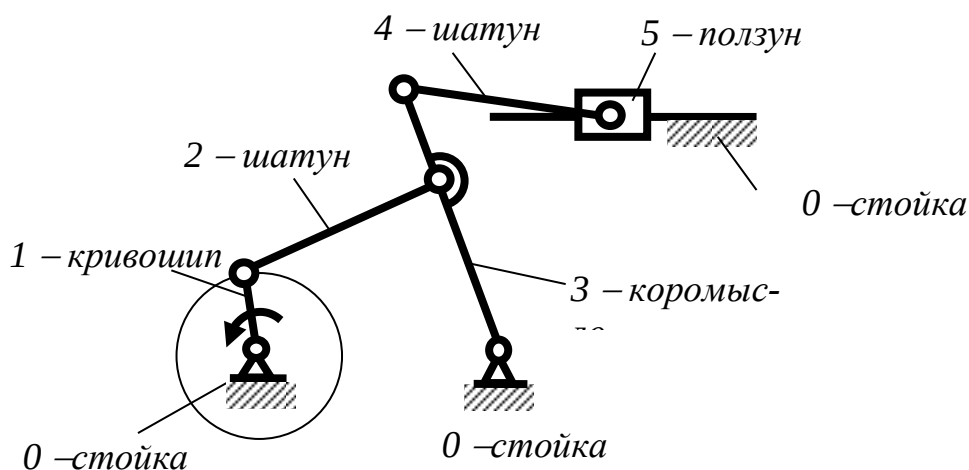


Рис. 2.7. Механизм качающегося конвейера

При изображении механизмов на чертежах применяют:
структурную (принципиальную) схему с применением условных обозначений без соблюдения размеров звеньев;
кинематическую схему с соблюдением размеров звеньев, необходимых для кинематического расчёта.

Классификация механизмов

По конструктивному исполнению звеньев механизмы делятся на следующие виды.

Рычажные – содержащие только низшие кинематические пары (рис. 2.8).



Рис. 2.8. Рычажные механизмы:

а – шарнирный четырёхзвенник; б – кулисный механизм

Зубчатые – содержащие зубчатые колёса (рис. 2.9).

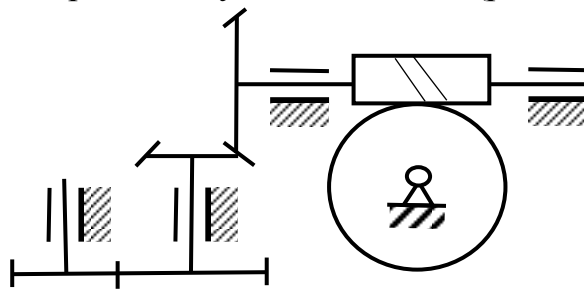


Рис. 2.9. Многоступенчатая зубчатая передача

Кулачковые – содержащие высшую кинематическую пару (рис. 2.10).

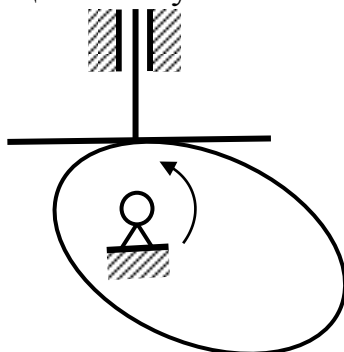


Рис. 2.10. Кулачковый механизм

Механизмы с гибкими звеньями—содержащие звенья, не являющиеся твёрдыми телами(рис. 2.11);

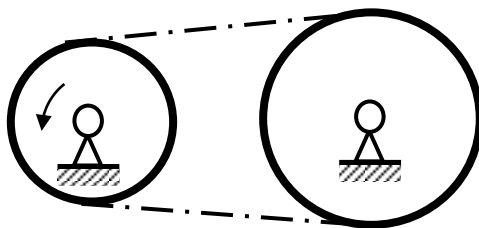


Рис. 2.11. Ремённая передача

Фрикционные, в которых передача движения происходит за счёт сил трения (рис. 2.12).

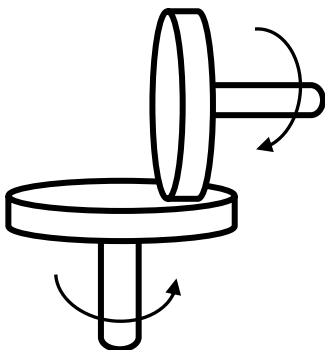


Рис. 2.12. Фрикционная передача

Кроме перечисленных здесь основных видов механизмов в технике применяются также и другие различные их виды.

По функциональному назначению механизмы делятся на виды в зависимости от характера движения их входных и выходных звеньев, например, кривошипно-ползунный, кривошипно-коромысловый и т.д.

Число степеней свободы механизма

В строении самых различных механизмов существуют общие закономерности, связывающие число степеней свободы механизма с числом звеньев и числом и видом кинематических пар в составе механизма.

Обозначим через n число подвижных звеньев механизма. Число одно-, двух-, трёх-, четырёх- и пятиподвижных кинематических пар обозначим через p_1, p_2, p_3, p_4 и p_5 , соответственно. Шесть степеней свободы твёрдого тела в пространстве можно рассматривать как шесть независимых координат, определяющих его положение (например, три координаты начала подвижной системы координат, связанной с телом, и три угла Эйлера, определяющие расположение осей подвижной системы координат относительно неподвижной). Если все подвижные звенья механизма были бы свободными телами, то общее число степеней свободы такой системы было бы равно $W = 6 \cdot n$. Однако каждая одно- подвижная пара налагает на относительное движение звеньев, образующих пару,

5 связей, каждая двухподвижная – 4 связи, каждая трёхподвижная – 3 связи и т.д. Следовательно, число степеней свободы пространственного механизма определяется формулой

$$W = 6n - (5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5). \quad (2.1)$$

Формула (2.1) называется структурной формулой Малышева для пространственных механизмов без избыточных связей.

В механизмах широкое применение нашли плоские кинематические цепи, которые содержат только одно- и двухподвижные кинематические пары. Пары с большим числом степеней свободы тоже могут входить в плоские цепи, но при этом каждая из них будет работать как одно- или двухподвижная.

Для плоских механизмов число степеней свободы определяется формулой Чебышева:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2, \quad (2.2)$$

где n – число подвижных звеньев механизма,

p_1 и p_2 – число одно- и двухподвижных кинематических пар механизма.

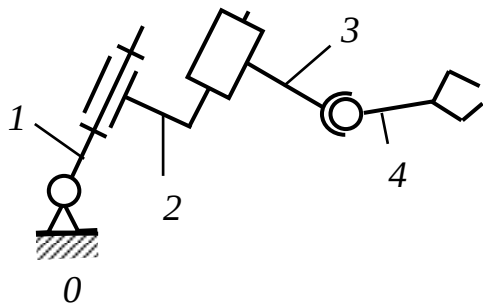
Вывод формулы Чебышева аналогичен выводу формулы Малышева.

Число степеней свободы механизма показывает, сколько входных звеньев имеет данный механизм.

В практике широко применяются плоские механизмы с одной степенью свободы и значительно реже – с двумя и более.

Рассмотрим примеры определения числа степеней свободы механизмов.

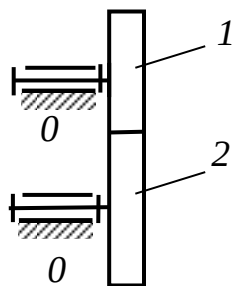
Пример 1. Пространственный механизм манипулятора (рис. 2.13).



$$\begin{aligned} n &= 4, \\ p_1 &= 3 \text{ (звенья 1 и 0, 1 и 2, 2 и 3)}, \\ p_2 &= 0, \\ p_3 &= 1 \text{ (звенья 3 и 4)}, \\ p_4 &= 0, p_5 = 0. \\ W &= 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5 = \\ &= 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 0 = 6. \end{aligned}$$

Рис. 2.13. Механизм манипулятора

Пример 2. Цилиндрическая зубчатая передача (рис. 2.14).



$$\begin{aligned} n &= 2, \\ p_1 &= 2 \text{ (звенья 1 и 0, 2 и 0)}, \\ p_2 &= 1 \text{ (звенья 1 и 2)}. \\ W &= 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Рис. 2.14. Зубчатая передача

Пример 3. Кривошипно-ползунный механизм (рис. 2.15).

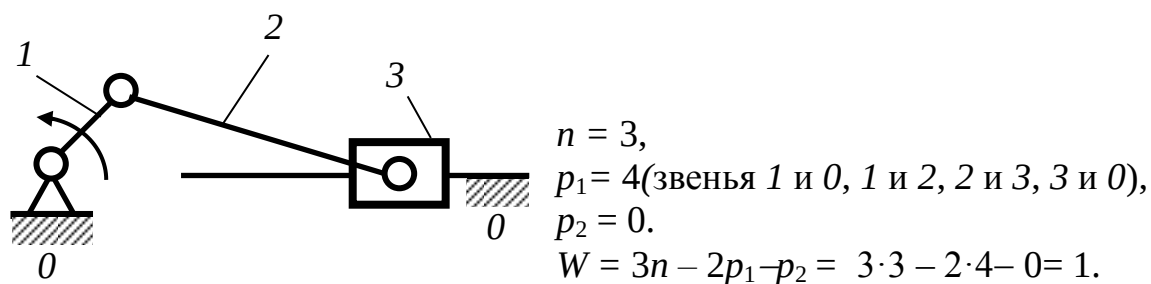


Рис. 2.15. Кривошипно-ползунный механизм

Структурный анализ и синтез плоских рычажных механизмов

Основные принципы структурного анализа и синтеза плоских рычажных механизмов и классификацию таких механизмов разработал и впервые предложил русский учёный Л.В. Ассур.



ЛЕОНИД ВЛАДИМИРОВИЧ АССУР
(1878 – 1920) – русский учёный, один из основателей отечественной научной школы по теории механизмов и машин. Создал основные принципы структурного анализа и синтеза плоских рычажных механизмов (1914 г.), которые являются наиболее распространёнными в настоящее время.

Метод образования механизмов с замкнутыми кинематическими цепями, разработанный Л.В. Ассуром, заключается в присоединении к элементарным механизмам структурных групп.

Структурная группа (группа Ассура) – элементарная кинематическая цепь, число степеней свободы которой относительно её внешних пар равно нулю.

Элементарный механизм, к которому необходимо присоединять группы Ассура для образования механизма, представляет собой **начальное звено и стойку**. Положение начального звена определяется **обобщённой координатой** (угловой или линейной). На рис. 2.16 изображены схемы начальных звеньев (звено 1, образующее пару со стойкой) и обобщённые координаты, определяющие положение начального звена 1 относительно стойки (угловая координата φ и линейная s).

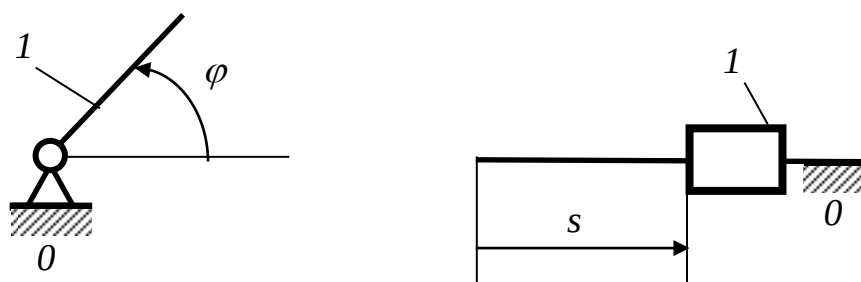


Рис. 2.16. Начальные звенья

Число степеней свободы группы Ассура относительно её внешних пар равно нулю т.е.

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 0, \quad (2.3)$$

где n —число звеньев группы;

p_1 — число одноподвижных пар в группе;

p_2 — число двухподвижных пар.

Так как группа Ассура содержит только одноподвижные вращательные и поступательные кинематические пары ($p_2 = 0$), то из уравнения (2.3) следует соотношение, связывающее число звеньев и кинематических пар в группе Ассура.

$$p_1 = (3/2)n. \quad (2.4)$$

Используя (2.4), составим табл. 2.1, содержащую разные варианты соотношений между числом звеньев и числом пар в группах Ассура.

Таблица 2.1. Число звеньев и число кинематических пар p_1 в структурных группах

Число звеньев и пар p_1 в группе	Варианты		
	a	b	c
n	2	4	6
p_1	3	6	9

Как видно из табл.2.1 (варианта), самая простая структурная группа содержит 2 звена ($n=2$) и 3 кинематических пары ($p_1 = 3$). Этому соответствуют двухповодковые структурные группы (рис. 2.17).

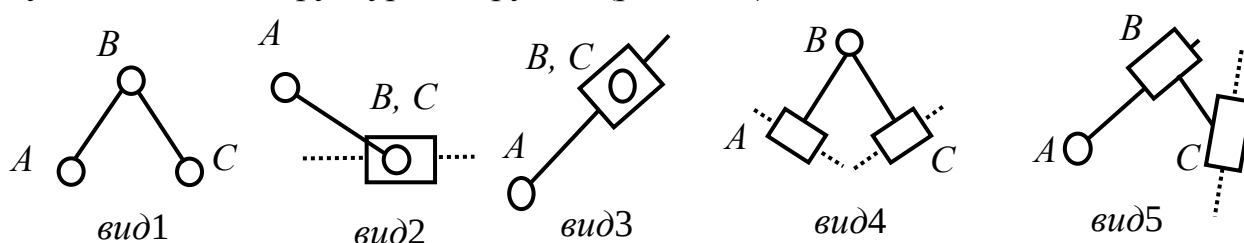


Рис. 2.17. Виды двухповодковых структурных групп

На рис. 2.17 внешние кинематические пары групп обозначены через A и C , а внутренняя пара – через B . Свободные внешние концы (A и C) звеньев (повод-

ков) группы имеют элементы пар, которыми группа присоединяется к механизму. Если присоединить структурную группу внешними парами к стойке, то получим жёсткую, неподвижную ферму.

Возможны 6 видов (модификаций) двухповодковой структурной группы в зависимости от сочетания вращательных и поступательных пар в группе.

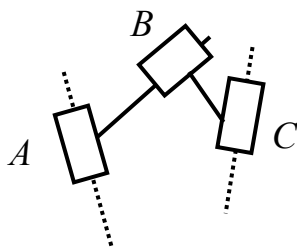


Рис. 2.18. Модификация двухповодковой группы с поступательными парами

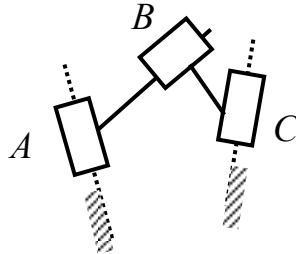


Рис. 2.19. Клиновой механизм

Одна модификация двухповодковой группы (рис. 2.18) с одними поступательными парами при присоединении её к свободными внешними парами к стойке даст кинематическую цепь с одной степенью свободы, т.е. будет являться клиновым механизмом (рис. 2.19).

Если группу вида 1 присоединить внешними парами A и C к начальному звену 1 и стойке 0, получим шарнирный четырёхзвенный механизм (рис. 2.20). Присоединив группу вида 2 к начальному звену и стойке, получим кривошипно-ползунный механизм (рис. 2.21).

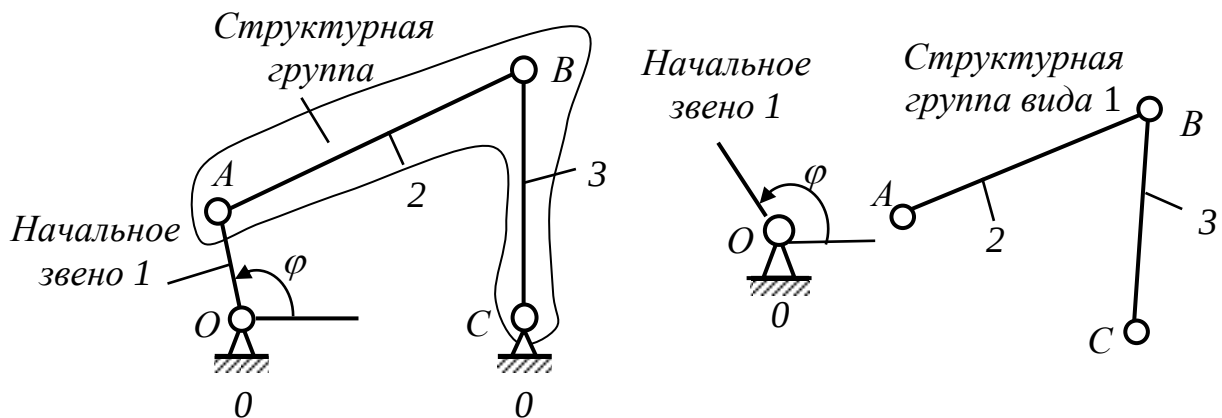


Рис. 2.20. Шарнирный четырёхзвенный механизм с двухповодковой структурной группой вида 1

Присоединив группу вида 2 к начальному звену и стойке, получим кривошипно-ползунный механизм (рис. 2.21).

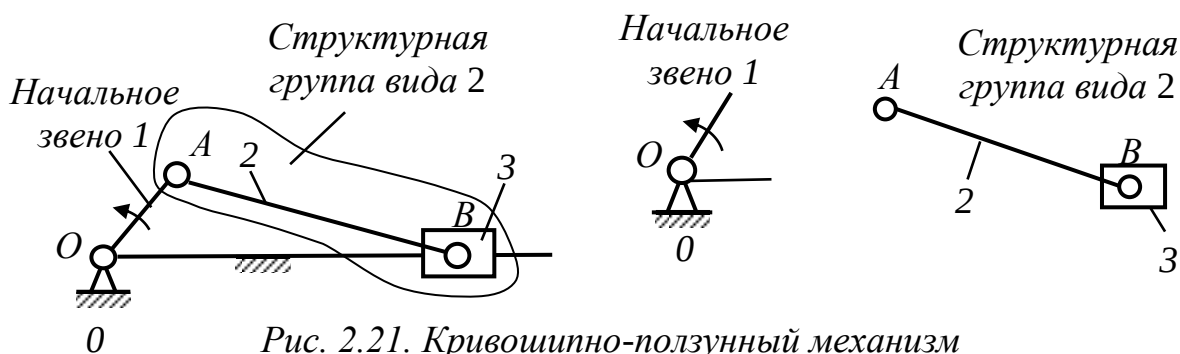


Рис. 2.21. Кривошипно-ползунный механизм с двухповодковой структурной группой вида 2

Следующая по сложности, как видно из табл. 2.1(вариантб), структурная группа содержит 4 звена ($n=4$) и шесть кинематических пар ($p_1=6$). Этому варианту соответствуют **четырёхзвенные трёхповодковые структурные группы**. На рис. 2.22 показаны некоторые модификации трёхповодковой группы. Четырёхзвенные трёхповодковые структурные группы допускают 16 модификаций, которые имеют нулевую степень свободы и обозначаются условных шифром в зависимости от видов входящих в них поводков. Кроме этого некоторые модификации представляют собой кинематические цепи с одной и двумя степенями свободы.

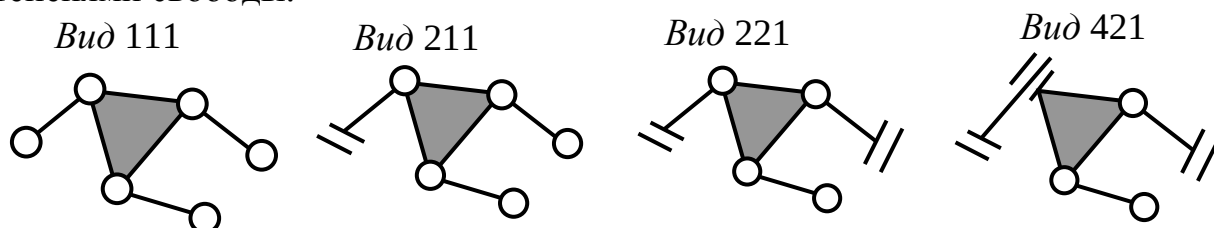


Рис. 2.22. Некоторые модификации трёхповодковой четырёхзвенной структурной группы

На рисунке 2.23 изображён механизм комбайна, в состав которого входит трёхповодковая группа вида 111.

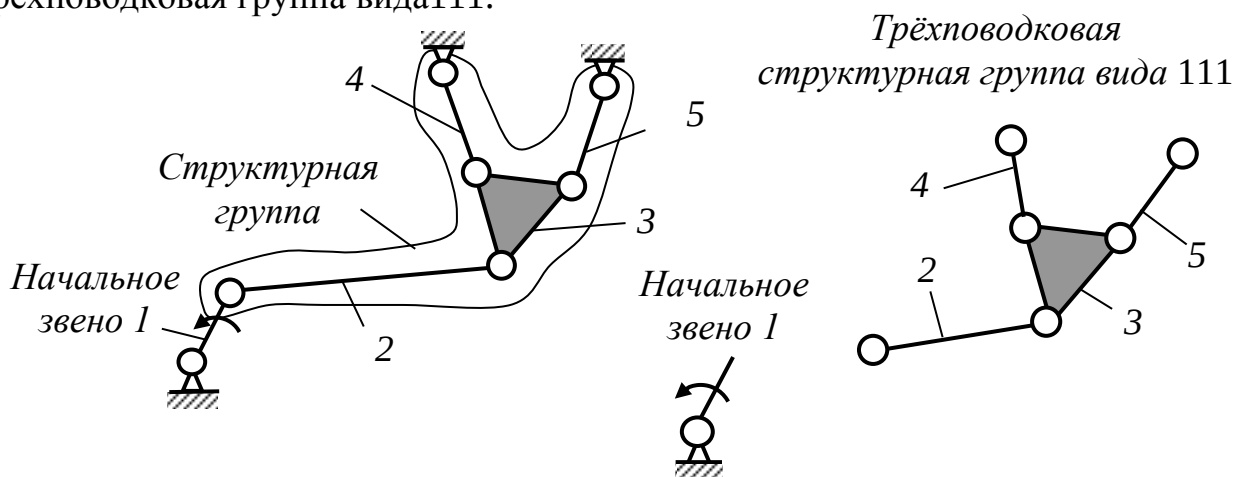


Рис. 2.23. Механизм комбайна с трёхповодковой группой

Варианту *б* табл. 2.1 соответствуют также **четырёхзвенные бесповодковые** структурные группы, которые можно обозначить шифрами в зависимости от вида внешних кинематических пар группы (вращательная или поступательная) и вида поводков, связывающих трёхпарные звенья группы. Общее число видов бесповодковой четырёхзвенной группы равно 19. На рис. 2.24 изображены некоторые виды бесповодковой четырёхзвенной группы.

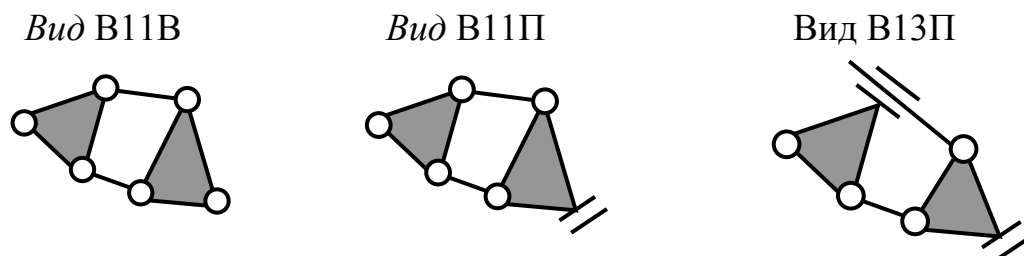


Рис. 2.24. Некоторые модификации бесповодковой четырёхзвенной структурной группы

На рис. 2.25 изображён механизм с бесповодковой четырёхзвенной группой вида В11В.

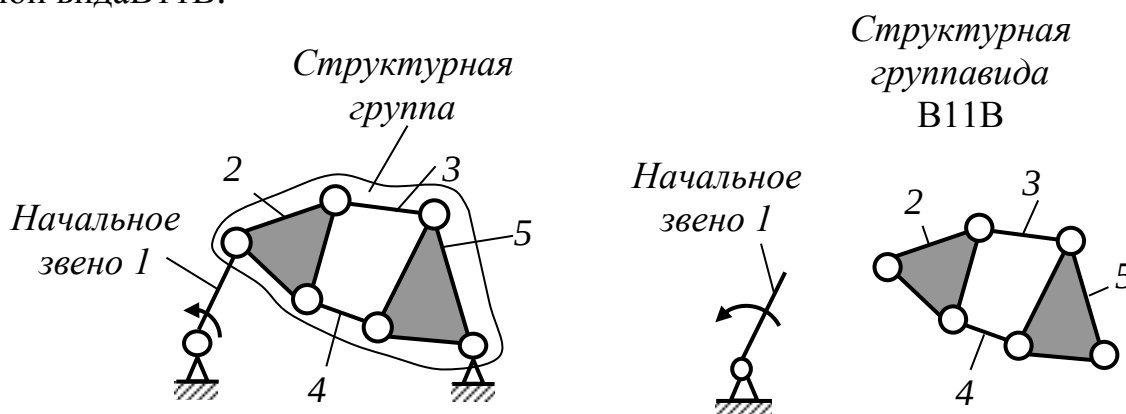


Рис. 2.25. Механизм с бесповодковой структурной группой

Следующая по сложности, как видно из табл. 2.1(вариант *в*), структурная группа содержит 6 звеньев ($n = 6$) и 9 кинематических пар ($p_1 = 9$). Этому варианту соответствуют **шестизвенные четырёхповодковые структурные группы**. На рис. 2.26 показаны некоторые модификации такой группы. Шестизвенные четырёхповодковые структурные группы обозначаются условных шифром в зависимости от видов входящих в них поводков и видом внутренней кинематической пары между трёхпарными звеньями.

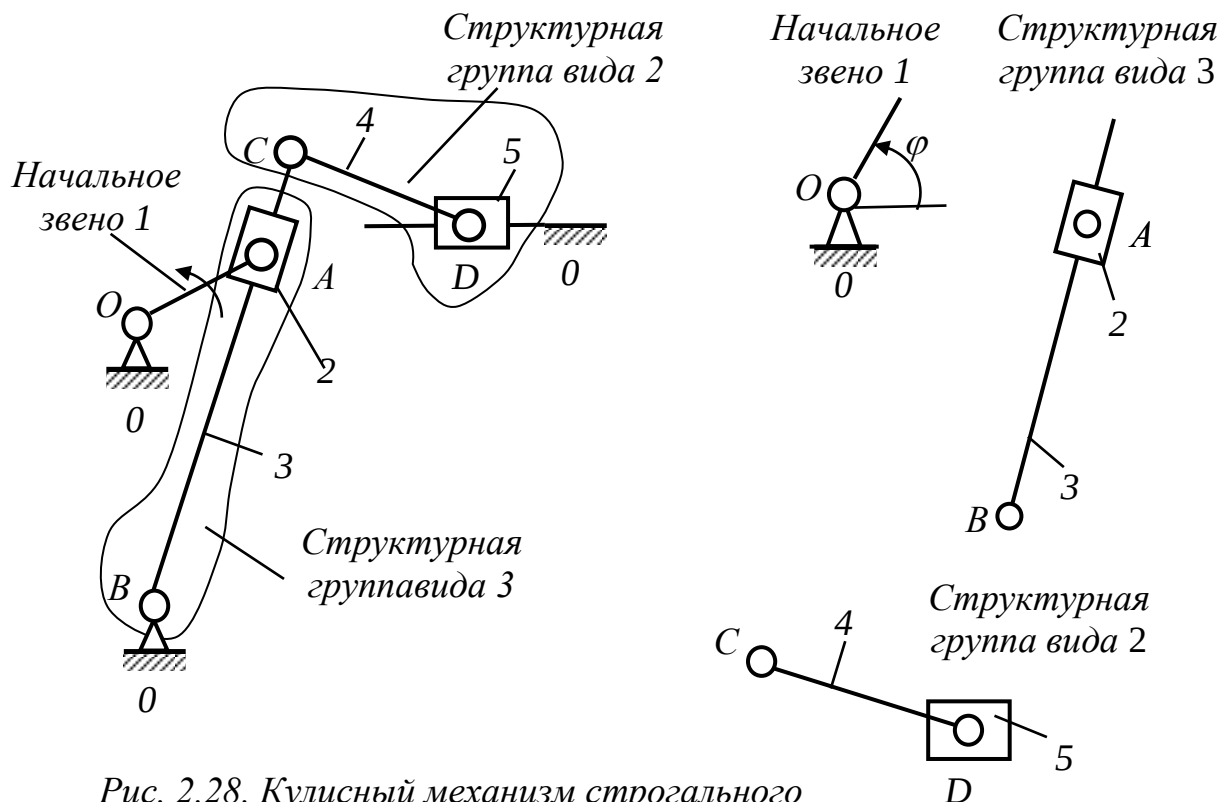


Рис. 2.28. Кулисный механизм строгального станка с двумя структурными группами

Структурные группы и плоские рычажные механизмы в зависимости от их строения делятся на классы. По классификации академика И.И. Артоболевского двухповодковые структурные группы относятся ко II классу. Это группы, изображённые на рис. 2.17. Группы, содержащие треугольные контуры, относятся к III классу (см. рис. 2.22 и 2.26). Группы, содержащие четырёхугольный контур, относятся к IV классу (рис. 2.24). Порядок структурной группы определяется числом внешних кинематических пар в группе.

Класс механизма определяется старшим классом структурной группы, входящей в его состав. На рисунках 2.20, 2.21 и 2.28 изображены механизмы II класса. На рисунке 2.23 и 2.27 изображены механизмы III класса. На рисунке 2.25 показан механизм IV класса.

Метод расчленения механизмов на структурные группы и начальный механизм представляет собой весьма эффективное средство при исследовании сложных механизмов. Задачи исследования большого многообразия механизмов этот метод позволяет заменить сравнительно небольшим числом задач исследования структурных групп. Это касается также кинематического и силового анализа сложных плоских рычажных механизмов.

ЛЕКЦИЯ 3

Кинематический анализ механизмов. Основные цели, задачи и методы

Целью кинематического анализа является исследование движения звеньев механизма без учёта действующих на них сил.

Основные задачи кинематического анализа:

- 1) определение положений звеньев механизма и построение траекторий отдельных точек;
- 2) определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма;
- 3) определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма.

Исходные данные для кинематического анализа механизма:

- 1) кинематическая схема механизма;
- 2) размеры звеньев механизма;
- 3) законы движения начальных звеньев.

Методы кинематического анализа механизма:

- 1) аналитические;
- 2) графоаналитические;
- 3) графические.

Метод исследования выбирается в зависимости от структуры механизма и требуемой точности расчёта.

Последовательность кинематического анализа механизма определяется последовательностью присоединения структурных групп к начальному звену и стойке.

Определение положений звеньев механизма

Рассмотрим графическое решение данной задачи на примере шарнирного четырёхзвенного механизма, схема которого изображена на рис.3.1. Механизм состоит из начального звена 1, входящего во вращательную пару со стойкой, и структурной группы звеньев 2, 3.

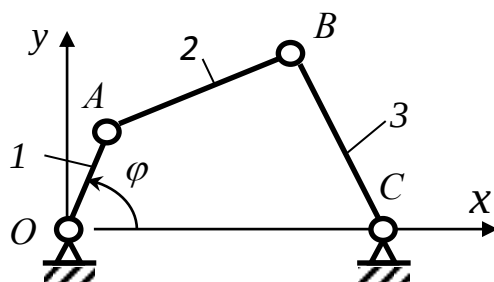


Рис. 3.1. Шарнирный четырёхзвенник

Размеры звеньев:

$$\begin{aligned}l_{OA} &= 0,2 \text{ м}, \\l_{AB} &= 0,3 \text{ м}, \\l_{CB} &= 0,4 \text{ м}, \\l_{OC} &= 0,6 \text{ м}, \\ \varphi &= 60^\circ.\end{aligned}$$

Последовательность графического решения задачи о положении механизма:

1. Выберем масштабный коэффициент длин μ_l , который показывает, сколько единиц природы (метров) содержится в 1 мм чертежа. При этом рекомендуется делать выбор из стандартного ряда масштабов. Примем длину отрезка OA , изображающего звено OA на чертеже, равной 20 мм. Тогда

$$\mu_l = l_{OA}/OA = 0,2/20 = 0,01 \text{ м / мм.}$$

2. Определим длины отрезков, изображающих остальные звенья на чертеже с учётом масштаба.

$$OC = l_{OC} / \mu_l = 0,6 / 0,01 = 60 \text{ мм;}$$

$$AB = l_{AB} / \mu_l = 0,3 / 0,01 = 30 \text{ мм;}$$

$$CB = l_{CB} / \mu_l = 0,4 / 0,01 = 40 \text{ мм.}$$

3. Построим на рис. 3.2 положения неподвижных опор O и C на расстоянии $OC = 60$ мм друг от друга.

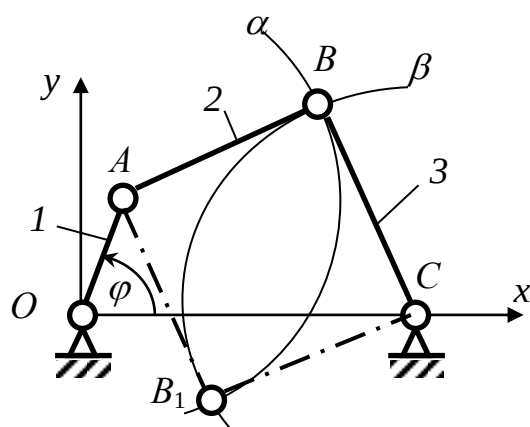


Рис. 3.2. План положений механизма

4. Построим положение звена 1, изобразив отрезок $OA = 20$ мм под углом $\varphi = 60^\circ$ к оси x .

5. Построим положения звеньев структурной группы 2, 3. Для этого проведём дугу окружности α радиусом $AB = 30$ мм с центром в точке A и дугу окружности β радиусом $CB = 40$ мм с центром в точке C . Точки пересечения окружностей α и β обозначим через B и B_1 . Получим положения шарнира B для двух вариантов сборки механизма.

Соединив прямыми линиями точки A и B , а также точки A и B_1 , получим два положения шатуна AB , каждое из которых соответствует своему варианту сборки механизма. Соединив прямыми линиями точки C и B , а также точки C и B_1 , получим два положения коромысла BC , каждое из которых также соответствует своему варианту сборки механизма.

Полученная на рис. 3.2 картина называется **планом положений** механизма. Изложенный метод построений называется **методом засечек**.

Графоаналитический метод планов скоростей и ускорений

Основа метода заключается в следующем. Плоское движение твёрдого тела (звена) можно представить как состоящее из двух движений: переносного и относительного.

Рассмотрим уравнения, связывающие скорости, а также ускорения точек звеньев плоского рычажного механизма, для двух случаев.

Случай 1. Две точки A и B принадлежат одному звену и лежат на расстоянии l_{AB} друг от друга, как это показано на рис.3.3.

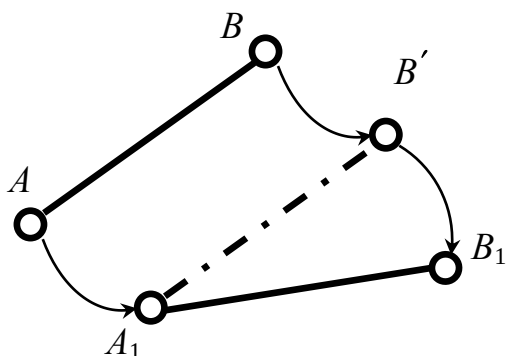


Рис. 3.3. Звено AB

Сложное движение звена из положения AB в положение A_1B_1 можно разложить на переносное поступательное движение вместе с точкой A (до положения A_1B) и относительное вращение звена вокруг точки A (до положения A_1B_1). Тогда скорость точки B можно определить векторной суммой:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

$\perp AB$

где $\vec{V}_A$ – скорость точки A в переносном поступательном движении звена;

$\vec{V}_{BA}$ – скорость точки B при вращении звена вокруг точки A (направлена перпендикулярно AB).

Ускорение точки B определяется векторной суммой:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t,$$

$\vec{a}_{BA}^n \perp AB$

где $\vec{a}_A$ – ускорение точки A ;

$\vec{a}_{BA}^n$ и $\vec{a}_{BA}^t$ – нормальное и тангенциальное ускорения точки B при вращении звена вокруг точки A ($\vec{a}_{BA}^n$ направлено от точки B к точке A , т.е. параллельно BA , $\vec{a}_{BA}^t$ – перпендикулярно AB).

Величина ускорения $\vec{a}_{BA}^n$ определяется формулой

$$a_{BA}^n = V_{BA}^2 / l_{AB}.$$

Случай 2. Две точки принадлежат разным звеньям 1 и 2, образующим поступательную кинематическую пару между собой, как это показано на рис.3.4. Точка B_1 принадлежит звену 1, а точка B_2 – звену 2. Точки B_1 и B_2 в данный момент времени совпадают друг с другом.

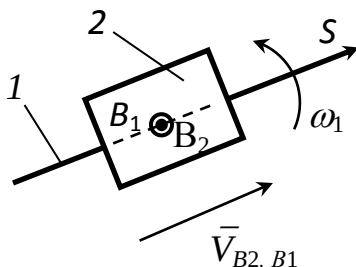


Рис. 3.4. Поступательная пара

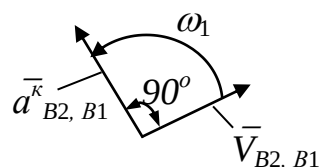


Рис. 3.5. Схема для определения направления ускорения Кориолиса

Сложное движение звена 2 можно разложить на переносное движение вместе со звеном 1 и относительное скольжение вдоль направляющей s . Скорость точки B_2 определяется векторной суммой:

$$\vec{V}_{B_2} = \vec{V}_{B_1} + \vec{V}_{B_2, B_1},$$

// s

где $\vec{V}_{B_1}$ – скорость точки B_1 ;

$\vec{V}_{B_2, B_1}$ – скорость точки B_2 относительно точки B_1 (направлена параллельно оси s).

Ускорение точки B_2 определяется векторной суммой:

$$\vec{a}_{B_2} = \vec{a}_{B_1} + \vec{a}_{B_2, B_1}^k + \vec{a}_{B_2, B_1}^r,$$

// s

где $\vec{a}_{B_1}$ – ускорение точки B_1 ;

$\vec{a}_{B_2, B_1}^k$ – ускорение Кориолиса;

$\vec{a}_{B_2, B_1}^r$ – ускорение скольжения точки B_2 относительно точки B_1 (направлено параллельно оси s).

Величина ускорения Кориолиса определяется формулой

$$a_{B_2, B_1}^k = 2 \cdot \omega_1 \cdot V_{B_2, B_1}.$$

Для определения направления ускорения Кориолиса необходимо повернуть на 90° вектор относительной скорости $\vec{V}_{B_2, B_1}$ в сторону угловой скорости ω_1 переносного движения, как это показано на рис.3.5.

Планом скоростей звена называется фигура, образованная концами векторов скоростей точек этого звена с общим полюсом.

План скоростей механизма представляет собой совокупность планов скоростей звеньев этого механизма с общим полюсом.

Понятия **плана ускорений звена** и **плана ускорений механизма** аналогичны понятиям **плана скоростей звена** и **плана скоростей механизма**.

Если найдены скорости и ускорения каких-либо двух точек звена, то скорости и ускорения других точек звена можно определить, используя **свойство подобия планов** положений, скоростей и ускорений звена. Свойство подобия планов заключается в следующем.

Фигура, образованная точками одного звена, подобна каждой из фигур, образованных концами векторов скоростей, и соответственно ускорений тех же точек звена на планах скоростей и ускорений звена.

Так, треугольник, образованный точками B , C и D звена на рис. 3.6, подобен треугольнику bcd на плане скоростей и треугольнику bcd на плане ускорений звена.

Например, если найдены скорости точек B и D звена, то нахождение скорости точки C этого звена сводится к построению на отрезке bd плана скоростей звена треугольника bdc , подобного треугольнику BDC . При этом каждая из сторон треугольника bdc на плане скоростей будет перпендикулярна соответствующей стороне треугольника BDC плана положений звена. Аналогично можно определить и ускорение точки C звена. Однако, треугольник

bdc на плане ускорений будет повернут относительно треугольника BDC на угол, отличный от 90° .

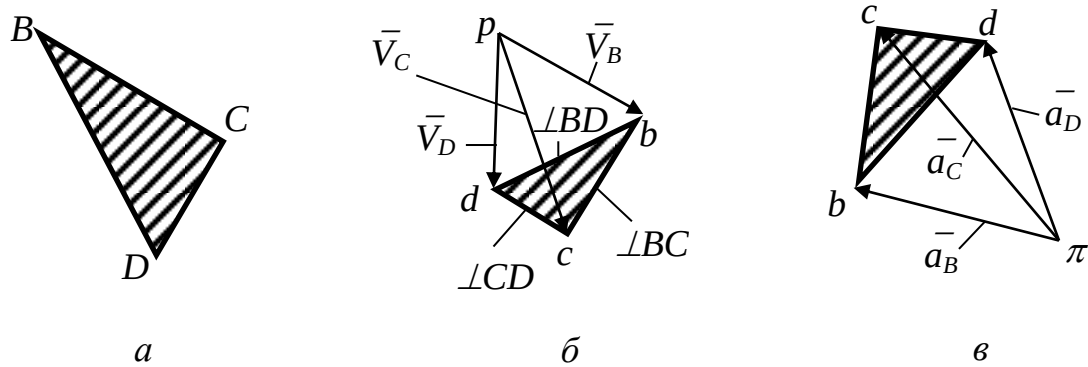


Рис. 3.6. Планы положения, скоростей и ускорений звена:
а – план положения; б – план скоростей; в – план ускорений

Из свойства подобия планов следуют соотношения:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{bd}{bc}, \quad \text{откуда } abc = bd \frac{BC}{BD}, \quad \frac{BD}{CD} = \frac{bd}{cd}, \quad \text{откуда } ccd = bd \frac{CD}{BD},$$

где BC , BD и CD – длины отрезков на плане положений звена,
 bc , bd и cd – длины отрезков на плане скоростей или плане ускорений.

ЛЕКЦИЯ 4

Примеры кинематического анализа плоских рычажных механизмов

Рассмотрим примеры построения планов положений, скоростей и ускорений различных плоских механизмов: кривошипно-ползунного, шарнирного четырёхзвенника, кулисного и механизма с качающимся цилиндром.

Пример 1. Кривошипно-ползунный механизм.

Схема механизма изображена на рис. 4.1. Размеры звеньев: $l_{OA} = 0,2$ м, $l_{AB} = 0,6$ м, $l_{AC} = l_{CB} = 0,4$ м, $l_{AS} = 0,2$ м, угол $\varphi = 150^\circ$. Начальное звено 1 вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_1 = 20$ рад/с.

Построение плана положений механизма

Для построения плана положений механизма выберем масштабный коэффициент μ_l таким, чтобы длина отрезка OA , изображающего начальное звено, была равна 20 мм, т.е. примем $OA = 20$ мм.

Тогда $\mu_l = l_{OA} / OA = 0,2 / 20 = 0,01$ м/мм.

Определим длины отрезков, изображающих на чертеже другие звенья механизма:

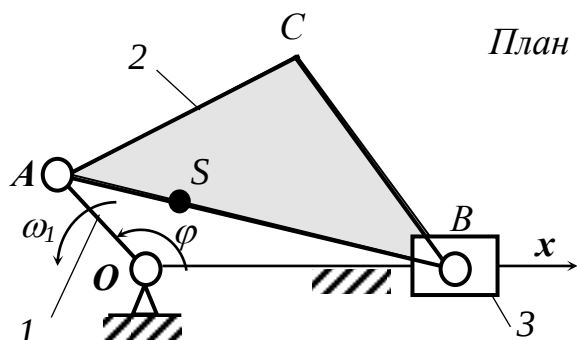
$$AB = l_{AB} / \mu_l = 0,6 / 0,01 = 60 \text{ мм};$$

$$AC = l_{AC} / \mu_l = 0,4 / 0,01 = 40 \text{ мм};$$

$$CB = AC = 40 \text{ мм},$$

$$AS = l_{AS} / \mu_l = 0,2 / 0,01 = 20 \text{ мм}.$$

Методом засечек построим на рис. 4.1 план положений механизма.



План положений, $\mu_l = 0,01 \text{ м/мм}$

План ускорений,

$$\mu_a = 2 \text{ (м/с}^2\text{)/мм}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t$$

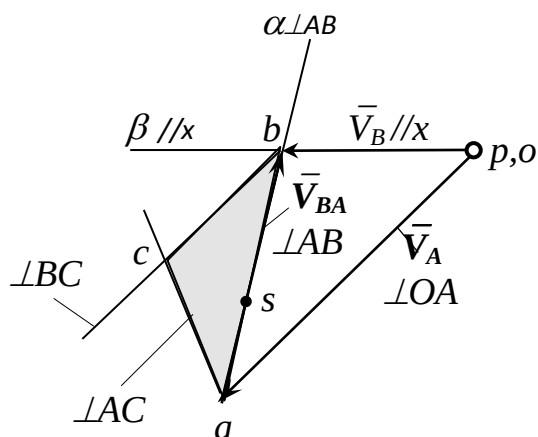
$//x \quad \uparrow \uparrow AO \quad \uparrow \uparrow BA \quad \perp AB$

План скоростей,

$$\mu_v = 0,1 \text{ (м/с)/мм}$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}$$

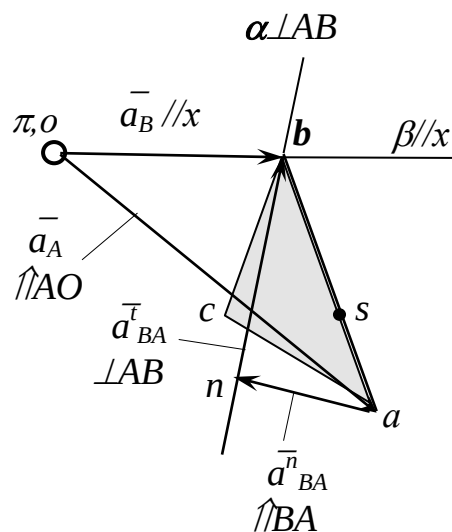
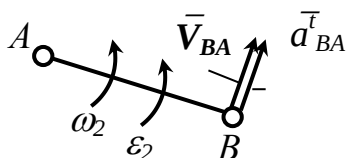
$//x \quad \perp OA \quad \perp AB$



Порядок построения
плана скоростей

1. $\bar{r}a \perp OA$.
2. $\alpha \perp AB$.
3. $\beta // x$.
4. $b = \alpha \cap \beta$.
5. $\triangle abc \sim \triangle ABC$.
6. $as/ab = AS/AB$.

Направления угловой
скорости ω_2 и углового
ускорения ε_2 звена AB



Порядок построения
плана ускорений

1. $\bar{\pi}a \uparrow \uparrow AO$.
2. $\bar{a}n \uparrow \uparrow BA$.
3. $\alpha \perp AB$.
4. $\beta // x$.
5. $b = \alpha \cap \beta$.
6. $\triangle abc \sim \triangle ABC$.
7. $as/ab = AS/AB$.

Рис. 4.1. Кривошипно-ползунный механизм

Построение плана скоростей механизма

Определим скорость точки A :

$$V_A = l_{OA} \cdot \omega_1 = 0,2 \cdot 20 = 4 \text{ м/с.}$$

Для построения плана скоростей выберем масштабный коэффициент μ_V таким, чтобы длина отрезка pa , изображающего вектор скорости $\vec{V}_A$ точки A , была равной 40 мм, т.е. примем $pa = 40$ мм.

$$\text{Тогда } \mu_V = V_A / pa = 4 / 40 = 0,1 \text{ (м/с)/мм.}$$

Изобразим на рис.4.1 вектор $\vec{pa}$, перпендикулярный OA , учитывая направление вращения звена 1. Вектор $\vec{pa}$ изображает скорость $\vec{V}_A$ точки A .

Движение звена 2 разложим на переносное, поступательное движение вместе с точкой A и относительное вращение вокруг точки A .

Скорость точки B определяется векторной суммой

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

$$//x \perp OA \quad \perp AB$$

где $\vec{V}_A$ – скорость точки A (направлена перпендикулярно OA);

$\vec{V}_{BA}$ – скорость точки B при вращении звена 2 вокруг точки A (направлена перпендикулярно AB);

$\vec{V}_B$ – вектор скорости точки B , направлен параллельно направляющей оси x .

Векторное уравнение, связывающее скорости точек, решаем графическим способом. Через точку a , которая является концом вектора $\vec{pa}$, проведём прямую α , перпендикулярную AB . Через точку p проведём прямую β , параллельную оси x . Точка пересечения прямых α и β даст конец вектора $\vec{pb}$, который изображает скорость $\vec{V}_B$ точки B . Вектор $\vec{ab}$ изображает относительную скорость $\vec{V}_{BA}$.

На отрезке ab построим треугольник abc , подобный треугольнику ABC плана положений. Причём каждая из сторон треугольника abc перпендикулярна соответствующей стороне треугольника ABC . Через точку a проведём прямую линию перпендикулярную AC , а через точку b – прямую, перпендикулярную BC . Точка пересечения этих прямых даст точку c .

Определим на плане скоростей точку s , используя свойство подобия планов.

$$\frac{as}{ab} = \frac{AS}{AB}, \text{ откуда } as = ab \frac{AS}{AB} = 35 \frac{20}{60} = 11,7 \text{ мм,}$$

где as и ab – длины отрезков на плане скоростей;

AS и AB – длины отрезков на плане положения.

Построенная таким образом фигура представляет собой план скоростей механизма.

Определим скорости точек по величине:

$$V_B = pb \cdot \mu_V = 15 \cdot 0,1 = 1,5 \text{ м/с;}$$

$$V_{BA} = ab \cdot \mu_V = 35 \cdot 0,1 = 3,5 \text{ м/с.}$$

Определим угловую скорость звена 2 по величине.

$$\omega_2 = V_{BA} / l_{AB} = 3,5 / 0,6 = 5,8 \text{ рад/с.}$$

Направление угловой скорости ω_2 звена 2 определяется направлением относительной скорости $\bar{V}_{BA}$ (см. схему на рис. 4.1).

Построение плана ускорений механизма

Определим ускорение точки A . Так как угловая скорость звена 1 задана постоянной, то ускорение точки A равно нормальному ускорению, т.е.

$$a_A = a_A^n = l_{OA} \cdot \omega_1^2 = 0,2 \cdot 20^2 = 80 \text{ м/с}^2.$$

Для построения плана ускорений выберем масштабный коэффициент μ_a таким, чтобы длина отрезка πa , изображающего вектор ускорения точки A , была равной 40 мм, т.е. примем $\pi a = 40 \text{ мм}$.

$$\text{Тогда } \mu_a = a_A / \pi a = 80 / 40 = 2 \text{ (м/с}^2\text{)/мм.}$$

Изобразим на рис.4.1 вектор πa , направленный от точки A к центру вращения O звена 1. Вектор πa изображает ускорение $\bar{a}_A$ точки A .

Ускорение точки B определяется векторной суммой:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t,$$

$$\parallel x \uparrow \angle AO \uparrow \angle BA \perp AB$$

где $\bar{a}_{BA}^n$ и $\bar{a}_{BA}^t$ – нормальное и тангенциальное ускорения точки B при вращении звена вокруг точки A ($\bar{a}_{BA}^n$ направлено от точки B к точке A , $\bar{a}_{BA}^t$ – перпендикулярно AB).

Определим нормальное ускорение $\bar{a}_{BA}^n$ по величине.

$$a_{BA}^n = V_{BA}^2 / l_{AB} = 3,5^2 / 0,6 = 20,4 \text{ м/с}^2.$$

Определим длину отрезка an , изображающего ускорение $\bar{a}_{BA}^n$ на чертеже.

$$an = a_{BA}^n / \mu_a = 20,4 / 2 = 10,2 \text{ мм.}$$

Векторное уравнение, связывающее ускорения точек, решим графическим способом. Проведём вектор an с началом в точке a , направленный из точки B в точку A . Через точку n проведём прямую α , перпендикулярную AB , а через точку π – прямую β , параллельную оси x . Точка пересечения прямых α и β даст конец вектора πb , который изображает ускорение $\bar{a}_B$ точки B . Вектор πb , перпендикулярный AB , изображает тангенциальное ускорение $\bar{a}_{BA}^t$. Точки a и b соединим прямой линией. На отрезке ab построим треугольник abc , подобный треугольнику ABC плана положений. При этом направление обхода по контуру abc на плане ускорений должно совпадать с направлением обхода по контуру ABC плана положений.

Определим на плане ускорений точку s , используя свойство подобия планов.

$$\frac{as}{ab} = \frac{AS}{AB}, \text{ откуда } as = ab \frac{AS}{AB} = 25 \frac{20}{60} = 8,3 \text{ мм,}$$

где as и ab – длины отрезков на плане ускорений;

AS и AB – длины отрезков на плане положений.

Построенная таким образом фигура представляет собой план ускорений механизма.

Определим ускорения точек по величине:

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a = 23 \cdot 2 = 46 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^t = \pi b \cdot \mu_a = 20 \cdot 2 = 40 \text{ м/с}^2.$$

Определим угловое ускорение звена 2 по величине:

$$\varepsilon_2 = a_{BA}^t / l_{AB} = 40 / 0,6 = 66,7 \text{ рад/с}^2.$$

Направление углового ускорения ε_2 звена 2 определяется направлением тангенциального ускорения a_{BA}^t (см. схему на рис. 4.1).

Пример 2. Шарнирный четырёхзвенный механизм.

Схема механизма изображена на рис. 4.2. Размеры звеньев: $l_{OA} = 0,2 \text{ м}$, $l_{OC} = 0,7 \text{ м}$, $l_{AB} = 0,4 \text{ м}$, $l_{BC} = 0,4 \text{ м}$, $l_{AD} = l_{BD} = 0,25 \text{ м}$, $l_{AS} = 0,1 \text{ м}$. Угол $\varphi = 120^\circ$. Начальное звено 1 вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_1 = 20 \text{ рад/с}$.

Построение плана положений механизма

Для построения плана положений механизма выберем масштабный коэффициент μ_l таким, чтобы длина отрезка OA , изображающего начальное звено 1, была равна 20 мм, т.е. примем $OA = 20 \text{ мм}$.

Тогда $\mu_l = l_{OA} / OA = 0,2 / 20 = 0,01 \text{ м/мм}$.

Определим длины отрезков, изображающих на чертеже другие звенья механизма:

$$OC = l_{OC} / \mu_l = 0,7 / 0,01 = 70 \text{ мм};$$

$$AB = l_{AB} / \mu_l = 0,4 / 0,01 = 40 \text{ мм};$$

$$BC = l_{BC} / \mu_l = 0,4 / 0,01 = 40 \text{ мм};$$

$$AD = l_{AD} / \mu_l = 0,25 / 0,01 = 25 \text{ мм};$$

$$BD = AD = 25 \text{ мм};$$

$$AS = l_{AS} / \mu_l = 0,1 / 0,01 = 10 \text{ мм}.$$

Методом засечек построим на рис. 4.2 план положений механизма.

Построение плана скоростей механизма

Определим скорость точки A :

$$V_A = l_{OA} \cdot \omega_1 = 0,2 \cdot 20 = 4 \text{ м/с}.$$

Для построения плана скоростей выберем масштабный коэффициент μ_v таким, чтобы длина отрезка ra , изображающего вектор скорости V_A точки A , была равной 40 мм, т.е. примем $ra = 40 \text{ мм}$.

Тогда $\mu_v = V_A / ra = 4 / 40 = 0,1 \text{ (м/с)/мм}$.

Изобразим на рис. 4.2 вектор ra , перпендикулярный OA , учитывая направление вращения звена 1. Вектор ra изображает скорость V_A точки A .

Движение звена 2 разложим на переносное, поступательное движение вместе с точкой A и относительное вращение вокруг точки A .

Скорость точки B определяется векторной суммой

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

$$\perp BC \perp OA \quad \perp AB$$

где $\vec{V}_A$ – скорость точки A (направлена перпендикулярно OA);

$\vec{V}_{BA}$ – скорость точки B при вращении звена 2 вокруг точки A (направлена перпендикулярно AB);

$\vec{V}_B$ – вектор скорости точки B , направлен перпендикулярно BC .

Векторное уравнение, связывающее скорости точек, решаем графическим способом. Через точку a , которая является концом вектора pa , проведём прямую α , перпендикулярную AB . Через точку p проведём прямую β , перпендикулярную BC . Точка пересечения прямых α и β даст конец вектора pb , который изображает скорость $\vec{V}_B$ точки B . Точки a и b соединим прямой линией. Вектор ab изображает скорость $\vec{V}_{BA}$.

На отрезке ab построим треугольник abd , подобный треугольнику ABD плана положений. Причём каждая из сторон треугольника abd на плане скоростей перпендикулярна соответствующей стороне треугольника ABD плана положений. Через точку a проведём прямую линию, перпендикулярную AD , а через точку b – прямую, перпендикулярную BD . Точка пересечения этих прямых даст точку d .

Определим точку s , используя свойство подобия планов.

$$\frac{as}{ab} = \frac{AS}{AB}, \text{ откуда } as = ab \frac{AS}{AB} = 36 \frac{10}{40} = 9 \text{ мм,}$$

где as и ab – длины отрезков на плане скоростей;

AS и AB – длины отрезков на плане положений.

Построенная таким образом фигура представляет собой план скоростей механизма.

Определим по величине скорости точек.

$$V_B = pb \cdot \mu_V = 24 \cdot 0,1 = 2,4 \text{ м/с.}$$

$$V_{BA} = ab \cdot \mu_V = 36 \cdot 0,1 = 3,6 \text{ м/с.}$$

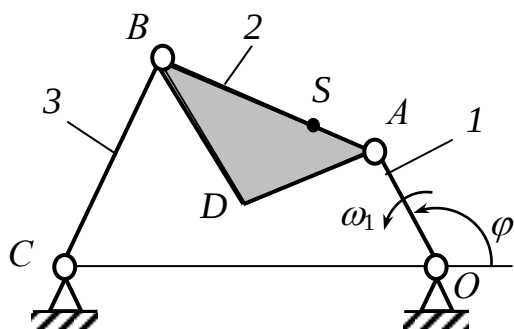
Определим по величине угловые скорости звеньев 2 и 3.

$$\omega_2 = V_{BA} / l_{AB} = 3,6 / 0,4 = 9 \text{ рад/с,}$$

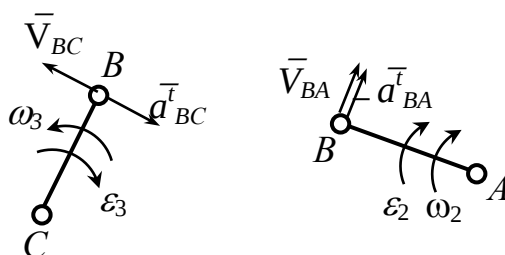
$$\omega_3 = V_B / l_{BC} = 2,4 / 0,4 = 6 \text{ рад/с.}$$

Направления угловых скоростей ω_2 и ω_3 определяются направлениями относительных скоростей $\vec{V}_{BA}$ и $\vec{V}_B$ соответственно (см. схему на рис. 4.2).

План положений, $\mu_l = 0,01$ м/мм



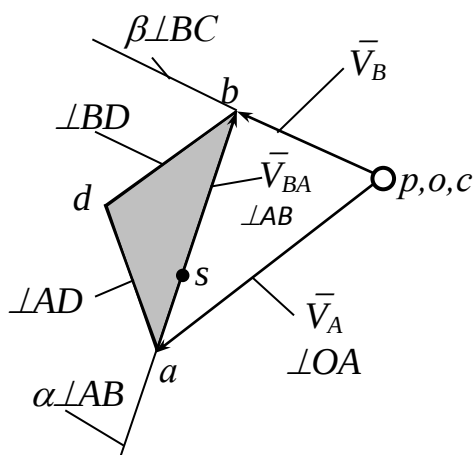
Направления угловых скоростей ω_2, ω_3 и угловых ускорений $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ звеньев



План скоростей, $\mu_l = 0,1$ (м/с)/мм

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

$$\perp BC \perp OA \quad \perp AB$$



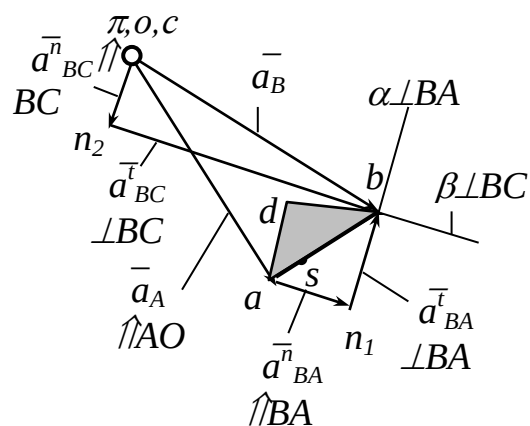
План ускорений, $\mu_a = 2$ (м/с²)/мм

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$$

$$\uparrow \nearrow AO \quad \uparrow \nearrow BA \quad \perp BA$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^t$$

$$= 0 \quad \uparrow \nearrow BC \quad \perp BC$$



Порядок построения
плана скоростей

1. $pa \perp OA$.
2. $\alpha \perp AB$.
3. $\beta \perp BC$.
4. $b = \alpha \cap \beta$.
5. $\triangle abd \sim \triangle ABD$.
6. $as/ab = AS/AB$.

Порядок построения
плана ускорений

1. $\pi a \uparrow \nearrow AO$.
2. $\alpha n_1 \uparrow \nearrow BA$.
3. $\alpha \perp AB$.
4. $\pi n_2 \uparrow \nearrow BC$.
5. $\beta \perp BC$.
6. $b = \alpha \cap \beta$.
7. $\triangle abd \sim \triangle ABD$.
8. $as/ab = AS/AB$.

Рис. 4.2. Шарнирный четырёхзвенный механизм

Построение плана ускорений механизма

Определим ускорение точки A . Так как угловая скорость звена 1 задана постоянной, то ускорение точки A равно нормальному ускорению, т.е. $a_A = a_A^n = l_{OA} \cdot \omega_1^2 = 0,2 \cdot 20^2 = 80 \text{ м/с}^2$.

Для построения плана ускорений выберем масштабный коэффициент μ_a таким, чтобы длина отрезка πa , изображающего вектор ускорения точки A , была равной 40 мм, т.е. примем $\pi a = 40 \text{ мм}$.

Тогда $\mu_a = a_A / \pi a = 80 / 40 = 2 \text{ (м/с}^2\text{)/мм}$.

Изобразим на рис. 4.2 вектор πa , направленный от точки A к центру вращения O звена 1. Вектор πa изображает ускорение a_A точки A .

Ускорение точки B определяется векторной суммой:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t,$$

$$\hat{\nearrow} AO \hat{\nearrow} BA \perp AB$$

где $\bar{a}_{BA}^n$ и $\bar{a}_{BA}^t$ – нормальное и тангенциальное ускорения точки B при вращении звена вокруг точки A ($\bar{a}_{BA}^n$ направлено от точки B к точке A , $\bar{a}_{BA}^t$ – перпендикулярно AB).

Точка B лежит на звене 3, которое вращается вокруг неподвижного центра C . Ускорение точки B при этом определяется векторной суммой:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^t,$$

$$= 0 \hat{\nearrow} BC \perp BC$$

где $\bar{a}_C$ – ускорение точки C (равно нулю);

$\bar{a}_{BC}^n$ и $\bar{a}_{BC}^t$ – нормальное и тангенциальное ускорения точки B при вращении звена 3 вокруг точки C ($\bar{a}_{BC}^n$ направлено от точки B к точке C , $\bar{a}_{BC}^t$ – перпендикулярно BC).

Векторные уравнения, связывающие ускорения точек, решим графическим способом.

Определим нормальные ускорения $\bar{a}_{BA}^n$ и $\bar{a}_{BC}^n$ по величине:

$$a_{BA}^n = V_{BA}^2 / l_{AB} = 3,6^2 / 0,4 = 32,4 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BC}^n = V_{BC}^2 / l_{BC} = 2,4^2 / 0,4 = 14,4 \text{ м/с}^2.$$

Здесь $V_{BC} = V_B = 2,4 \text{ м/с}$.

Определим длину отрезков πn_1 и πn_2 , изображающих нормальные ускорения $\bar{a}_{BA}^n$ и $\bar{a}_{BC}^n$, соответственно, на чертеже:

$$\pi n_1 = a_{BA}^n / \mu_a = 32,4 / 2 = 16,2 \text{ мм};$$

$$\pi n_2 = a_{BC}^n / \mu_a = 14,4 / 2 = 7,2 \text{ мм}.$$

Графическое решение векторных уравнений сводится к следующим построениям.

Проведём вектор πn_1 с началом в точке a , направленный из точки B в точку A . Через точку n_1 проведём прямую α , перпендикулярную AB . Проведём вектор πn_2 с началом в точке c , направленный из точки B в точку C . Точка c совпадает с полюсом π , так как ускорение точки C равно нулю. Через точку

n_2 проведём прямую β , перпендикулярную BC . Точка пересечения прямых a и β даст конец вектора πb , который изображает ускорение a_B точки B . Вектор $n_1 b$, перпендикулярный AB , изображает тангенциальное ускорение a_{BA}^t . Вектор $n_2 b$, перпендикулярный BC , изображает тангенциальное ускорение a_{BC}^t . Точки a и b соединим прямой линией. На отрезке ab построим треугольник abd , подобный треугольнику ABD плана положений. При этом направление обхода по контуру abd на плане ускорений должно совпадать с направлением обхода по контуру ABD плана положения.

Длины сторон треугольника abd определим из соотношений

$$\frac{ad}{ab} = \frac{AD}{AB}, \quad \text{откуда } ad = ab \frac{AD}{AB} = 18 \frac{25}{40} = 11,25 \text{ мм},$$

$$bd = ad = 11,25 \text{ мм},$$

где ad , ab , bd – длины отрезков на плане ускорений;

AD и AB и BD – длины отрезков на плане положения.

Определим на плане ускорений точку s , используя свойство подобия планов.

$$\frac{as}{ab} = \frac{AS}{AB}, \quad \text{откуда } as = ab \frac{AS}{AB} = 18 \frac{10}{40} = 4,5 \text{ мм},$$

где as и ab – длины отрезков на плане ускорений;

AS и AB – длины отрезков на плане положений.

Построенная таким образом фигура представляет собой план ускорений механизма.

Определим ускорения точек по величине:

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a = 50 \cdot 2 = 100 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{BA}^t = n_1 b \cdot \mu_a = 5 \cdot 2 = 10 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{BC}^t = n_2 b \cdot \mu_a = 49 \cdot 2 = 98 \text{ м/с}^2.$$

Определим угловые ускорения ε_2 и ε_3 звеньев 2 и 3 по величине:

$$\varepsilon_2 = a_{BA}^t / l_{AB} = 10 / 0,4 = 25 \text{ рад/с}^2;$$

$$\varepsilon_3 = a_{BC}^t / l_{BC} = 98 / 0,4 = 245 \text{ рад/с}^2.$$

Направления угловых ускорений ε_2 и ε_3 звеньев 2 и 3 определяются направлениями тангенциальных ускорений a_{BA}^t и a_{BC}^t , соответственно (см. схему на рис. 4.2).

Пример 3. Кулисный механизм.

Схема механизма изображена на рис. 4.3. Размеры звеньев: $l_{OA} = 0,2$ м, $l_{OB} = 0,5$ м, $l_{CB} = 0,8$ м, $l_{CD} = 0,25$ м, угол $\varphi = 60^\circ$. Начальное звено 1 вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_1 = 20$ рад/с.

Введём в рассмотрение точку A_3 , принадлежащую кулисе 3 и совпадающую с точкой A кулисного камня 2.

Построение плана положений механизма

Для построения плана положений механизма выберем масштабный коэффициент μ_l таким, чтобы длина отрезка OA , изображающего начальное звено, была равна 20 мм, т.е. примем $OA = 20$ мм.

Тогда $\mu_l = l_{OA} / OA = 0,2 / 20 = 0,01$ м/мм.

Определим длины отрезков, изображающих на чертеже другие звенья механизма:

$$OB = l_{OB} / \mu_l = 0,5 / 0,01 = 50 \text{ мм};$$

$$CB = l_{CB} / \mu_l = 0,8 / 0,01 = 80 \text{ мм};$$

$$CD = l_{CD} / \mu_l = 0,25 / 0,01 = 25 \text{ мм}.$$

Определим расстояние между точками A_3 и B кулисы 3:

$$l_{A_3B} = A_3B \cdot \mu_l = 60 \cdot 0,01 = 0,6 \text{ м},$$

где A_3B – длина отрезка на плане положений механизма.

На рис. 4.3 построим план положений механизма. Сначала построим положения неподвижных опор O и B , затем положение начального звена OA под углом $\varphi = 60^\circ$ к прямой OB , затем положение кулисы 3.

Построение плана скоростей механизма

Определим скорость точки A .

$$V_A = l_{OA} \cdot \omega_1 = 0,2 \cdot 20 = 4 \text{ м/с}.$$

Для построения плана скоростей выберем масштабный коэффициент μ_v таким, чтобы длина отрезка pa , изображающего вектор скорости точки A , была равной 40 мм, т.е. примем $pa = 40$ мм.

$$\text{Тогда } \mu_v = V_A / pa = 4 / 40 = 0,1 \text{ (м/с)/мм}.$$

Изобразим на рис. 4.3 вектор $\underline{pa}$, перпендикулярный $\underline{OA}$, учитывая направление вращения звена 1. Вектор $\underline{pa}$ изображает скорость $\underline{V}_A$ точки A .

Движение кулисы 3 разложим на переносное движение вместе со звеном 2 и движение скольжения относительно звена 2.

Скорость точки A_3 определяется векторной суммой

$$\underline{V}_{A_3} = \underline{V}_A + \underline{V}_{A_3A},$$

$$\perp A_3B \perp OA \quad // A_3B$$

где $\underline{V}_{A_3}$ – вектор скорости точки A_3 (направлен перпендикулярно к A_3B);

$\underline{V}_A$ – скорость точки A (направлена перпендикулярно OA);

$\underline{V}_{A_3A}$ – скорость точки A_3 при скольжении кулисы 3 относительно звена 2 (направлена параллельно A_3B).

Векторное уравнение, связывающее скорости точек, решаем графическим способом. Через точку a , которая является концом вектора $\underline{pa}$, проведём прямую α , параллельную A_3B , а через точку p проведём прямую β , перпендикулярную A_3B . Точка пересечения прямых α и β даст конец вектора $\underline{pa_3}$, который изображает скорость $\underline{V}_{A_3}$ точки A_3 . Вектор $\underline{aa_3}$ изображает

скорость $\bar{V}_{A3,A}$. Так как скорость точки B механизма равна нулю, то соответствующая ей точка b на плане скоростей совпадает с полюсом p .

Определим на плане скоростей точку c , используя свойство подобия планов:

$$\frac{bc}{ba_3} = \frac{BC}{BA_3}, \quad \text{откуда } bc = ba_3 \frac{BC}{BA_3} = 30 \frac{80}{60} = 40 \text{ мм},$$

где bc и ba_3 – длины отрезков на плане скоростей;

BC и BA_3 – длины отрезков на плане положения.

На отрезке bc построим треугольник bcd , подобный треугольнику BCD плана положений. Причём каждая из сторон треугольника bcd перпендикулярна соответствующей стороне треугольника BCD . Через точку c проведём прямую линию, перпендикулярную CD , а через точку b – прямую, перпендикулярную BD . Точка пересечения этих прямых даст точку d .

Построенная таким образом фигура представляет собой план скоростей механизма.

Определим скорости точек по величине:

$$V_{A3} = pa_3 \cdot \mu_V = 30 \cdot 0,1 = 3 \text{ м/с};$$

$$V_{A3,A} = aa_3 \cdot \mu_V = 28 \cdot 0,1 = 2,8 \text{ м/с};$$

$$V_{A3,B} = V_{A3} = 3 \text{ м/с}.$$

Определим угловую скорость ω_3 звена 3 по величине:

$$\omega_3 = V_{A3,B} / l_{A3B} = 3 / 0,6 = 5 \text{ рад/с}.$$

Угловые скорости звеньев 2 и 3 одинаковы, так как звенья 2 и 3 образуют между собой поступательную пару, т.е. $\omega_2 = \omega_3$.

Направление угловой скорости ω_3 звена 3 определяется направлением относительной скорости $\bar{V}_{A3,B}$ (см. схему на рис. 4.3).

Построение плана ускорений механизма

Определим ускорение точки A . Так как угловая скорость звена 1 задана постоянной, то ускорение точки A равно нормальному ускорению, т.е. $a_A = a_A^n = l_{OA} \cdot \omega_1^2 = 0,2 \cdot 20^2 = 80 \text{ м/с}^2$.

Для построения плана ускорений выберем масштабный коэффициент μ_a таким, чтобы длина отрезка πa , изображающего вектор ускорения a_A точки A , была равной 40 мм, т.е. примем $\pi a = 40 \text{ мм}$.

$$\text{Тогда } \mu_a = a_A / \pi a = 80 / 40 = 2 \text{ (м/с}^2\text{)/мм}.$$

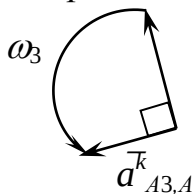
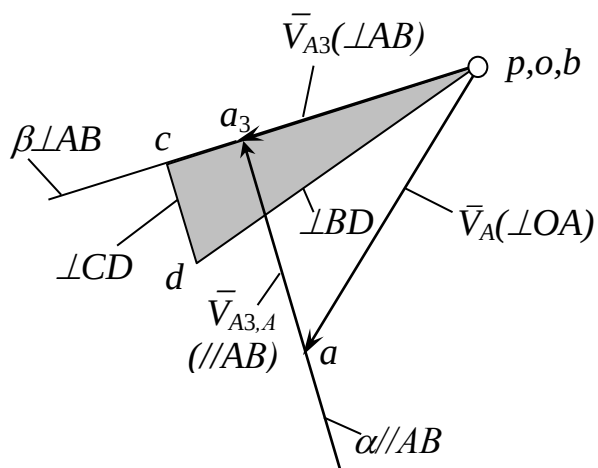
Изобразим на рис. 4.3 вектор πa , направленный от точки A к центру вращения O звена 1. Вектор πa изображает ускорение a_A точки A .

В полюс π плана ускорений поместим точку b , так как ускорение точки B равно нулю.

The diagram shows a mechanism with three links: link 1 is the fixed frame, link 2 is a triangular plate with vertices C , D , and B , and link 3 is a vertical guide bar. The triangle has a right angle at vertex C , indicated by a 90° angle. A block is attached to the triangle at point A and is constrained to move vertically along the guide bar. The block is labeled A, A_3 . The triangle rotates with angular velocity ω_1 and its orientation is defined by the angle φ between the vertical guide bar and the line OB . The pivot points O and B are fixed to the frame.

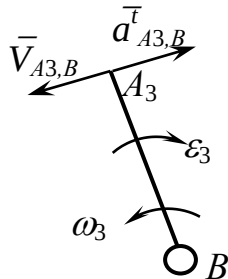
$$\begin{aligned} \vec{a}_{A3} &= \vec{a}_A + \vec{a}_{A3,A}^k + \vec{a}_{A3,A}^r \\ \text{//AO} \perp \text{A}_3\text{B} \text{ //A}_3\text{B} \\ \vec{a}_{A3} &= \vec{a}_B + \vec{a}_{A3,B}^n + \vec{a}_{A3,B}^t \\ &= 0 \text{//A}_3\text{B} \perp \text{A}_3\text{B} \end{aligned}$$

Ускорение Кориолиса


$$\begin{aligned}\bar{V}_{A3} &= \bar{V}_A + \bar{V}_{A3,A} \\ \perp OA & \parallel AB \\ \bar{V}_{A3} &= \bar{V}_B + \bar{V}_{A3,B} \\ &= 0 \quad \perp AB\end{aligned}$$


1. $\overline{pa} \perp OA$.
2. $\alpha // A_3B$.
3. $\beta \perp A_3B$.
4. $a_3 = \alpha \cap \beta$.
5. $bc/ba_3 = BC/BA$.
6. $\triangle bcd \sim \triangle BCD$.

*Направления
угловой скорости
и углового ускорения
звена 3*



1. $\overline{\pi a} \uparrow \! \! \uparrow AO.$
2. $\overline{ak} \perp A_3B.$
3. $\alpha \parallel A_3B.$
4. $\overline{bn} \uparrow \! \! \uparrow A_3B.$
5. $\beta \perp A_3B.$
6. $a_3 = \alpha \cap \beta.$
7. $bc/ba_3 = BC/BA_3.$
8. $\Delta bcd \sim \Delta BCD.$

Рис. 4.3. Кулисный механизм

Ускорение точки A_3 определяется векторной суммой

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_A + \bar{a}_{A_3,A}^k + \bar{a}_{A_3,A}^r,$$

$$\hat{\parallel} AO \perp A_3B \parallel A_3B$$

где $\bar{a}_{A_3,A}^k$ – ускорение Кориолиса;

$\bar{a}_{A_3,A}^r$ – ускорение скольжения точки A_3 относительно точки A , (направлено параллельно A_3B).

Точка A_3 лежит на звене 3, которое вращается вокруг неподвижного центра B . Ускорение точки A_3 определяется при этом векторной суммой

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_B + \bar{a}_{A_3,B}^n + \bar{a}_{A_3,B}^r,$$

$$= 0 \hat{\parallel} A_3B \perp A_3B$$

где $\bar{a}_B$ – ускорение точки B (равно нулю);

$\bar{a}_{A_3,B}^n$ и $\bar{a}_{A_3,B}^r$ – нормальное и тангенциальное ускорения точки A_3 при вращении звена 3 вокруг точки B ($\bar{a}_{A_3,B}^n$ направлено от точки A_3 к точке B , $\bar{a}_{A_3,B}^r$ – перпендикулярно A_3B).

Векторные уравнения, связывающие ускорения точек, решим графическим способом.

Определим ускорение Кориолиса по величине.

$$a_{A_3,A}^k = 2 \cdot \omega_2 \cdot V_{A_3,A} = 2 \cdot 5 \cdot 2,8 = 28 \text{ м/с}^2.$$

Определим нормальное ускорение $\bar{a}_{A_3,B}^n$ по величине:

$$a_{A_3,B}^n = V_{A_3,B}^2 / l_{A_3B} = 3^2 / 0,6 = 15 \text{ м/с}^2.$$

Определим длины отрезков ak и bn , изображающих ускорение Кориолиса $\bar{a}_{A_3,A}^k$ и нормальное ускорение $\bar{a}_{A_3,B}^n$ соответственно на чертеже:

$$ak = a_{A_3,A}^k / \mu_a = 28 / 2 = 14 \text{ мм};$$

$$bn = a_{A_3,B}^n / \mu_a = 15 / 2 = 7,5 \text{ мм}.$$

Определим направление ускорения Кориолиса. Для этого повернём вектор относительной скорости $\bar{V}_{A_3,A}$ на 90° в сторону переносной угловой скорости ω_2 (см. схему на рис. 4.3). Полученное направление даст направление вектора ускорения $\bar{a}_{A_3,A}^k$.

Графическое решение векторных уравнений сводится к следующим построениям.

Проведём вектор $\bar{ak}$ с началом в точке a . Через точку k проведём прямую α , параллельную A_3B . Проведём вектор $\bar{bn}$ с началом в точке b , совпадающей с полюсом π , и направленный из точки A_3 в точку B . Через точку n проведём прямую β , перпендикулярную A_3B . Точка пересечения прямых α и β даст конец вектора $\bar{\pi a_3}$, который изображает ускорение $\bar{a}_{A_3}$ точки A_3 . Вектор $\bar{k a_3}$ изображает ускорение относительного скольжения $\bar{a}_{A_3,A}^r$. Вектор $\bar{n a_3}$ изображает тангенциальное ускорение $\bar{a}_{A_3,B}^r$. Точки a_3 и b соединим прямой линией.

Определим положения точек c и d , используя свойство подобия планов.

$$\frac{bc}{ba_3} = \frac{BC}{BA_3}, \text{ откуда } abc = ba_3 \frac{BC}{BA_3} = 17 \frac{80}{60} = 22,7 \text{ мм},$$

$$\frac{cd}{bc} = \frac{CD}{BC}, \text{ откуда } cd = bc \frac{CD}{BC} = 22,7 \frac{25}{80} = 7 \text{ мм};$$

где bc , ba_3 и cd – длины отрезков на плане ускорений;
 BC , BA_3 и CD – длины отрезков на плане положений.

На отрезке bc плана ускорений построим треугольник bcd , подобный треугольнику BCD плана положений. При этом направление обхода по контуру bcd на плане ускорений должно совпадать с направлением обхода по контуру BCD плана положений.

Определим ускорения точек по величине:

$$a_{A3} = \pi a_3 \cdot \mu_a = 17 \cdot 2 = 34 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{A3,B}^t = \pi a_3 \cdot \mu_a = 15 \cdot 2 = 30 \text{ м/с}^2.$$

Определим угловые ускорения звеньев 2 и 3 по величине:

$$\varepsilon_3 = a_{A3,B}^t / l_{A3B} = 30 / 0,6 = 50 \text{ рад/с}^2.$$

Звенья 2 и 3 образуют поступательную пару между собой, поэтому $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ как по величине, так и по направлению. Направление углового ускорения ε_3 определяется направлением тангенциального ускорения $\vec{a}_{A3,B}^t$ (см. схему на рис. 4.3).

Пример 4. Механизм с качающимся цилиндром.

Схема механизма изображена на рис. 4.4. Размеры звеньев: $l_{OA} = 0,2 \text{ м}$, $l_{OB} = 0,6 \text{ м}$, $l_{AC} = 0,6 \text{ м}$, $l_{CD} = 0,2 \text{ м}$. Угол $\varphi = 30^\circ$. Начальное звено 1 вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_1 = 20 \text{ рад/с}$.

Введём в рассмотрение точку B_2 , принадлежащую звену 2 и совпадающую с точкой B звена 3.

Построение плана положения механизма

Для построения плана положений механизма выберем масштабный коэффициент μ_l таким, чтобы длина отрезка OA , изображающего начальное звено, была равна 20 мм, т.е. примем $OA = 20 \text{ мм}$.

Тогда $\mu_l = l_{OA} / OA = 0,2 / 20 = 0,01 \text{ м/мм}$.

Определим длины отрезков, изображающих на чертеже другие звенья механизма:

$$OB = l_{OB} / \mu_l = 0,6 / 0,01 = 60 \text{ мм};$$

$$AC = l_{AC} / \mu_l = 0,6 / 0,01 = 60 \text{ мм};$$

$$CD = l_{CD} / \mu_l = 0,2 / 0,01 = 20 \text{ мм}.$$

Определим расстояние l_{AB_2} между точками A и B_2 звена 2:

$$l_{AB_2} = AB_2 \cdot \mu_l = 45 \cdot 0,01 = 0,45 \text{ м},$$

где AB_2 – длина отрезка на плане положений.

На рис. 4.4 построим план положений механизма. Сначала построим положения неподвижных опор O и B , затем положение начального звена OA под углом $\varphi = 30^\circ$ к прямой OB , затем положение шатуна 2.

Построение плана скоростей механизма

Определим скорость точки A :

$$V_A = l_{OA} \cdot \omega_1 = 0,2 \cdot 20 = 4 \text{ м/с.}$$

Для построения плана скоростей выберем масштабный коэффициент μ_v таким, чтобы длина отрезка pa , изображающего вектор скорости V_A точки A , была равной 40 мм, т.е. примем $pa = 40$ мм.

$$\text{Тогда } \mu_v = V_A / pa = 4 / 40 = 0,1 \text{ (м/с)/мм.}$$

Изобразим на рис. 4.4 вектор pa , перпендикулярный OA , учитывая направление вращения звена 1. Вектор pa изображает скорость V_A точки A . В точку p поместим точку b , так как скорость точки B звена 3 равна нулю.

Движение звена 2 разложим на переносное, поступательное движение вместе с точкой A и относительное вращение вокруг точки A .

Скорость точки B_2 определяется векторной суммой

$$\bar{V}_{B_2} = \bar{V}_A + \bar{V}_{B_2,A},$$

$$\perp OA \perp AB_2$$

где $\bar{V}_A$ – скорость точки A (направлена перпендикулярно OA);

$\bar{V}_{B_2,A}$ – скорость точки B_2 при вращении звена 2 вокруг точки A (направлена перпендикулярно AB_2).

С другой стороны, движение звена 2 разложим на переносное движение вместе со звеном 3 и движение скольжения относительно звена 3.

Скорость точки B_2 определяется векторной суммой

$$\bar{V}_{B_2} = \bar{V}_B + \bar{V}_{B_2,B},$$

$$= 0 // AB_2$$

где $\bar{V}_B$ – скорость точки B (равна нулю);

$\bar{V}_{B_2,B}$ – скорость скольжения точки B_2 относительно точки B (направлена параллельно AB_2).

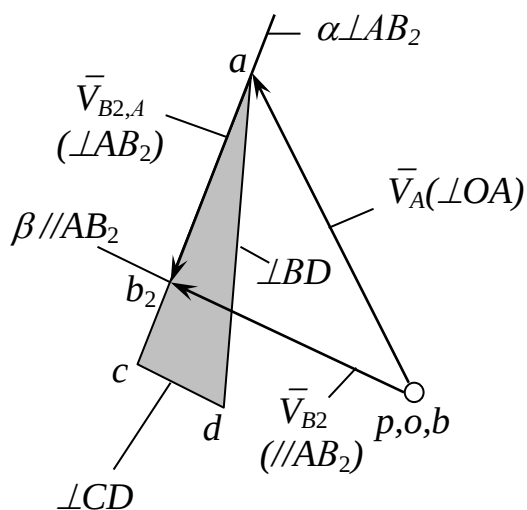
Векторные уравнения, связывающие скорости точек решаем графическим способом. Через точку a , которая является концом вектора pa , проведём прямую α , перпендикулярную AB_2 , а через точку p проведём прямую β , параллельную AB_2 . Точка пересечения прямых α и β даст конец вектора pb_2 , который изображает скорость V_{B_2} точки B_2 . Вектор ab_2 изображает скорость $\bar{V}_{B_2,A}$. Вектор скорости относительного скольжения $\bar{V}_{B_2,B}$ равен вектору скорости V_{B_2} точки B_2 .

План скоростей,
 $\mu_V = 0,1 \text{ (м/с)/мм}$

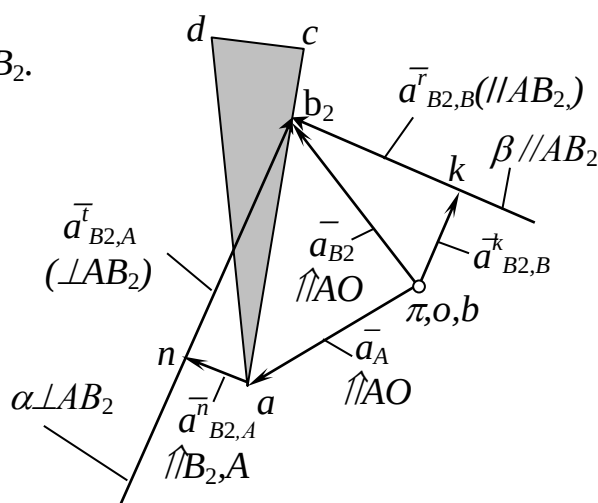
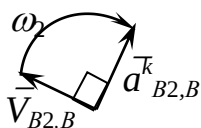
$$\begin{array}{l} \bar{V}_{B2} = \bar{V}_A + \bar{V}_{B2,A} \\ \perp OA \quad \perp AB_2 \\ \bar{V}_{B2} = \bar{V}_B + \bar{V}_{B2,B} \\ = 0 \quad // AB_2 \end{array}$$

1. $\overline{pa} \perp OA$.
2. $\alpha \perp AB_2$.
3. $\beta \parallel AB_2$.
4. $b_2 = \alpha \cap \beta$.
5. $ac / ab_2 = AC / AB_2$.
6. $\Delta acd \sim \Delta ACD$.

$$\begin{aligned} \bar{a}_{B_2} &= \bar{a}_A + \bar{a}_{B_2,A}^n + \bar{a}_{B_2,A}^t \\ \hat{AO} \hat{AB}_2 A \perp AB_2 \\ \bar{a}_{B_2} &= \bar{a}_B + \bar{a}_{B_2,B}^k + \bar{a}_{B_2,B}^r \\ &= 0 \quad \perp AB_2 \quad // AB_2 \end{aligned}$$



*Направление
ускорения Кориолиса*



1. $\overline{\pi a} \uparrow \uparrow \overline{AO}$.
2. $\overline{an} \uparrow \uparrow \overline{B_2A}$.
3. $\alpha \perp AB_2$.
4. $\overline{bk} \perp AB_2$.
5. $\beta \parallel AB_2$.
6. $a_3 = \alpha \cap \beta$.
7. $ac / ab_2 = AC / AB_2$.
8. $\Delta acd \sim \Delta ACD$.

Рис. 4.4. Механизм с качающимся цилиндром

Определим на плане скоростей точку c , используя свойство подобия планов:

$$\frac{ac}{ab_2} = \frac{AC}{AB_2}, \text{ откуда } ac = ab_2 \frac{AC}{AB_2} = 30 \frac{60}{45} = 40 \text{ мм},$$

где ac и ab_2 – длины отрезков на плане скоростей;
 AC и AB_2 – длины отрезков на плане положений.

На отрезке ac построим треугольник acd , подобный треугольнику ACD плана положений. Причём каждая из сторон треугольника acd перпендикулярна соответствующей стороне треугольника ACD . Через точку c проведём прямую линию, перпендикулярную CD , а через точку a – прямую, перпендикулярную AD . Точка пересечения этих прямых даст точку d .

Определим скорости точек по величине:

$$V_{B_2,A} = ab_2 \cdot \mu_v = 30 \cdot 0,1 = 3 \text{ м/с};$$

$$V_{B_2,B} = bb_2 \cdot \mu_v = 28 \cdot 0,1 = 2,8 \text{ м/с};$$

$$V_{B_2} = V_{B_2,B}.$$

Определим угловую скорость ω_2 звена 2 по величине:

$$\omega_2 = V_{B_2,A} / l_{AB_2} = 3 / 0,45 = 6,7 \text{ рад/с}.$$

Направление угловой скорости ω_2 звена 2 определяется направлением относительной скорости $\bar{V}_{B_2,A}$ (см. схему на рис. 4.4).

Так как звенья 2 и 3 образуют поступательную пару, то угловые скорости звеньев 2 и 3 одинаковы как по величине, так и по направлению, т.е. $\omega_2 = \omega_3$.

Построение плана ускорений механизма

Определим ускорение точки A . Так как угловая скорость звена 1 задана постоянной, то ускорение точки A равно нормальному ускорению т.е. $a_A = a_A^n = l_{OA} \cdot \omega_1^2 = 0,2 \cdot 20^2 = 80 \text{ м/с}^2$.

Для построения плана ускорений выберем масштабный коэффициент μ_a таким, чтобы длина отрезка πa , изображающего вектор ускорения a_A точки A , была равной 40 мм, т.е. примем $\pi a = 40 \text{ мм}$.

$$\text{Тогда } \mu_a = a_A / \pi a = 80 / 40 = 2 \text{ (м/с}^2\text{)/мм}.$$

Изобразим на рис. 4.4 вектор πa , направленный от точки A к центру вращения O звена 1. Вектор πa изображает ускорение a_A точки A .

Поместим в полюс π точку b , так как ускорение точки B звена 3 равно нулю.

Ускорение точки B_2 определяется векторными уравнениями:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{B_2} &= \bar{a}_B + \bar{a}_{B_2,A}^n + \bar{a}_{B_2,A}^t, \\ &\equiv 0 \wedge B_2A \perp AB_2 \end{aligned}$$

где a_B – ускорение точки B звена 3 (равно нулю);

$\bar{a}_{B_2,A}^n$ и $\bar{a}_{B_2,A}^t$ – нормальное и тангенциальное ускорения точки B_2 при вращении звена 2 вокруг точки A ($\bar{a}_{B_2,A}^n$ направлено от точки B_2 к точке A , $\bar{a}_{B_2,A}^t$ – перпендикулярно AB_2).

$$\bar{a}_{B_2} = \bar{a}_A + \bar{a}_{B_2,B}^k + \bar{a}_{B_2,B}^r,$$

$$\hat{AO} \perp AB_2 \quad // AB_2$$

где $\bar{a}_{B_2,B}^k$ – ускорение Кориолиса;

$\bar{a}_{B_2,B}^r$ – ускорение скольжения точки B_2 относительно точки B , (направлено параллельно AB_2).

Векторные уравнения, связывающие ускорения точек, решим графическим способом.

Определим нормальное ускорение $\bar{a}_{B_2,A}^n$ по величине.

$$\bar{a}_{B_2,A}^n = V_{B_2,A}^2 / l_{AB_2} = 3^2 / 0,45 = 20 \text{ м/с}^2.$$

Определим ускорение Кориолиса по величине:

$$\bar{a}_{B_2,B}^k = 2 \cdot \omega_2 \cdot V_{B_2,B} = 2 \cdot 6,7 \cdot 2,8 = 37,52 \text{ м/с}^2.$$

Определим длины отрезков an и bk , изображающих нормальное ускорение $\bar{a}_{B_2,A}^n$ и ускорение Кориолиса $\bar{a}_{B_2,B}^k$, соответственно, на чертеже:

$$an = \bar{a}_{B_2,A}^n / \mu_a = 20 / 2 = 10 \text{ мм};$$

$$bk = \bar{a}_{B_2,B}^k / \mu_a = 37,52 / 2 = 18,76 \text{ мм}.$$

Определим направление ускорения Кориолиса. Для этого повернём вектор относительной скорости $V_{B_2,B}$ на 90° в сторону переносной угловой скорости ω_2 (см. схему на рис. 4.4). Полученное направление даст направление ускорения $\bar{a}_{B_2,B}^k$.

Графическое решение векторных уравнений сводится к следующим построениям.

Проведём вектор $\bar{an}$ с началом в точке a и направленный из точки B_2 в точку A . Вектор $\bar{an}$ изображает нормальное ускорение $\bar{a}_{B_2,A}^n$. Через точку n проведём прямую α , перпендикулярную AB_2 . Проведём вектор $\bar{bk}$ с началом в точке b , совпадающей с полюсом π . Вектор $\bar{bk}$ изображает ускорение Кориолиса $\bar{a}_{B_2,B}^k$. Через точку k проведём прямую β , параллельную AB_2 . Точка пересечения прямых α и β даст конец вектора $\bar{pb}_2$, который изображает ускорение $\bar{a}_{B_2}$ точки B_2 . Вектор $\bar{nb}_2$ изображает тангенциальное ускорение $\bar{a}_{B_2,A}^t$. Вектор $\bar{kb}_2$ изображает ускорение относительного скольжения $\bar{a}_{B_2,B}^r$. Точки a и b_2 соединим прямой линией.

Определим положения точек c и d , используя свойство подобия планов:

$$\frac{ac}{ab_2} = \frac{AC}{AB_2}, \text{ откуда } ac = ab_2 \frac{AC}{AB_2} = 46 \frac{60}{45} = 61,3 \text{ мм};$$

$$\frac{cd}{ac} = \frac{CD}{AC}, \text{ откуда } cd = ac \frac{CD}{AC} = 61,3 \frac{20}{60} = 20,4 \text{ мм},$$

где ac , ab_2 и cd – длины отрезков на плане ускорений;

AC , AB_2 и CD – длины отрезков на плане положений.

На отрезке ac плана ускорений построим треугольник acd , подобный треугольнику ACD плана положений. При этом направление обхода по контуру acd на плане ускорений должно совпадать с направлением обхода по контуру ACD плана положений.

Определим ускорения точек по величине:

$$a_{B2} = \pi b_2 \cdot \mu_a = 42 \cdot 2 = 84 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{B2,A}^t = n b_2 \cdot \mu_a = 46 \cdot 2 = 92 \text{ м/с}^2,$$

где πb_2 и $n b_2$ – длины отрезков на плане ускорений.

Определим угловые ускорения звеньев 2 и 3 по величине:

$$\varepsilon_2 = a_{B2,A}^t / l_{AB2} = 92 / 0,45 = 204,4 \text{ рад/с}^2.$$

Направление углового ускорения ε_2 определяется направлением тангенциального ускорения $a_{B2,A}^t$ (см. схему на рис. 4.4). Звенья 2 и 3 образуют поступательную пару между собой, поэтому угловые ускорения звеньев 2 и 3 одинаковы как по величине, так и по направлению, т.е. $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$.

Приведённые примеры кинематического анализа плоских механизмов с одной структурной группой можно использовать и для механизмов с несколькими группами, комбинируя рассмотренные решения между собой.

ЛЕКЦИЯ 5

Аналитическая кинематика плоских рычажных механизмов

Достоинства графических методов исследования механизмов заключаются в их большой наглядности и простоте. Недостатки метода – ограниченная точность и громоздкость, связанные с большим количеством построений.

В тех случаях, когда необходимо получить кинематические характеристики механизма с высокой, заранее заданной точностью, применяют аналитические методы. Широкое развитие в настоящее время электронно-вычислительной техники позволяет с помощью аналитических методов получить очень быстро и точно различные кинематические характеристики механизмов.

Основные этапы кинематического анализа механизма аналитическим методом

1. Выбор системы отсчёта (прямоугольной или другой системы координат).
2. Введение системы параметров, определяющих положения подвижных звеньев механизма относительно стойки. Параметры, определяющие положения начальных звеньев, предполагаем независимыми.
3. Используя геометрические соотношения, устанавливаем зависимости параметров выходных звеньев механизма от параметров начальных звеньев.

4. Определение скоростей и ускорений выходных звеньев путём дифференцирования полученных равенств по времени.

Рассмотрим использование аналитического метода кинематического анализа механизмов в общем виде на примере (рис. 5.1).

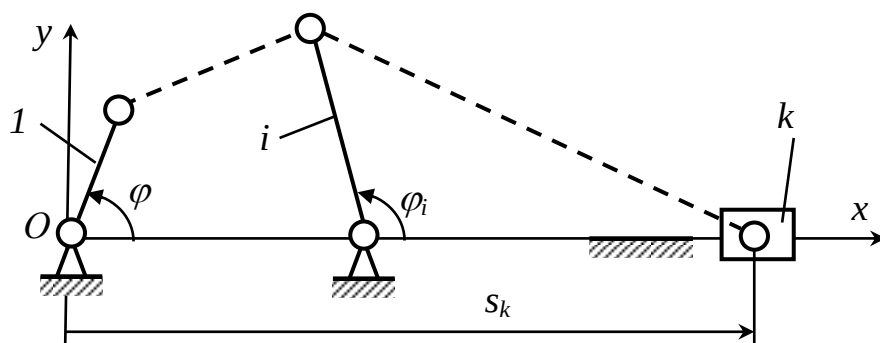


Рис. 5.1. Плоский рычажный механизм

1. В качестве системы отсчёта примем прямоугольную систему координат x, y с началом в точке O .

2. В качестве параметров, определяющих положения подвижных звеньев механизма относительно стойки, примем следующие:

φ —угловая координата начального звена 1;

φ_i —угловая координата выходного звена i ;

s_k —линейная координата выходного звена k .

3. Обозначим через $\varphi_i = \varphi_i(\varphi)$ функцию угла поворота φ_i в зависимости от угла φ . Аналогично обозначим через $s_k = s_k(\varphi)$ функцию перемещения s_k в зависимости от угла φ .

4. Угловая скорость ω_i выходного звена i определяется дифференцированием по времени:

$$\omega_i = \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{d\varphi_i}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5.1)$$

где $\frac{d\varphi_i}{d\varphi} = \varphi_i'$ —аналог угловой скорости выходного звена i ;

$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ —угловая скорость начального звена 1.

Тогда из (5.1) получим:

$$\omega_i = \omega \cdot \frac{d\varphi_i}{d\varphi},$$

или $\omega_i = \omega \cdot \varphi_i'$. (5.2)

Аналогично определяется скорость выходного звена k :

$$V_k = \frac{ds_k}{dt} = \frac{ds_k}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad (5.3)$$

где $\frac{ds_k}{d\varphi} = s_k'$ —аналог скорости выходного звена k .

Из (5.3) получим:

$$s_k = \omega \frac{ds_k}{d\varphi},$$

или $s_k = \omega \cdot s_k'.$ (5.4)

Чтобы найти ускорения выходных звеньев механизма, необходимо продифференцировать полученные выражения (5.2) и (5.4) по времени.

Определим угловое ускорение ε_i выходного звена i :

$$\varepsilon_i = \frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d\omega_i}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2\varphi_i}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{dt}$$

или $\varepsilon_i = \varphi_i'' \cdot \omega^2,$ (5.5)

где $\varphi_i'' = \frac{d^2\varphi_i}{d\varphi^2}$ — аналог углового ускорения выходного звена i .

Аналогично определим ускорение a_k выходного звена k механизма:

$$a_k = \frac{dV_k}{dt} = \frac{dV_k}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2s_i}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{dt}$$

или $a_k = s_k'' \cdot \omega^2,$ (5.6)

где $s_k'' = \frac{d^2s_i}{d\varphi^2}$ — аналог углового ускорения выходного звена k .

Примеры кинематического анализа механизмов аналитическим методом

Пример 1. Определить функцию положения $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi)$ кулисы 3 в зависимости от угла поворота φ кривошипа 1 кулисного механизма (рис. 5.2). Заданы размеры звеньев механизма: l_{OA} , l_{OB} и угол φ , определяющий положение кривошипа 1.

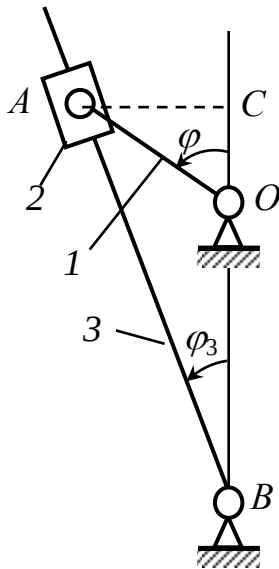


Рис. 5.2. Кулисный механизм

Из треугольника ABC следует

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{AC}{BC}.$$

Из треугольника OAC следует

$$AC = l_{OA} \cdot \sin \varphi \text{ и } OC = l_{OA} \cdot \cos \varphi.$$

Учитывая, что $BC = BO + OC$ или

$$BC = l_{OB} + l_{OA} \cdot \cos \varphi,$$

получим

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{l_{OA} \cdot \sin \varphi}{l_{OB} + l_{OA} \cdot \cos \varphi}.$$

$$\text{Или } \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{\sin \varphi}{\lambda - \cos \varphi},$$

где $\lambda = \frac{l_{OA}}{l_{OB}}.$

$$\text{Тогда } \varphi_3 = \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi}{\lambda - \cos \varphi}.$$

Пример 2. Определить скорость выходного звена 3 в заданном положении тангенсного механизма (рис. 5.3). Кривошип 1 является входным звеном механизма. Заданы: расстояние $h = 0,1$ м, угол, определяющий положение кривошипа $\varphi = 45^\circ$, угловая скорость кривошипа $\omega = 20$ рад / с.

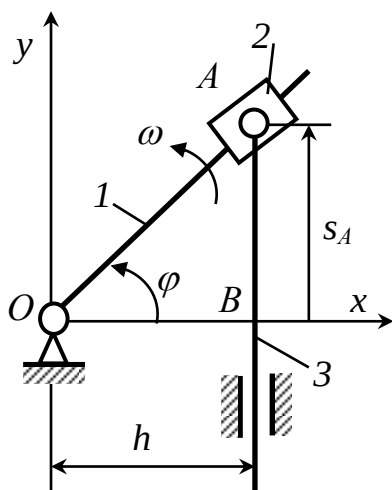


Рис. 5.3. Тангенсный механизм

Перемещение выходного звена 3 определяется линейной координатой s_A .

Из треугольника OAB следует $s_A = AB = h \cdot \operatorname{tg} \varphi$.

Скорость V_A звена 3 определяется производной перемещения s_A по времени:

$$V_A = \frac{ds_A}{dt} = \frac{ds_A}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

где $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$.

Определим аналог скорости звена 3.

$$\frac{ds_A}{d\varphi} = \frac{h}{\cos^2 \varphi}.$$

Тогда скорость звена 3 определяется соотношением:

$$V_A = \omega \cdot \frac{ds_A}{d\varphi} = \omega \cdot \frac{h}{\cos^2 \varphi} = 20 \cdot \frac{0,1}{\cos^2 45^\circ} = 50,3 \text{ м/с}.$$

Пример 3. Определить скорость и ускорение выходного звена 3 в заданном положении синусного механизма (рис. 5.4). Кривошип 1 является входным звеном механизма. Заданы: размер кривошипа $l_{OA} = 0,1$ м, угол, определяющий положение кривошипа $\varphi = 45^\circ$, угловая скорость кривошипа $\omega = 100$ рад / с.

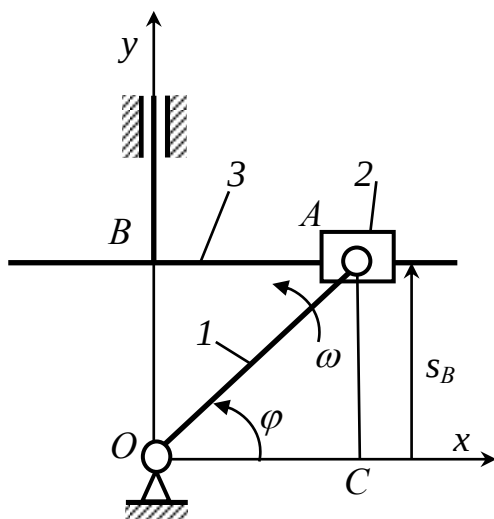


Рис. 5.4. Синусный механизм

Перемещение выходного звена 3 определяется линейной координатой s_B .

Из треугольника OAC следует $s_B = AC = l_{OA} \cdot \sin \varphi$.

Скорость V_B звена 3 определяется производной перемещения s_B по времени:

$$V_B = \frac{ds_B}{dt} = \frac{ds_B}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds_B}{d\varphi} \cdot \omega.$$

Определим аналог скорости звена 3.

$$\frac{ds_B}{d\varphi} = l_{OA} \cdot \cos \varphi.$$

Тогда скорость выходного звена 3 определяется соотношением:

$$V_B = \omega \cdot \frac{ds_B}{d\varphi} = \omega \cdot l_{OA} \cdot \cos \varphi = 100 \cdot 0,1 \cdot \cos 45^\circ = 7,1 \text{ м/с}.$$

Ускорение звена 3 определяется производной скорости V_B по времени:

$$a_B = \frac{dV_B}{dt} = \frac{dV_B}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2 s_B}{d\varphi^2} \cdot \omega^2.$$

Определим аналог ускорения звена 3.

$$\frac{dV_B}{d\varphi} = l_{OA} \cdot (-\sin \varphi).$$

Тогда ускорение выходного звена 3 определяется соотношением:

$$a_B = \omega^2 \cdot l_{OA} \cdot (-\sin \varphi) = 100^2 \cdot 0,1 \cdot (-\sin 45^\circ) = -710 \text{ м/с}^2.$$

Отрицательный знак ускорения a_B здесь указывает на замедленное движение выходного звена 3, так как знак скорости V_B не совпадает здесь со знаком ускорения a_B .

Пример 4. Определить зависимости перемещения, скорости и ускорения ползуна 3 кривошипно-ползунного механизма (рис. 5.5) от угла поворота кривошипа 1. Кривошип 1 является входным звеном механизма. Заданы: l_{OA} , l_{AB} – размеры звеньев, φ – угол, определяющий положение кривошипа, ω – угловая скорость кривошипа.

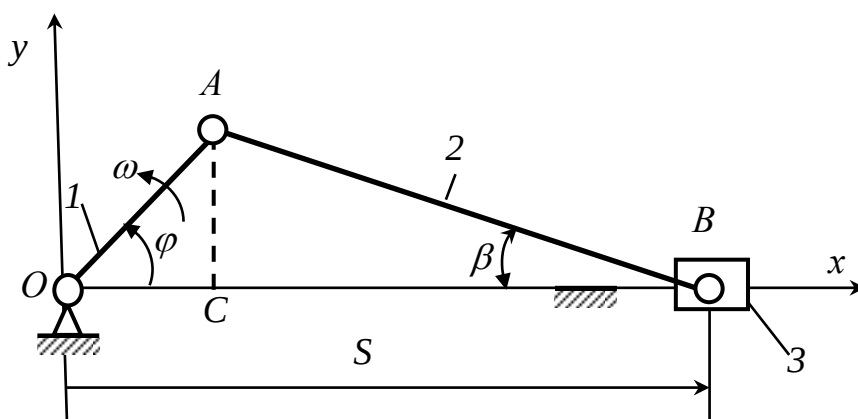


Рис. 5.5. Кривошипно-ползунный механизм

Введём обозначения: $r = l_{OA}$; $l = l_{AB}$; $\lambda = r / l$.

Из построений на рис. 5.5 выразим перемещение S ползуна:

$$S = OC + CB = r \cdot \cos \varphi + l \cdot \cos \beta. \quad (5.7)$$

Из треугольников OAC и ABC на рис. 5.5 следует:

$$AC = r \cdot \sin \varphi \text{ и } AC = l \cdot \sin \beta.$$

Откуда

$$r \cdot \sin \varphi = l \cdot \sin \beta \text{ или } \sin \beta = \lambda \cdot \sin \varphi.$$

Отсюда, в свою очередь, можно записать:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - (\lambda \cdot \sin \varphi)^2}.$$

Разлагая это выражение в ряд, и отбросив сравнительно малые его члены, получим:

$$\cos\beta \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2\varphi. \quad (5.8)$$

После подстановки (5.8) в (5.7) и некоторых преобразований получим выражение для определения перемещения S ползуна 3:

$$S = r \left(\frac{1}{\lambda} + \cos\varphi - \frac{\lambda}{2} \sin^2\varphi \right). \quad (5.9)$$

Продифференцировав (5.9) по времени, получим выражение для определения скорости V ползуна 3:

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \omega,$$

$$\text{или } V = -r \cdot \omega \left(\sin\varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right). \quad (5.10)$$

Выполнив дифференцирование (5.10) по времени, получим выражение для определения ускорения a ползуна 3 механизма:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \omega,$$

$$\text{или } a = -r \cdot \omega^2 (\cos\varphi + \lambda \cdot \cos 2\varphi). \quad (5.11)$$

ЛЕКЦИЯ 6

Геометрический синтез плоских рычажных механизмов

Плоские рычажные механизмы, звенья которых образуют вращательные или поступательные кинематические пары, получили широкое распространение в современном машино- и приборостроении. К достоинствам таких механизмов относятся высокая технологичность изготовления, возможность выполнения шарнирных соединений на подшипниках качения и небольшой износ соприкасающихся поверхностей, долговечность и надежность в работе. Кроме того, для механизмов, образованных при помощи звеньев, входящих в низшие пары (в отличие от кулачковых механизмов), не требуется пружин и других устройств, обеспечивающих постоянное замыкание кинематических пар. Подавляющее большинство шарнирно-рычажных механизмов преобразует равномерное движение ведущего звена в неравномерное движение ведомого и относится к механизмам с нелинейной функцией положения ведомого звена.

Решение многих задач синтеза и анализа рычажных механизмов связано с большим объемом вычислительных операций. Поэтому автоматизация проектирования является одной из важнейших задач – фактором, определяющим технический уровень, качество и эффективность новой техники. Можно с полным основанием утверждать, что автоматизация проектирования в ближайшие годы станет одной из основных областей применения ЭВМ.

Этапы проектирования механизмов

Проектирование механизмов представляет собой сложную комплексную проблему, решение которой разбивается на несколько этапов.

Первым этапом проектирования является выбор кинематической схемы механизма.

Ко *второму этапу* относится определение размеров звеньев механизма по заданным его свойствам.

Третий этап заключается в разработке конструкторских форм механизма, обеспечивающих его прочность и долговечность.

Четвёртым этапом проектирования является разработка технологических и технико-экономических показателей проектируемого механизма.

В теории механизмов в основном рассматриваются и решаются задачи первого и второго этапов проектирования, с помощью которых разрабатываются кинематические схемы механизмов, воспроизводящих требуемый закон движения.

Проектирование механизма начинается с выбора структурной схемы. Её выбирают из справочных материалов или разрабатывают на основе анализа видов движения, которые должны быть реализованы. Этот этап проектирования называется *структурным синтезом*. Разработчик должен в первом приближении оценить кинематические, силовые, точностные и другие характеристики механизма, что заранее сделать трудно, а часто – невозможно.

Если имеется несколько структурных схем различных механизмов, пригодных для реализации требуемых параметров, то из них следует выбрать наиболее простую. На практике выбор структурной схемы производится чаще всего на основе предшествующего опыта, знаний или интуиции проектировщика. При огромном разнообразии схем одних только рычажных механизмов такой эвристический подход к их выбору оправдан. Однако далеко не всегда проектировщик выбирает удачную структурную схему, о чем свидетельствуют конструкции многих существующих механизмов, применяемых в машинах и приборах. Вопрос рационального выбора структуры проектируемого механизма сравнительно сложен, поскольку он трудно поддается формализации и недостаточно освещен в литературе по теории механизмов.

После выбора структурной схемы механизма определяют геометрические размеры звеньев. При этом учитываются в основном геометрические функции, которые должен реализовать механизм. Этот этап проектирования называют этапом *геометрического синтеза* механизма, в режиме которого определяют относительные размеры звеньев, т.е. отношение геометрических размеров звеньев к размеру одного из них. Относительные геометрические размеры звеньев называются геометрическими параметрами механизма.

Структурный и геометрический синтез позволяет получить кинематическую схему механизма, отвечающую требованиям, предъявляемым к проекти-

руемому механизму. Геометрические функции, которые должен реализовать проектируемый механизм, воспроизводятся им с определенной точностью и определяются условиями работы механизма, обусловленными технологическим процессом. На основании анализа спроектированного механизма по степени точности воспроизведения заданной функции решают, пригоден ли полученный механизм или необходимо провести корректировку предыдущих этапов проектирования с изменением исходных данных. Если и повторные просчеты не дают удовлетворительных результатов, то необходимо перейти к другой структурной схеме механизма и выполнить для нее соответствующие расчеты. Этот этап называют этапом *точностного проектирования*.

Таким образом, задача проектирования механизма является сложной, многопараметрической, причем число исходных параметров механизма, как правило, больше числа исходных данных, поэтому частью параметров приходится варьировать.

По принципу использования рычажные механизмы делятся на две группы:

1 – *передаточные механизмы*, реализующие заданную функциональную зависимость между положениями входного и выходного звеньев механизма или между их перемещениями;

2 – *направляющие механизмы*, в которых точка на звене, совершающем сложное движение, перемещается при движении механизма по заданной траектории.

В связи с этим можно выделить две основные задачи синтеза механизмов:

1 – *воспроизведение заданного закона движения выходного звена*;

2 – *воспроизведение заданной траектории движения точки*.

Решение указанных задач синтеза рычажных механизмов с низшими парами может вестись как графическими, так и аналитическими методами. Выбор метода в значительной мере зависит от тех условий, которые поставлены при проектировании (в частности, точность). Графические методы нагляднее и проще с точки зрения их усвоения, но недостаточно точны. В последние годы учеными широко развиты аналитические методы синтеза механизмов с низшими парами.

Геометрический синтез механизма заключается в определении постоянных параметров его кинематической схемы исходя из условий задачи синтеза. Эти условия могут быть разнообразными по содержанию, но аналитически они представляют собой условия связей, налагаемых на параметры механизма, и имеют форму уравнений или неравенств. В ряде случаев условие синтеза формулируется в виде требования минимизации функции параметров механизма, принимающей неотрицательные значения.

Кроме параметров механизма в условиях синтеза фигурируют обычно и задаваемые величины или функции (например, заданная для воспроизведения функция перемещения механизма, заданный угол размаха выходного звена, заданный допустимый угол давления).

Условия существования кривошипа в шарнирном четырёхзвенном механизме

Важной кинематической характеристикой при синтезе механизма является выявление условий проворачиваемости на полный оборот относительно стойки входного звена, т.е. условий существования кривошипа.

Рассмотрим шарнирный четырёхзвенный механизм (рис. 6.1). Обозначим размеры звеньев через a , b , c и d , при чём

$$a < b < c < d. (6.1)$$

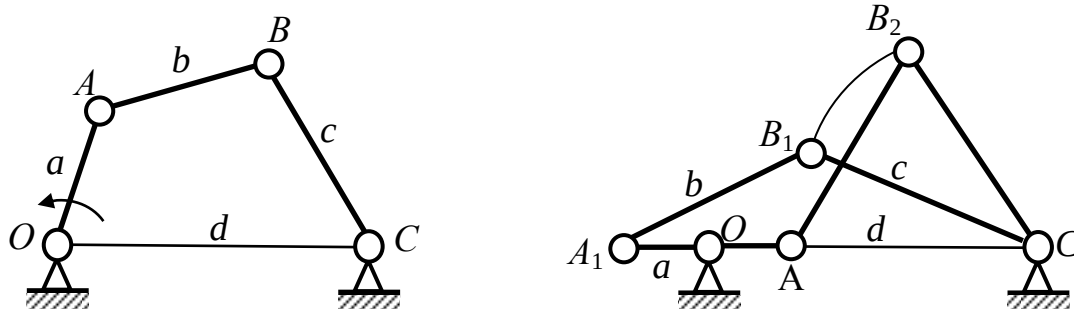


Рис. 6.1. Шарнирный четырёхзвенный механизм

На рис. 6.1 изображены два положения механизма, в которых центры шарниров O , A и C лежат на одной прямой. Для неразрывности кинематической цепи, как видно из треугольников $A_1 B_1 C$ и $A_2 B_2 C$, необходимо выполнение соотношений

$$a + d \leq b + c, \quad (6.2)$$

$$d - a \leq b + c. \quad (6.3)$$

При выполнении условия (6.2) условие (6.3) будет также выполняться.

Поэтому условие (6.2) позволяет дать общую формулировку условия проворачиваемости звена плоского шарнирного четырёхзвенника, а именно: самое короткое звено шарнирного четырёхзвенника может быть кривошипом, если сумма длин самого короткого и самого длинного звеньев меньше суммы длин остальных звеньев. Это положение носит название принципа *Грасгофа*.

Применяя это правило, шарнирные четырёхзвенники разбивают на три группы:

1) механизм будет кривошипно-коромысловым (рис. 6.1) если за стойку принято звено, соседнее с самым коротким. Звено a будет кривошипом, а звено c — коромыслом;

2) механизм будет двухкривошипным (рис. 6.2), если в качестве стойки принято самое короткое звено a . Оба звена b и d будут кривошипами;

3) механизм будет двухкоромысловым (рис. 6.3), если за стойку принято звено c , лежащее напротив самого короткого звена механизма. Оба звена b и d будут коромыслами.

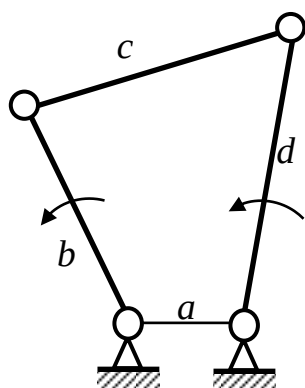


Рис. 6.2. Двухкривошипный механизм

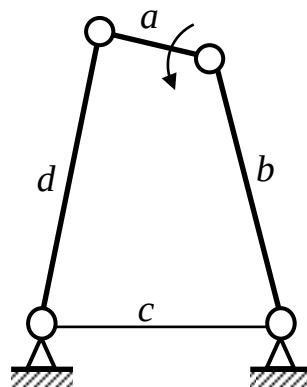


Рис. 6.3. Двухкоромысловый механизм

В предельном случае, когда неравенство (6.2) превращается в равенство, все звенья механизма в одном из крайних положений располагаются по одной прямой. В результате получится неопределенность движения выходного звена (оно сможет двигаться либо в одном, либо в другом направлении).

Синтез шарнирного четырехзвенного механизма по двум крайним положениям коромысла

Структурная схема шарнирного четырехзвенника изображена на рис. 6.4. Механизм содержит неподвижные опоры O и C , кривошип OA , шатун AB и коромысло BC . Входным звеном в шарнирных четырехзвенниках чаще всего является кривошип OA , который образует вращательную пару со стойкой и способен проворачиваться на полный оборот. Выходным звеном является коромысло BC , которое шарнирно связано со стойкой и совершает качательные движения, не делая полного оборота.

В тех положениях механизма, когда коромысло BC занимает любое из крайних положений, центры шарниров O , A и B располагаются на одной прямой, как это показано на рис. 6.5. Угол полного размаха коромысла BC обозначен через β .

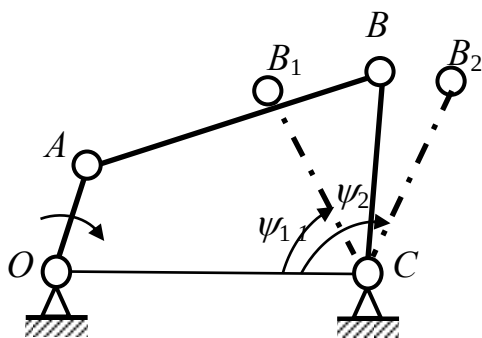


Рис. 6.4. Шарнирный четырехзвенник

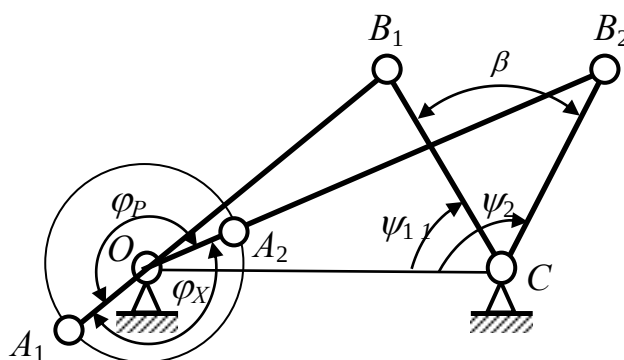


Рис. 6.5. Крайние положения механизма

Движение коромысла из положения CB_1 в положение CB_2 примем за прямой (рабочий) ход, а движение в противоположную сторону – за обратный (холостой) ход. Угол поворота кривошипа OA за время рабочего хода обозначим через φ_P , а за время холостого хода – φ_X .

Требуется спроектировать шарнирный четырехзвенный механизм по следующим исходным данным: l_{OC} – расстояние между неподвижными шарнирами, l_{BC} – размер выходного коромысла; ψ_1 и ψ_2 – угловые координаты коромысла BC в его крайних положениях. Необходимо найти длину кривошипа l_{OA} и длину шатуна l_{AB} .

Рассмотрим решение задачи синтеза аналитическим способом.

Учитывая, что центры шарниров, принадлежащих кривошипу и шатуну, в крайних положениях механизма лежат в одном случае на прямой OB_1 , а в другом – на прямой OB_2 , составим по теореме косинусов для треугольников OB_1C и OB_2C следующие соотношения:

$$l_{OB1} = \sqrt{l_{OC}^2 + l_{BC}^2 - 2 \cdot l_{OC} \cdot l_{BC} \cdot \cos \psi_1},$$

$$l_{OB2} = \sqrt{l_{OC}^2 + l_{BC}^2 - 2 \cdot l_{OC} \cdot l_{BC} \cdot \cos \psi_2}.$$

Расстояние l_{OB2} представляет собой сумму, а расстояние l_{OB1} – разность длин шатуна и кривошипа, т.е.

$$\begin{cases} l_{OB2} = l_{OA} + l_{AB}, \\ l_{OB1} = l_{AB} - l_{OA}. \end{cases}$$

Решая систему этих уравнений, найдем размеры кривошипа и шатуна:

$$l_{OA} = \frac{l_{OB2} - l_{OB1}}{2}, \quad l_{AB} = \frac{l_{OB2} + l_{OB1}}{2}.$$

Синтез шарнирного четырёхзвенника по коэффициенту изменения средней угловой скорости выходного звена

Кинематическая схема проектируемого шарнирного четырёхзвенника изображена на рис.6.6. Исходными данными для синтеза являются: l_{BC} – размер коромысла BC ; ψ_1 – угловая координата коромысла BC в его крайнем положении; β – угловой ход (размах) коромысла BC , K_ω – коэффициент изменения средней угловой скорости выходного звена (коромысла BC).

Необходимо найти: l_{OC} – расстояние между неподвижными опорами O и C ; l_{OA} и l_{AB} – размеры кривошипа OA и шатуна AB соответственно.

Кривошип OA вращается равномерно вокруг неподвижного центра O , который находится на прямой 1 в пока неизвестной точке (расстояние l_{OC} является неизвестным).

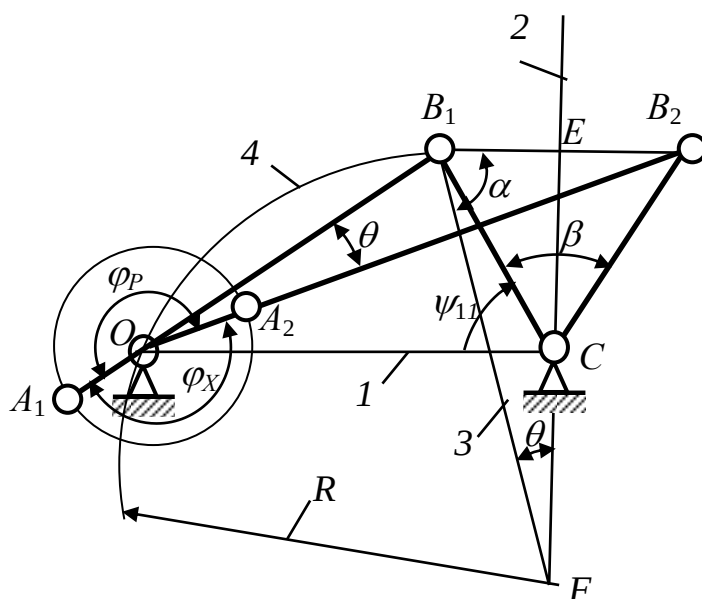


Рис. 6.6. Синтез шарнирного четырёхзвенника графическим методом

Движение коромысла из положения CB_1 в положение CB_2 примем за прямой (рабочий) ход, а движение в противоположном направлении – за обратный (холостой) ход. Требуется спроектировать механизм, для которого отношение средних угловых скоростей выходного коромысла BC при обратном и прямом ходе равно заданной величине $K_\omega = \omega_X / \omega_P$.

Рассмотрим решение поставленной задачи синтеза механизма графическим способом.

По заданным l_{BC} , ψ_1 и β построим два крайних положения коромысла BC , которые обозначим CB_1 и CB_2 . В крайних положениях механизма кривошип и шатун находятся на одной прямой: угол между прямыми OB_1 и OB_2 обозначим θ . За время t_P прямого (рабочего) хода кривошип OA поворачивается на угол $\varphi_P = 180^\circ + \theta$, а за время t_X обратного (холостого) хода – на угол $\varphi_X = 180^\circ - \theta$.

Следовательно, при равномерном вращении кривошипа

$$K_\omega = \frac{\beta / t_x}{\beta / t_p} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta},$$

откуда

$$\theta = 180^\circ \frac{K_\omega - 1}{K_\omega + 1}.$$

Поделим отрезок B_1B_2 прямой линии 2 пополам ($B_1E = B_2E$) и через точку B_1 проведём прямую 3, составляющую угол θ с прямой 2. Для проведения прямой 3 удобнее определить сначала угол $\alpha = 90^\circ - \theta$.

Точку пересечения прямых линий 2 и 3 обозначим через F . Проведём окружность 4 с радиусом $R = FB$ и центром в точке F . Окружность 4 будет являться геометрическим местом искомых центров вращения кривошипа, поскольку в любой точке этой окружности вписанный угол $\angle B_1OB_2$ равен половине центрального угла $\angle B_1AB_2 = 2\theta$, опирающегося на ту же дугу B_1B_2 и, следовательно, равен θ . Точка O пересечения окружности 4 с прямой 1 будет центром вращения кривошипа OA . Проведём прямые линии через точки O и B_1 , а также через точки O и B_2 . После выполнения перечисленных построений размеры звеньев механизма определяются следующим образом.

Расстояние OC на рис. 6.6 определяет в масштабе размер l_{OC} .

Расстояние OB_2 является суммой, а расстояние OB_1 — разностью длин шатуна AB и кривошипа OA , т.е.

$$\begin{cases} l_{OB_2} = l_{AB} + l_{OA}, \\ l_{OB_1} = l_{AB} - l_{OA}. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$l_{OA} = \frac{l_{OB_2} - l_{OB_1}}{2}, \quad l_{AB} = \frac{l_{OB_2} + l_{OB_1}}{2}.$$

Выполнив измерения отрезков OB_1 и OB_2 на чертеже и, учитывая масштаб построений, можно определить размеры l_{OB_1} и l_{OB_2} , а затем и размеры l_{OA} и l_{AB} кривошипа и шатуна.

Синтез шарнирного четырёхзвенника по углам давления в крайних положениях выходного звена

На рис. 6.7 изображена схема шарнирного четырёхзвенника, на которой показаны два крайних положения CB_1 и CB_2 выходного коромысла.

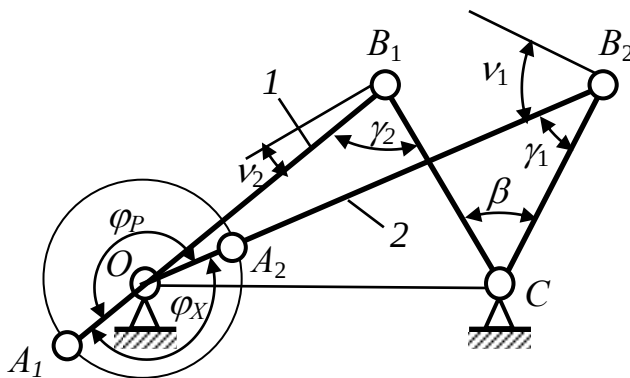


Рис. 6.7. Углы давления
в шарнирном четырёхзвенном механизме

На рис. 6.7 обозначены ν_1 и ν_2 углы давления в кинематической паре шатун – коромысло как углы между линией шатуна, по направлению которой передаётся усилие к коромыслу, и направлением скорости точки B . Силы тяжести звеньев, трение и силы инерции при этом не учитываются. Угол, дополняющий угол давления до прямого, называется *углом передачи*. На рис. 6.7 углы передачи в крайних положениях коромысла обозначены γ_1 и γ_2 .

При работе механизма угол давления меняет свою величину, поэтому при проектировании задаются допусκαемым углом давления для того, чтобы не произошло самоторможение, т.е. заклинивание и остановка механизма.

Исходными данными для проектирования механизма являются: l_{BC} – длина коромысла; β – угловой ход (размах) коромысла; ν_1 и ν_2 – допустимые значения углов давления в крайних положениях коромысла BC .

Необходимо найти: l_{OC} – расстояние между неподвижными опорами O и C , l_{OA} и l_{AB} – размеры кривошипа OA и шатуна AB .

Решим поставленную задачу графическим способом.

Изобразим на рис. 6.7 два положения коромысла CB_1 и CB_2 с углом β между ними.

Определим углы передачи в крайних положениях коромысла:

$$\gamma_1 = 90^\circ - \nu_1,$$

$$\gamma_2 = 90^\circ - \nu_2.$$

Через точку B_1 проведем прямую 1 под углом γ_1 к отрезку B_1C , а через точку B_2 – прямую 2 под углом γ_2 к отрезку B_2C . Точку пересечения прямых 1 и 2 обозначим O . Точки O и C соединим прямой линией. Расстояние OB_2 является суммой, а расстояние OB_1 – разностью длин шатуна AB и кривошипа OA , т.е.

$$\begin{cases} l_{OB_2} = l_{AB} + l_{OA}, \\ l_{OB_1} = l_{AB} - l_{OA}. \end{cases}$$

Решая систему этих двух уравнений, получим:

$$l_{OA} = \frac{l_{OB_2} - l_{OB_1}}{2},$$

$$l_{AB} = \frac{l_{OB_2} + l_{OB_1}}{2}.$$

Выполнив измерение отрезков OB_1 и OB_2 на чертеже, можно определить таким образом l_{OA} и l_{AB} – размеры кривошипа OA и шатуна AB .

Синтез кривошипно-ползунного механизма по крайним положениям ползуна

Кривошипно-ползунный механизм, изображённый на рис. 6.8, состоит из кривошипа OA , шатуна AB и ползуна, образующего поступательную пару с не-

подвижной направляющей s . При вращении кривошипа OA ползун движется по оси s от одного своего крайнего положения до другого. Обозначим B_1 и B_2 точки на прямой s , соответствующие крайним положениям ползуна. Расстояние h между точками B_1 и B_2 будет являться полным ходом ползуна.

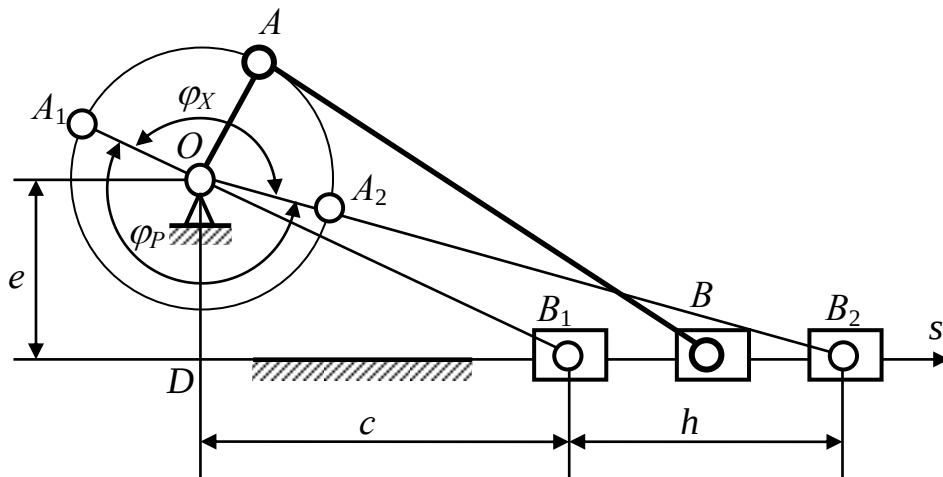


Рис. 6.8. Кривошипно-ползунный механизм

Когда ползун занимает любое из двух своих крайних положений, центры шарниров O , A и B располагаются на одной прямой. Обозначим через φ_P угол поворота кривошипа OA за время прямого (рабочего) хода ползуна от точки B_1 до точки B_2 и φ_X – за время обратного (холостого) хода от точки B_2 до точки B_1 .

Исходными данными для проектирования механизма являются: h – полный ход ползуна; e – расстояние от центра O до направляющей s ; c – координата точки B_1 ползуна в его крайнем положении.

Необходимо найти размеры l_{OA} кривошипа и l_{AB} шатуна.

Рассмотрим решение поставленной задачи синтеза механизма аналитическим способом.

Так как в крайних положениях механизма центры шарниров O , A и B располагаются на одной прямой, то на схеме механизма получим прямоугольные треугольники ODB_1 и ODB_2 , откуда следует:

$$l_{OB1} = \sqrt{e^2 + c^2},$$

$$l_{OB2} = \sqrt{e^2 + (c + h)^2}.$$

Расстояние OB_2 является суммой, а OB_1 – разностью длин шатуна AB и кривошипа OA , т.е.

$$\begin{cases} l_{OB2} = l_{AB} + l_{OA}, \\ l_{OB1} = l_{AB} - l_{OA}. \end{cases}$$

Решая систему этих двух уравнений, получим:

$$l_{OA} = \frac{l_{OB2} - l_{OB1}}{2}, \quad l_{AB} = \frac{l_{OB2} + l_{OB1}}{2}.$$

Синтез кривошипно-ползунного механизма по коэффициенту изменения средней скорости ползуна

Кинематическая схема кривошипно-ползунного механизма для проектирования представлена на рис. 6.9.

Исходными данными для синтеза являются: h – ход ползуна; e – расстояние от центра шарнира O до неподвижной направляющей s ; K_V – коэффициент изменения средней скорости ползуна.

Необходимо найти: c – расстояние между проекцией центра O на ось s и крайним положением B_1 ползуна; l_{OA} и l_{AB} – размеры кривошипа OA и шатуна AB .

Кривошип OA механизма вращается равномерно, а его центр вращения находится в некоторой, пока неизвестной точке, лежащей на расстоянии e от направляющей s . Движение ползуна от положения B_1 до положения B_2 примем за прямой (рабочий) ход, а движение в противоположном направлении – за обратный (холостой) ход. За время рабочего хода кривошип поворачивается на угол φ_P , а за время холостого хода – на угол φ_X . Требуется спроектировать кинематическую схему механизма, для которого отношение средних скоростей ползуна при обратном (холостом) и прямом (рабочим) ходе было равным заданной величине $K_V = V_P / V_X$.

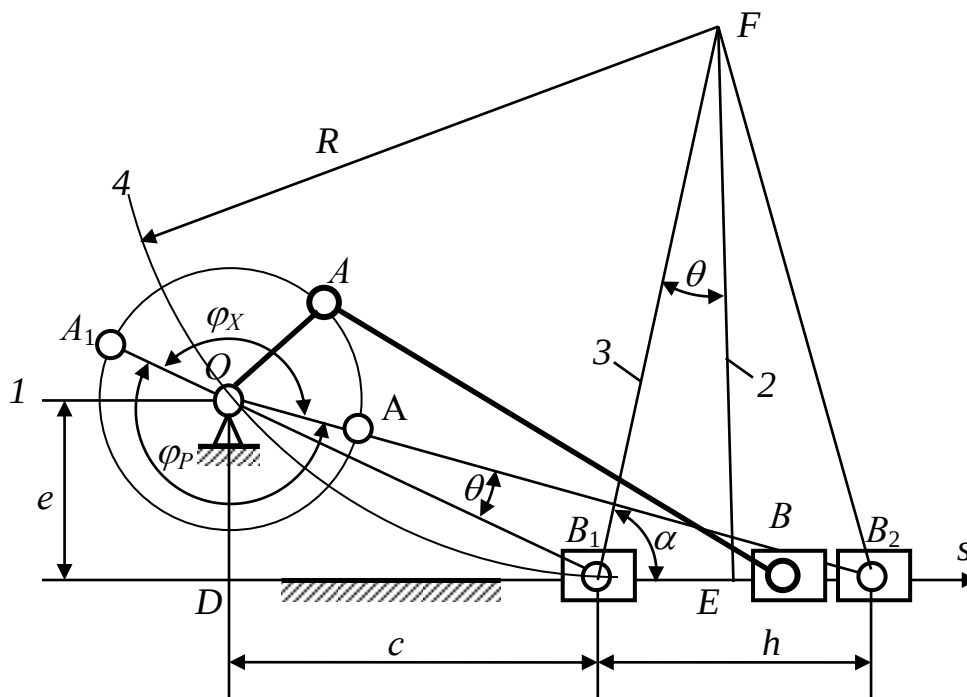


Рис. 6.9. Синтез кривошипно-ползунного механизма
графическим методом

Рассмотрим решение поставленной задачи синтеза механизма графическим способом.

Построим в определённом масштабе на рис. 6.9 два крайних положения ползуна B_1 и B_2 на направляющей s .

Проведём прямые s и l на расстоянии h друг от друга. На прямой s выберем произвольно точку B_1 , отложив от неё в положительном направлении оси s ход h ползуна, получим точку B_2 .

В крайних положениях механизма кривошип и шатун располагаются на одной прямой линии, угол между которыми обозначим θ . За время t_p прямого хода кривошип повернётся на угол $\varphi_p = 180^\circ + \theta$, а за время t_x обратного хода – на угол $\varphi_x = 180^\circ - \theta$. Следовательно, при равномерном вращении кривошипа

$$K_v = \frac{h/t_x}{h/t_p} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta},$$

откуда

$$\theta = 180^\circ \frac{K_v - 1}{K_v + 1}.$$

Через точку E , которая является серединой отрезка B_1B_2 , проведём прямую 2. Проведём прямую 3, образующую угол θ с прямой 2. Для проведения прямой 3 удобнее определить сначала угол $\alpha = 90^\circ - \theta$, который образован прямыми s и 3. Точку пересечения прямых 2 и 3 обозначим F . Через точку B_1 проведём окружность 4 с центром в точке F . Окружность 4 радиуса $R = FB$ будет являться геометрическим местом центров вращения кривошипа, поскольку в любой точке этой окружности вписанный угол $\angle B_1OB_2$ равен половине центрального угла $\angle B_1FB_2$ как опирающегося на ту же дугу B_1B_2 . Следовательно, $\angle B_1OB_2 = \theta$. Точка пересечения окружности 4 с прямой 1 определяет центр вращения O кривошипа.

Расстояние OB_2 является суммой, а расстояние OB_1 – разностью длин шатуна AB и кривошипа OA , т.е.

$$\begin{cases} l_{OB_2} = l_{AB} + l_{OA}, \\ l_{OB_1} = l_{AB} - l_{OA}. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим:

$$l_{OA} = \frac{l_{OB_2} - l_{OB_1}}{2}, \quad l_{AB} = \frac{l_{OB_2} + l_{OB_1}}{2}.$$

Выполнив измерение длин отрезков OB_1 и OB_2 на чертеже, можно учитывая масштаб построений, определить l_{OA} и l_{AB} – размеры кривошипа OA и шатуна AB .

Синтез кривошипно-ползунного механизма с учётом углов давления в кинематических парах

При проектировании механизмов нужно учитывать весьма важный параметр, характеризующий условие передачи сил и работоспособность механизма. Это угол давления (угол между вектором силы, приложенной к звену, и вектором скорости точки приложения движущей силы). Например, для центрального кривошипно-ползунного механизма, изображённого на рис. 6.10, углом давления в шарнире B без учёта сил тяжести, инерции и трения будет являться угол ν между линией шатуна AB и направляющей s .

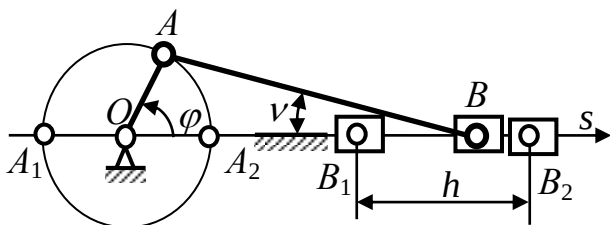


Рис. 6.10. Центральный кривошипно-ползунный механизм

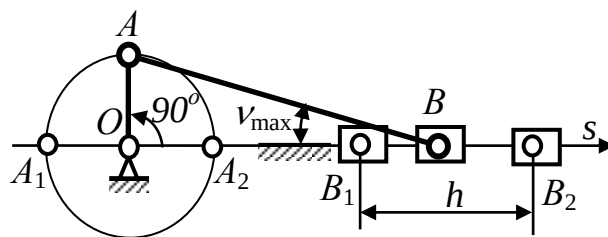


Рис. 6.11. Максимальный угол давления в кривошипно-ползунном механизме

Максимальное значение угла давления $\nu_{\max} = \arcsin(l_{OA}/l_{AB})$ будет при $\varphi=90^\circ$ или 270° . Поэтому, например, для механизмов двигателя внутреннего сгорания отношение $\lambda = l_{OA} / l_{AB}$ принято выбирать в определенных пределах ($\lambda=0,3...0,2$, что соответствует значениям $\nu_{\max} = 19^\circ \dots 10^\circ$).

Рассмотрим пример синтеза центрального кривошипно-ползунного механизма по заданному соотношению между длинами кривошипа OA и шатуна AB .

Исходные данные для проектирования: $\lambda = l_{OA}/l_{AB}$; h – ход ползуна.

Требуется найти l_{OA} и l_{AB} – размеры кривошипа OA и шатуна AB .

На рис. 6.10 обозначены через B_1 и B_2 крайние положения ползуна, который перемещается по неподвижной направляющей s . Точка A кривошипа в крайних положениях занимает положения, обозначенные A_1 и A_2 . Из построений на рис. 6.10 видно, что

$$A_1A_2 = B_1B_2 \text{ или } 2 \cdot l_{OA} = h,$$

откуда $l_{OA} = h/2$.

Учитывая, что $\lambda = l_{OA}/l_{AB}$, получим:

$$l_{AB} = l_{OA} / \lambda.$$

Рассмотрим другой пример синтеза центрального кривошипно-ползунного механизма, изображённого на рис. 6.11, по заданному максимальному значению угла давления в кинематической паре между шатуном AB и ползуном.

Исходные данные для проектирования механизма: h – ход ползуна; $\nu_{\max}$ – максимальное значение угла давления во вращательной паре B .

Необходимо найти: l_{OA} и l_{AB} – размеры кривошипа и шатуна. На рис. 6.11 крайние положения ползуна обозначены B_1 и B_2 . Точка A в крайних положениях занимает положения A_1 и A_2 . На рис. 6.11 видно, что

$$A_1A_2 = B_1B_2, \text{ или } 2 \cdot l_{OA} = h,$$

откуда

$$l_{OA} = h / 2.$$

Как уже отмечалось, для центрального кривошипно-ползунного механизма максимальное значение угла давления $\nu_{\max}$ будет при φ , равном 90° или 270° . Следовательно, кривошип и шатун при этом образуют прямоугольный треугольник OAB , для которого можно записать:

$$l_{AB} = l_{OA} / \sin \nu_{\max}.$$

Синтез кулисного механизма по коэффициенту изменения средней скорости выходного звена

Шестизвенный кулисный механизм с качающейся кулисой изображён на рис. 6.12. Механизм преобразует вращательное движение кривошипа OA в возвратно-поступательное движение ползуна, который перемещается по неподвижной направляющей s . При этом средняя скорость V_X ползуна при обратном ходе больше в K_V раз средней скорости V_P прямого хода. Отношение $K_V = V_X / V_P$ называется коэффициентом изменения средней скорости выходного звена. Например, в строгальных и долбежных станках изделие обрабатывается в одном направлении с заданной скоростью резания, а холостой (обратный) ход режущего инструмента происходит с большей средней скоростью, в этом случае $K_V > 1$.

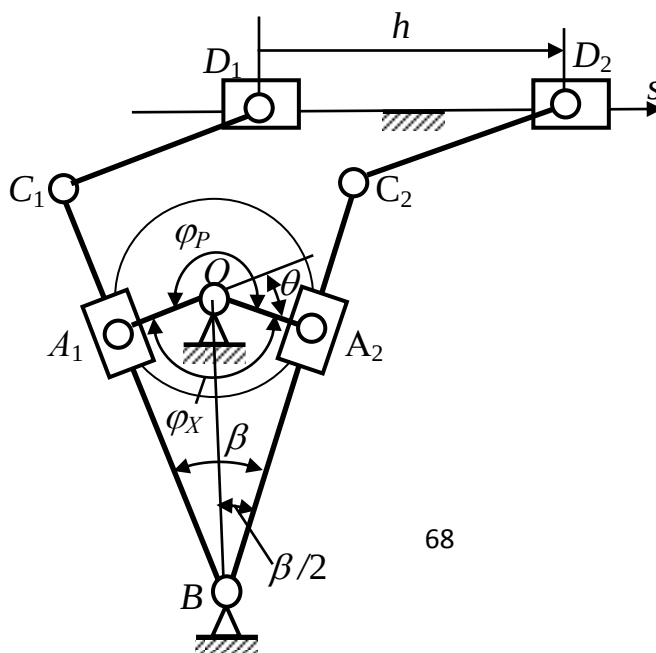


Рис. 6.12. Кулисный механизм строгального станка

Кривошип OA вращается равномерно. Обозначим полный ход ползуна через h . За время рабочего хода t_p кривошип повернётся на угол φ_p , а за время холостого хода t_x — на угол φ_x . Угол между кривошипом OA и кулисой BC в крайних положениях механизма равен 90° , следовательно, угол размаха β кулисы равен углу θ . Коэффициент K_v и угол θ связаны зависимостью

$$K_v = \frac{h/t_x}{h/t_p} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta},$$

откуда

$$\theta = 180^\circ \frac{K_v - 1}{K_v + 1}.$$

Из прямоугольного треугольника OBA_1 можно выразить длину кривошипа OA :

$$l_{OA} = l_{OB} \cdot \sin \frac{\beta}{2}$$

или расстояние между неподвижными опорами O и B :

$$l_{OB} = \frac{l_{OA}}{\sin(\beta/2)},$$

где $\beta = \theta$.

Рассмотрим кулисный механизм с вращающейся кулисой (рис. 6.13).

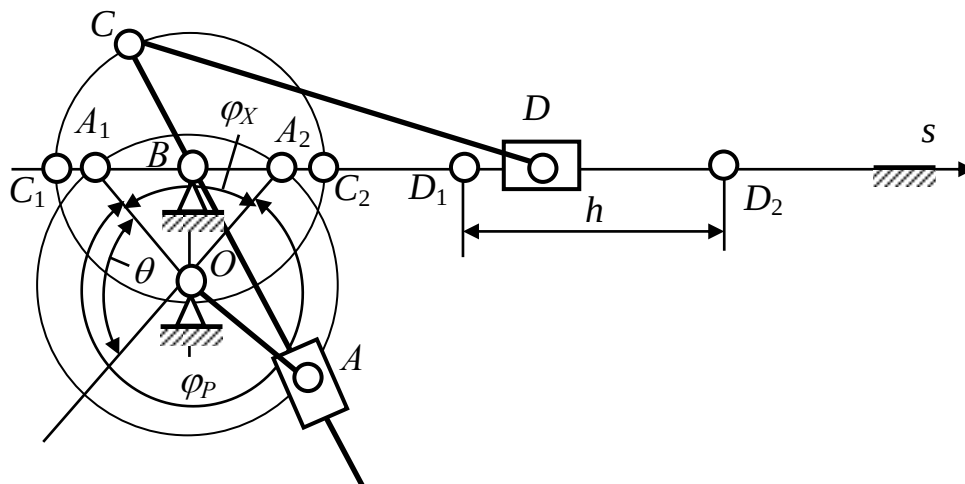


Рис. 6.13. Кулисный механизм с вращающейся кулисой

Исходные данные для проектирования: l_{OA} – длина кривошипа; $K_V = V_X / V_P$ – коэффициент изменения средней скорости выходного звена (ползуна с шарниром D).

Необходимо найти l_{OB} – расстояние между неподвижными опорами O и B .

Крайние положения D_1 и D_2 ползуна определяются положениями A_1 и A_2 шарнира A , при которых направления кулисы BC и шатуна CD совпадают.

Прямой (рабочий) ход ползуна по направляющей s из точки D_1 в точку D_2 совершается при повороте кривошипа OA на угол $\varphi_P = 180^\circ + \theta$, а обратный (холостой) – на угол $\varphi_X = 180^\circ - \theta$. Поэтому при постоянной угловой скорости кривошипа OA величина K_V определяется соотношением

$$K_V = \frac{h/t_x}{h/t_p} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta},$$

откуда

$$\theta = 180^\circ \frac{K_V - 1}{K_V + 1}.$$

Расстояние l_{OB} между неподвижными опорами O и B определяется из прямоугольного треугольника OBA_2 по формуле

$$l_{OB} = l_{OA} \cdot \sin \frac{\theta}{2}.$$

Если задано расстояние l_{OB} между неподвижными опорами O и B , то длину кривошипа OA можно найти по формуле

$$l_{OA} = \frac{l_{OB}}{\sin \theta/2}.$$

Синтез механизма с качающимся цилиндром

Механизм с качающимся цилиндром применяется в гидроприводах различного назначения. На рис. 6.14 изображена кинематическая схема механизма с качающимся цилиндром в его крайних положениях. Конец штока цилиндра занимает крайние положения, обозначенные A_1 и A_2 . При переходе из одного крайнего положения в другое центр шарнира A перемещается на расстояние h (ход поршня), а выходное коромысло OA поворачивается на угол β . Чтобы полностью использовать цилиндр при перемещении поршня, задаются отношением длины цилиндра l к ходу поршня h в виде коэффициента $K = l / h$, определяемого конструктивно, например, $K = 1,3 \dots 1,4$.

Исходными данными для синтеза механизма с качающимся цилиндром являются: h – ход поршня; K – коэффициент, характеризующий отношение длины цилиндра к ходу поршня.

Определению подлежат: l_{OB} – расстояние между неподвижными опорами O и B ; l_{OA} – размер коромысла OA .

Соединив на рис. 6.14 середину отрезка A_1A_2 с точкой O прямой линией 1, получим два прямоугольных треугольника OEA_1 и OEA_2 .

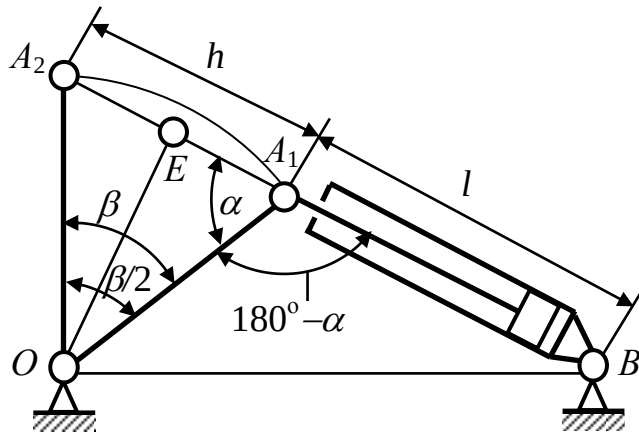


Рис. 6.14. Механизм с качающимся цилиндром

Так как

$A_1E = A_2E = h/2$, то из треугольника OEA_1 следует:

$$\cos \alpha = \frac{EA}{OA} = \frac{h/2}{l_{OA}},$$

откуда $l_{OA} = \frac{h}{2 \cos \alpha}.$

Учитывая, что

$$\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \text{ и } \cos \alpha = \cos(90^\circ - \frac{\beta}{2}) = \sin \frac{\beta}{2},$$

получим

$$l_{OA} = \frac{h}{2 \sin (\beta/2)}.$$

Из треугольника OA_1B выразим по теореме косинусов расстояние между неподвижными опорами O и B :

$$l_{OB} = \sqrt{l_{OA}^2 + l^2 - 2 \cdot l_{OA} \cdot l \cdot \cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{l_{OA}^2 + l^2 + 2 \cdot l_{OA} \cdot l \cdot \cos \alpha}.$$

Так как

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ - \frac{\beta}{2}) = \sin \frac{\beta}{2},$$

получим

$$l_{OB} = \sqrt{l_{OA}^2 + l^2 + 2 \cdot l_{OA} \cdot l \cdot \sin(\beta/2)}.$$

Таким образом, мы рассмотрели примеры синтеза плоских рычажных механизмов, которые наиболее часто встречаются в практике.

ЛЕКЦИЯ 7

Силовой анализ плоских рычажных механизмов

При движении механизма в его кинематических парах возникают силы взаимодействия между звеньями, т.е. реакций.

Основная цель силового расчёта механизмов – определение реакций в кинематических парах для расчёта звеньев на прочность, жёсткость, виброустойчивость, износоустойчивость, для расчёта подшипников на долговечность и других расчётов при проектировании механизмов.

При решении задач силового расчёта механизмов закон движения ведущего звена предполагается заданным. Также предполагаются известными массы и моменты инерции звеньев механизма. Таким образом, всегда могут быть определены те силы инерции, которые необходимы для решения задач силового расчёта с использованием уравнений равновесия.

В тех случаях, когда при расчёте в число заданных сил не входят силы инерции звеньев, расчёт называется *статическим*. Если в число заданных (или определённых) сил при расчёте входят и силы инерции звеньев, то такой расчёт называется *кинетостатическим*.

В первом приближении будем вести расчёт *без учёта сил трения*

Классификация сил, действующих в механизмах

Понятие силы было дано ещё Л. Эйлером: всё, что способно изменять абсолютное состояние тела, называется силой.

Действующие в механизмах силы делятся на следующие группы:

движущие силы – силы, работа которых на заданном интервале времени положительна. Движущие силы приводят машину в движение. Это силы сжатого газа, пара, электромагнитного поля и др;

силы сопротивления– силы, работа которых на заданном интервале времени отрицательна;

силы полезного сопротивления– силы, для преодоления которых предназначен механизм. Это силы сопротивления резанию металла, вес груза в подъёмниках и др;

силы вредного сопротивления – силы трения в кинематических парах, сопротивление среды (воздуха, масла и др.);

силы тяжести звеньев – результат взаимодействия каждой частицы звена с Землёй. При движении центра тяжести звена вниз к Земле работа силы тяжести положительна, при движении вверх – отрицательна. За период одного цикла движения механизма суммарная работа сил тяжести равна нулю;

силы инерции – условные силы, которые вводятся в расчёт при движении звеньев с ускорением;

силы реакций – возникают при взаимодействии звеньев в местах их соприкосновения. Это внутренние силы для всего механизма и внешние для каждого звена в отдельности.

Метод кинетостатики

В основу силового расчёта механизмов положен метод кинетостатики, который имеет широкое распространение в инженерной практике и заключается в следующем.

Если к внешним силам, действующим на звенья механизма, добавить силы инерции звеньев, то данную систему сил можно рассматривать как находящуюся в равновесии (принцип Даламбера).

При выполнении этого условия геометрическая сумма всех сил, действующих в механизме, и сил инерции будет равна нулю.

Рассмотрим систему сил, действующих на материальную точку K , которая перемещается по траектории α (рис. 7.1). Обозначим:

$\bar{F}$ – внешняя сила,
 $\bar{R}$ – реакция связи.

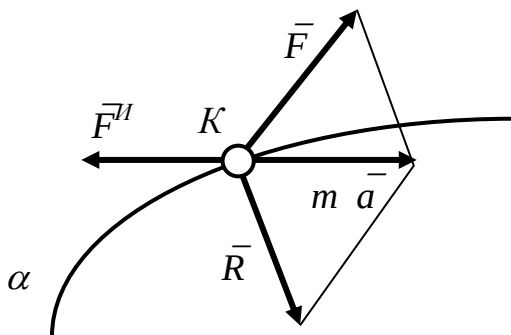


Рис. 7.1. Силы, действующие на точку K

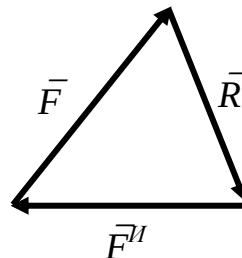


Рис. 7.2. План сил, действующих на точку K

По второму закону Ньютона

$$\bar{F} + \bar{R} = m \cdot \bar{a}, \quad (7.1)$$

где m – масса точки K ,

$\bar{a}$ – ускорение точки K .

Обозначим: $\bar{F}^I = -m \cdot \bar{a}$,

где $\bar{F}^I$ – сила инерции точки K .

Тогда из (7.1) получим:

$$\vec{F}^I + \vec{F} + \vec{R} = 0. \quad (7.2)$$

Для нахождения реакции связи $\vec{R}$ построим на рис. 7.2 треугольник сил, используя векторное уравнение (7.2). Величина реакции связи определяется длиной вектора $\vec{R}$ на плане сил.

Силы инерции звеньев механизма

Из курса теоретической механики известно, что в общем случае плоскую систему сил можно привести к силе и паре сил. Применительно к силам инерции это будут главный вектор $\vec{F}^I$ и главный момент $\vec{M}^I$ сил инерции. Рассмотрим схему плоской системы сил инерции тела (рис. 7.3).

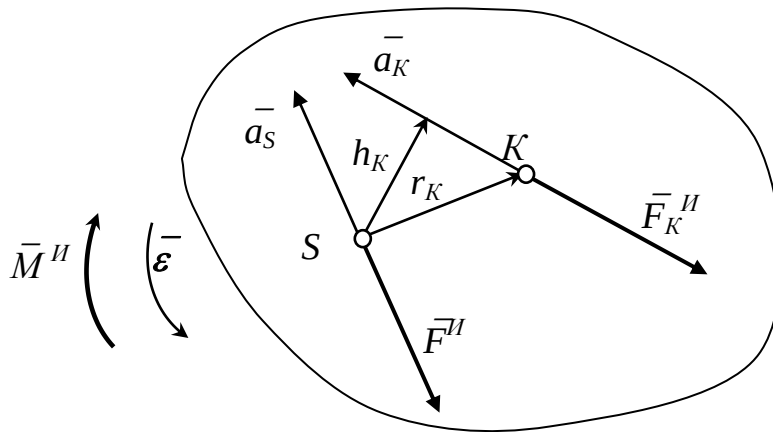


Рис. 7.3. Силы инерции тела

Обозначим:

K – элементарный столбик тела;

m_K – масса элементарного столбика K ;

$\vec{a}_K$ – ускорение точки K ;

$\vec{F}_K^I = -m_K \cdot \vec{a}_K$ – элементарная сила инерции;

S – центр масс тела;

$\vec{a}_S$ – ускорение точки S ;

ε – угловое ускорение тела.

Главный вектор сил инерции тела определяется векторной суммой:

$$\vec{F}^I = \sum_1^n \vec{F}_k^I \quad \text{или}$$

$$\vec{F}^I = -m \cdot \vec{a}_S, \quad (7.3)$$

где m – масса всего тела.

Главный момент сил инерции тела определяется суммой:

$$M^I = \sum_1^n M_k^I = \sum_1^n (F_k^I \cdot h_k) \quad \text{или}$$

$$M^I = -J_S \cdot \varepsilon, \quad (7.4)$$

где J_S – центральный момент инерции тела. $J_S = \sum_1^n (m_k r_k^2)$.

Рассмотрим различные случаи плоского движения звена.

1. Сложное плоское движение звена (рис. 7.4 и 7.5)

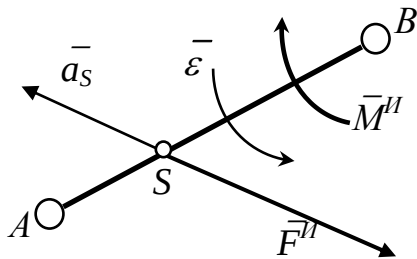


Рис. 7.4. Силы инерции звена

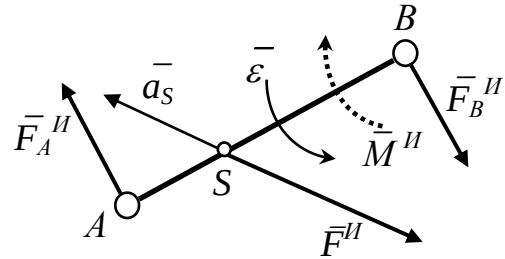


Рис. 7.5. Замена момента $\bar{M}^{II}$ парой сил $\bar{F}_A^{II}$ и $\bar{F}_B^{II}$

Главный вектор сил инерции $\bar{F}^{II}$ звена проходит через центр масс S и направлен против ускорения $\bar{a}_S$ центра масс звена AB .

Главный момент сил инерции $\bar{M}^{II}$ направлен против углового ускорения $\bar{\epsilon}$ звена AB .

Причём $\bar{F}^{II} = -m \cdot \bar{a}_S$ и $\bar{M}^{II} = -J_S \cdot \bar{\epsilon}$.

Главный момент сил инерции $\bar{M}^{II}$ можно заменить парой сил $\bar{F}_A^{II}$ и $\bar{F}_B^{II}$ (рис. 7.5). Точки приложения этих сил можно выбрать произвольно, например A и B . Направление момента заменяющей пары сил должно совпадать с направлением момента $\bar{M}^{II}$.

Причём по величине $F_A^{II} = F_B^{II} = M^{II} / l_{AB}$, где l_{AB} – плечо пары сил.

2. Поступательное движение звена (рис. 7.6).

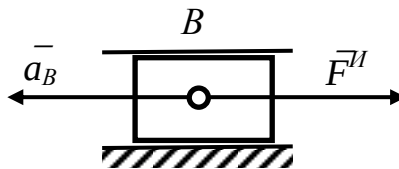


Рис. 7.6. Поступательное движение звена

Главный вектор сил инерции $\bar{F}^{II}$ звена проходит через центр масс B и направлен против ускорения $\bar{a}_B$ точки B звена.

Причём $\bar{F}^{II} = -m \cdot \bar{a}_B$.

Главный момент сил инерции $\bar{M}^H$ равен нулю, так как угловое ускорение звена отсутствует, т.е. $\bar{M}^H = 0$.

3. Вращение звена вокруг неподвижной опоры (рис. 7.7 и 7.8).

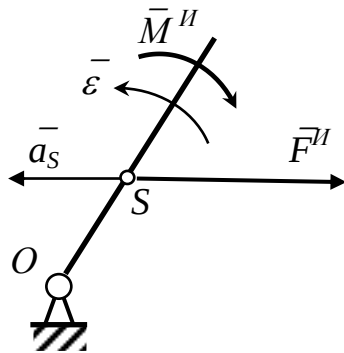


Рис. 7.7. Вращение звена вокруг неподвижной опоры

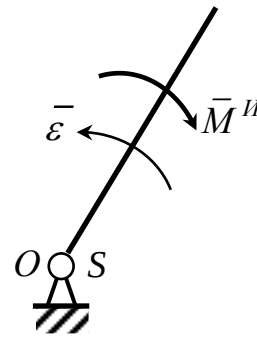


Рис. 7.8. Вращение звена вокруг центра масс

Главный вектор сил инерции $\bar{F}^H$ звена проходит через центр масс S и направлен против ускорения $\bar{a}_S$ центра масс звена (рис. 7.7).

Главный момент сил инерции $\bar{M}^H$ направлен против углового ускорения $\bar{\epsilon}$ звена.

Причём $\bar{F}^H = -m \cdot \bar{a}_S$ и $\bar{M}^H = -J_S \cdot \bar{\epsilon}$.

Если центр масс S звена лежит на неподвижной оси вращения O (рис. 7.8), то главный вектор $\bar{F}^H$ сил инерции звена равен нулю, так как ускорение центра масс в этом случае равно нулю, т.е. $\bar{F}^H = 0$. Главный момент сил инерции $\bar{M}^H$ направлен против углового ускорения $\bar{\epsilon}$ звена.

Причём $\bar{M}^H = -J_S \cdot \bar{\epsilon}$.

Условия статической определимости кинематической цепи

Силовое исследование кинематической цепи может быть выполнено при соблюдении двух условий:

1. Кинематическая цепь находится в равновесии.
2. Кинематическая цепь статически определима.

Кинематическая цепь считается статически определимой, если число неизвестных силовых параметров, действующих на цепь, равно числу уравнений равновесия цепи.

Сила на плоскости определяется тремя параметрами: модулем, точкой приложения и направлением.

Рассмотрим различные кинематические пары, входящие в состав плоских рычажных механизмов (при этом трение не учитываем).

Во вращательной кинематической паре (рис. 7.9) элементом соприкосновения звеньев является цилиндрическая поверхность. Поэтому имеем распределённую систему сил давления между звеньями такой пары.

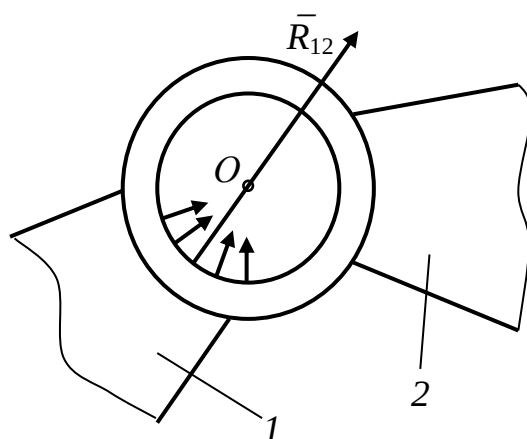


Рис. 7.9. Вращательная кинематическая пара

Элементарные силы давления между звеньями этой пары при отсутствии трения проходят через центр шарнира O . Следовательно, равнодействующая этих элементарных сил будет также проходить через центр O .

Обозначим через $\bar{R}_{12}$ силу, действующую на звено 1 со стороны звена 2.

Таким образом, при отсутствии трения реакция во вращательной паре проходит через её центр, т.е. один параметр реакции (точка приложения) является известным. Определению подлежат два параметра реакции – модуль и её направление.

В поступательной кинематической паре при отсутствии трения элементарные силы давления между звеньями перпендикулярны поверхности направляющих (рис. 7.10). Таким образом, имеем систему параллельных сил.

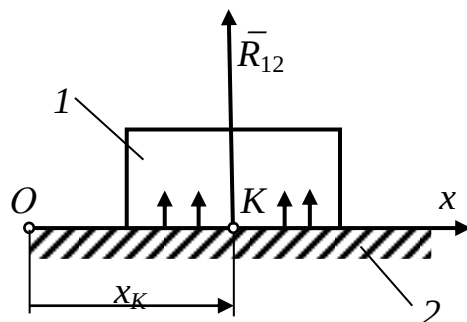


Рис. 7.10. Поступательная кинематическая пара

Равнодействующая $\bar{R}_{12}$ такой системы параллельных сил будет направлена перпендикулярно оси x и проходит через точку K . Следовательно, один параметр (направление) реакции между звеньями поступательной пары является известным. Определению подлежат два параметра – модуль и положение точки приложения реакции (координата x_K).

Таким образом, в низших (вращательной и поступательной) кинематических парах число неизвестных параметров реакций равно двум, а число известных – одному.

Рассмотрим плоскую кинематическую цепь, которая содержит n звеньев и p_1 низших одноподвижных кинематических пар.

Для одного звена, как известно, можно составить 3 уравнения равновесия. Для n звеньев число таких уравнений будет равно $3 \cdot n$.

Число неизвестных параметров реакций в низших кинематических парах цепи будет равно $2 \cdot p_1$. Следовательно, для статической определимости кинематической цепи, содержащей только низшие одноподвижные кинематические пары необходимо выполнение условия

$$3 \cdot n = 2 \cdot p_1,$$

или

$$p_1 = (3/2)n. \quad (7.5)$$

Уравнение (7.5) совпадает с уравнением, связывающим число звеньев с числом кинематических пар в структурной группе (группе Ассура). Следовательно, структурные группы являются статически определимыми кинематическими цепями.

Таким образом, *силовой расчёт плоского рычажного механизма можно свести к силовому расчёту отдельных структурных групп, входящих в его состав.*

Общий план силового расчёта плоского рычажного механизма

Исходные данные:

1. Кинематическая схема и основные размеры звеньев механизма.
2. Закон движения начального звена.
3. Массы и моменты инерции звеньев.
4. Внешние силы, действующие на звенья.

Подлежат определению:

1. Реакции в кинематических парах механизма.
2. Уравновешивающая сила, или момент, приложенный к какому либо звену, закон движения которого известен.

Последовательность силового расчёта механизма:

1. Структурный анализ механизма. Выделение начального звена со стойкой и структурных групп в составе механизма.
2. Кинематический анализ механизма. Определение скоростей и ускорений точек и звеньев.
3. Определение сил тяжести звеньев.
4. Определение сил инерции звеньев.
5. Изображение в масштабе каждой структурной группы отдельно. Здесь необходимо указать действующие на звенья силы. Это внешние силы, силы инерции и силы тяжести звеньев. Действия отброшенных звеньев заменяются реакциями, которые подлежат определению.
6. Выполнение силового расчёта последней (в порядке присоединения к начальному звену) структурной группы. Затем выполнение силового расчёта предпоследней структурной группы и т. д.
7. Силовой расчёт начального звена. Определение реакции стойки и уравновешивающей силы, или момента, действующего на начальное звено.

Например, для механизма качающегося конвейера (рис. 7.11), состоящего из двух структурных групп и начального звена со стойкой (рис. 7.12), сначала необходимо выполнить силовой расчёт структурной группы образованной звеньями 4 и 5, затем силовой расчёт структурной группы звеньев 2 и 3, затем силовой расчёт начального звена 1.

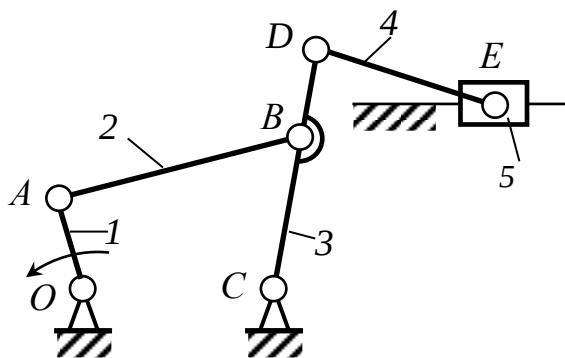


Рис. 7.11. Механизм качающегося конвейера

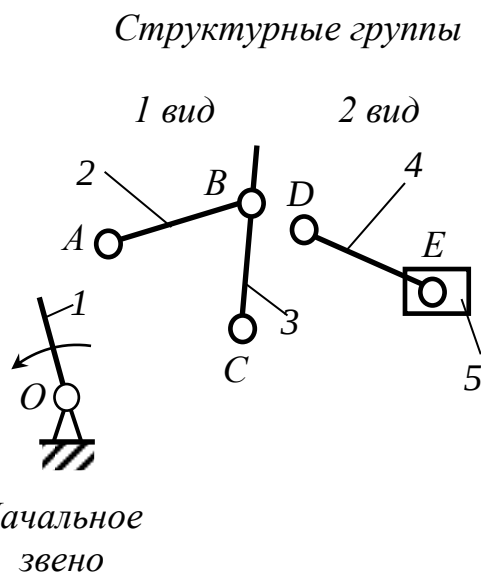


Рис. 7.12. Структура механизма качающегося конвейера

Силовой расчёт двухповодковых структурных групп

Структурная группа вида 1. На звенья 2 и 3 структурной группы (рис. 7.13) действуют следующие силы.

Заданные силы:

$\bar{G}_2$ и $\bar{G}_3$ – силы тяжести звеньев 2 и 3 соответственно;
 $\bar{F}_2^I$ и $\bar{F}_3^I$ – главные векторы сил инерции звеньев 2 и 3;
 $\bar{M}_2^I$ и $\bar{M}_3^I$ – главные моменты сил инерции звеньев 2 и 3;
 $\bar{P}$ – внешняя сила, действующая на звено 3 в точке D .

Подлежат определению:

$\bar{R}_{21}$ – реакция, действующая на звено 2 со стороны отброшенного звена 1;
 $\bar{R}_{30}$ – реакция, действующая на звено 3 со стороны отброшенной опоры;
 $\bar{R}_{23}$ – реакция между звеньями 2 и 3 в шарнире B .

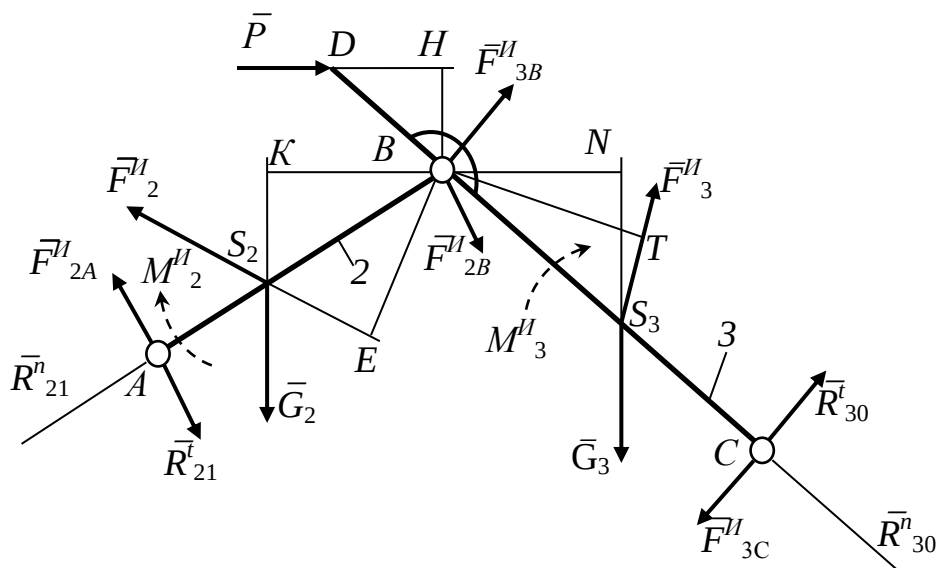


Рис. 7.13. Силы, действующие на группу вида 1

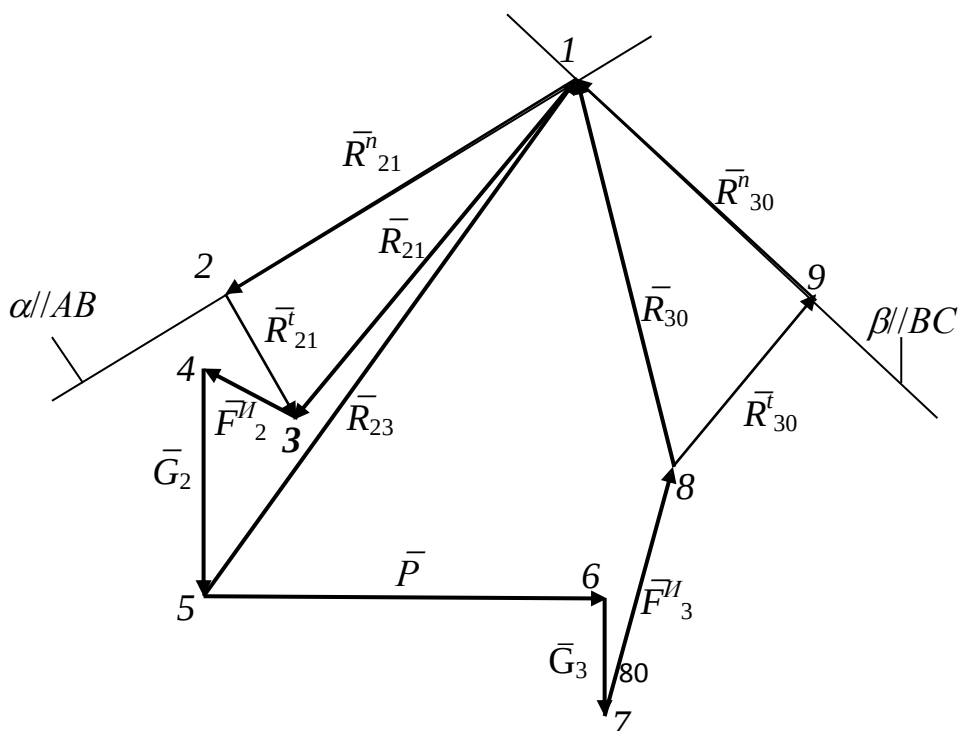


Рис. 7.14. План сил для группы вида 1

Заменим момент $\bar{M}_2^H$ парой сил $\bar{F}_{2A}^H$ и $\bar{F}_{2B}^H$, приложив их в точках A и B соответственно. Направления сил $\bar{F}_{2A}^H$ и $\bar{F}_{2B}^H$ примем перпендикулярными AB так, чтобы момент этой пары сил совпадал по направлению с моментом $\bar{M}_2^H$.

При этом

$$F_{2A}^H = F_{2B}^H = M_2^H / l_{AB},$$

где l_{AB} — плечо пары сил (известный размер звена AB).

Аналогично, заменим момент $\bar{M}_3^H$ парой сил $\bar{F}_{3C}^H$ и $\bar{F}_{3B}^H$, приложив их в точках C и B , соответственно. Направления сил $\bar{F}_{3C}^H$ и $\bar{F}_{3B}^H$ примем перпендикулярными BC так, чтобы момент этой пары сил совпадал по направлению с моментом $\bar{M}_3^H$. Причём

$$F_{3C}^H = F_{3B}^H = M_3^H / l_{BC},$$

где l_{BC} — плечо пары сил (известный размер звена BC).

Рассмотрим определение реакций $\bar{R}_{21}$ и $\bar{R}_{30}$.

Разложим искомую реакцию $\bar{R}_{21}$ на составляющие $\bar{R}_{21}^n$ и $\bar{R}_{21}^t$, т. е.

$$\bar{R}_{21} = \bar{R}_{21}^n + \bar{R}_{21}^t. \quad (7.6)$$

Линию действия составляющей $\bar{R}_{21}^n$ примем параллельно AB , а линию действия составляющей $\bar{R}_{21}^t$ — перпендикулярно AB . При этом обе составляющие проходят через точку A . Первоначально зададим направление $\bar{R}_{21}^t$ произвольным.

Для определения величины и действительного направления $\bar{R}_{21}^t$ составим уравнение равновесия звена 2 в форме суммы моментов сил, действующих на звено 2, относительно точки B :

$$\Sigma M_B = R_{21}^t \cdot AB - F_{2A}^H \cdot AB + G_2 \cdot BK - F_2^H \cdot BE = 0, \quad (7.7)$$

где AB , BK , BE — плечи сил (измеряются на схеме группы).

Из уравнения (7.7) следует:

$$R_{21}^t = (F_{2A}^H \cdot AB - G_2 \cdot BK + F_2^H \cdot BE) / AB. \quad (7.8)$$

Если величина R_{21}^t , найденная из уравнения (7.8), будет положительной, то первоначально принятое направление составляющей $\bar{R}_{21}^t$ будет верным. В противном случае необходимо направление $\bar{R}_{21}^t$ изменить на противоположное.

Разложим искомую реакцию $\bar{R}_{30}$ на составляющие $\bar{R}_{30}^n$ и $\bar{R}_{30}^t$, т. е.

$$\bar{R}_{30} = \bar{R}_{30}^n + \bar{R}_{30}^t. \quad (7.9)$$

Линию действия составляющей $\bar{R}_{30}^n$ примем параллельной BC , а линию действия составляющей $\bar{R}_{30}^t$ — перпендикулярной BC . Причём, обе составляющие проходят через точку C . Первоначально зададим направление $\bar{R}_{30}^t$ произвольным.

Для определения величины и действительного направления $\bar{R}_{30}^t$ составим уравнение равновесия звена 3 в форме суммы моментов сил, действующих на звено 3, относительно точки B:

$$\Sigma M_B = R_{30}^t \cdot BC - F_{3C}^{II} \cdot BC - G_3 \cdot BN + F_3^{II} \cdot BT - P \cdot BH = 0, \quad (7.10)$$

где BC, BN, BT, BH – плечи сил (измеряются на схеме группы).

Из уравнения (7.10) следует:

$$R_{30}^t = (F_{3C}^{II} \cdot BC + G_3 \cdot BN - F_3^{II} \cdot BT + P \cdot BH) / BC \quad (7.11)$$

Если величина R_{30}^t , найденная из уравнения (7.11), будет положительной, то первоначально принятое направление составляющей $\bar{R}_{30}^t$ будет верным. В противном случае необходимо направление $\bar{R}_{30}^t$ изменить на противоположное.

Для определения составляющих реакций $\bar{R}_{21}^n$ и $\bar{R}_{30}^n$ составим уравнение равновесия группы звеньев в целом в форме векторной суммы сил, действующих на группу:

$$\begin{matrix} \bar{R}_{21}^n & + & \bar{R}_{21}^t & + & \bar{F}_2^{II} & + & \bar{G}_2 & + & \bar{P} & + & \bar{G}_3 & + & \bar{F}_3^{II} & + & \bar{R}_{30}^t & + & \bar{R}_{30}^n & = & 0. \end{matrix} \quad (7.12)$$

1-2 2-3 3-4 4-5 5-6 6-7 7-8 8-9 9-1

Неизвестные составляющие $\bar{R}_{21}^n$ и $\bar{R}_{30}^n$ в этом уравнении помещены одна на первом, а другая – на последнем месте. В уравнении (7.12) цифрами обозначены начала и концы соответствующих векторов.

Векторное уравнение (7.12) решим графически, построив в определённом масштабе план сил (рис. 7.14). Проведём параллельно AB прямую линию α , которая является линией действия составляющей $\bar{R}_{21}^n$. На прямой α выберем произвольно точку 2, в которую поместим начало вектора $\bar{R}_{21}^t$. Конец вектора $\bar{R}_{21}^t$ обозначим цифрой 3. Затем выполним по порядку сложение остальных векторов, входящих в уравнение (7.12). После изображения вектора $\bar{R}_{30}^t$ (отрезок 8-9) проведём через точку 9 прямую β параллельно BC. Прямая β является линией действия реакции $\bar{R}_{30}^n$. Точку пересечения прямых α и β обозначим цифрой 1. Отрезок 1-2 будет изображать составляющую реакцию $\bar{R}_{21}^n$. Отрезок 9-1 будет изображать реакцию $\bar{R}_{30}^n$.

В соответствии с уравнением (7.6) полная реакция $\bar{R}_{21}$ будет изображаться отрезком 1-3 на плане сил. Аналогично реакция $\bar{R}_{30}$ в соответствии с (7.9) изображается на плане сил отрезком 8-1.

Для определения реакции $\bar{R}_{23}$ между звеньями 2 и 3 в шарнире B составим уравнение равновесия звена 2 в форме векторной суммы сил, действующих на звено 2:

$$\begin{matrix} \bar{R}_{21} & + & \bar{F}_2^{II} & + & \bar{G}_2 & + & \bar{R}_{23} & = & 0. \end{matrix} \quad (7.13)$$

1-3 3-4 4-5 5-1

Как следует из уравнения (7.13), отрезок 5-1 будет изображать на плане сил искомую реакцию $\bar{R}_{23}$.

Таким образом, определены все реакции, действующие на звенья структурной группы вида 1.

Структурная группа вида 2. На звенья 2 и 3 структурной группы (рис. 7.15) действуют следующие силы.

Заданные силы:

$\bar{G}_2$ и $\bar{G}_3$ – силы тяжести звеньев 2 и 3 соответственно;

$\bar{F}_2^I$ – главный вектор сил инерции звена 2;

$\bar{M}_2^I$ – главный момент сил инерции звена 2;

$\bar{F}_3^I$ – сила инерции звена 3;

$\bar{P}$ – внешняя сила, действующая на звено 3.

Подлежат определению:

$\bar{R}_{21}$ – реакция, действующая на звено 2 со стороны отброшенного звена 1;

$\bar{R}_{30}$ – реакция, действующая на звено 3 со стороны отброшенной направляющей поступательной пары (направлена перпендикулярно оси x);

$\bar{R}_{23}$ – реакция между звеньями 2 и 3 в шарнире B .

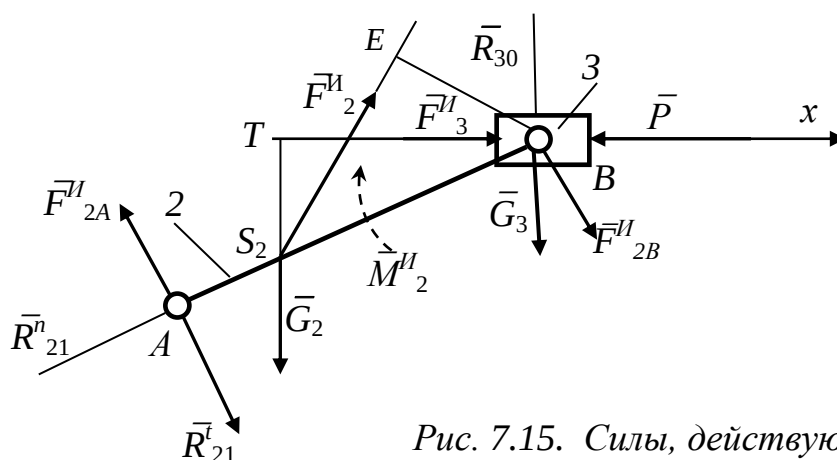


Рис. 7.15. Силы, действующие на группу вида 2

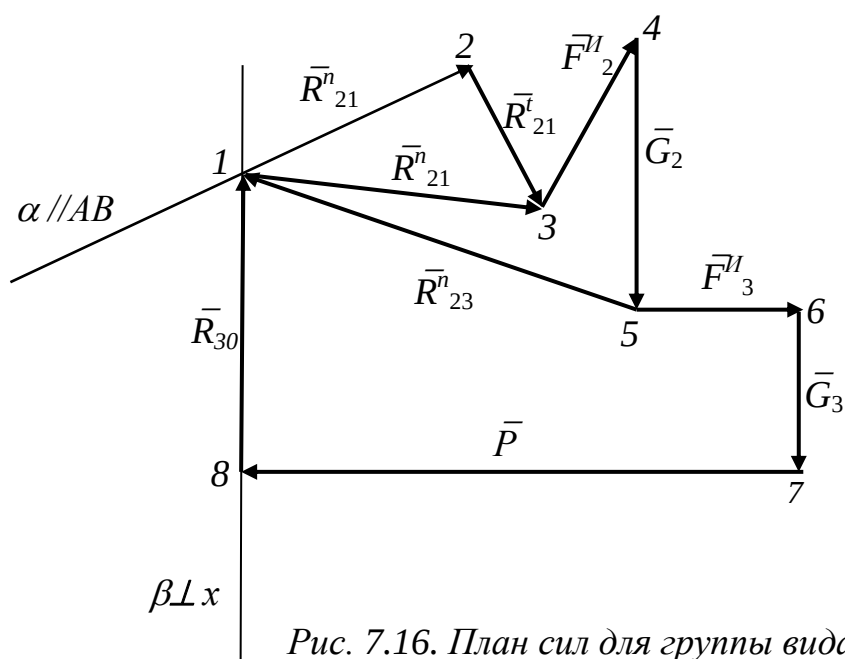


Рис. 7.16. План сил для группы вида 2

Заменим момент $\bar{M}_2''$ парой сил $\bar{F}_{2A}''$ и $\bar{F}_{2B}''$, приложив их в точках A и B соответственно. Направления сил $\bar{F}_{2A}''$ и $\bar{F}_{2B}''$ примем перпендикулярными AB так, чтобы момент этой пары сил совпадал по направлению с моментом $\bar{M}_2''$.

Причём

$$F_{2A}'' = F_{2B}'' = M_2'' / l_{AB},$$

где l_{AB} — плечо пары сил (известный размер звена AB).

Рассмотрим определение реакций $\bar{R}_{21}$ и $\bar{R}_{30}$. Разложим искомую реакцию $\bar{R}_{21}$ на составляющие $\bar{R}_{21}^n$ и $\bar{R}_{21}^t$, т. е.

$$\bar{R}_{21} = \bar{R}_{21}^n + \bar{R}_{21}^t. \quad (7.14)$$

Линию действия составляющей $\bar{R}_{21}^n$ направим параллельно AB , а линию действия составляющей $\bar{R}_{21}^t$ — перпендикулярно AB . При чём обе составляющие проходят через точку A . Первоначальное направление $\bar{R}_{21}^t$ примем произвольным.

Для определения величины и действительного направления $\bar{R}_{21}^t$ составим уравнение равновесия звена 2 в форме суммы моментов сил, действующих на звено 2, относительно точки B :

$$\Sigma M_B = R_{21}^t \cdot AB - F_{2A}'' \cdot AB + G_2 \cdot BT - F_2'' \cdot BE = 0, \quad (7.15)$$

где AB , BT , BE — плечи сил (измеряются на схеме группы).

Из уравнения (7.15) следует:

$$R_{21}^t = (F_{2A}'' \cdot AB - G_2 \cdot BT + F_2'' \cdot BE) / AB. \quad (7.16)$$

Если величина R_{21}^t , найденная из уравнения (7.16), будет положительной, то первоначально принятое направление составляющей $\bar{R}_{21}^t$ будет верным. В противном случае необходимо направление $\bar{R}_{21}^t$ изменить на противоположное.

Для определения реакций $\bar{R}_{21}^n$ и $\bar{R}_{30}$ составим уравнение равновесия группы в форме векторной суммы сил, действующих на группу:

$$\bar{R}_{21}^n + \bar{R}_{21}^t + \bar{F}_2'' + \bar{G}_2 + \bar{F}_3'' + \bar{G}_3 + \bar{P} + \bar{R}_{30} = 0. \quad (7.17)$$

1-2 2-3 3-4 4-5 5-6 6-7 7-8 8-1

Неизвестные реакции $\bar{R}_{21}^n$ и $\bar{R}_{30}$ помещены одна — в начале, а другая — в конце этого уравнения. В уравнении (7.17) цифрами обозначены начала и концы соответствующих векторов.

Векторное уравнение (7.17) решим графически, построив в определённом масштабе план сил (рис. 7.16).

Проведём параллельно AB прямую линию α , которая является линией действия составляющей $\bar{R}_{21}^n$. На прямой α выберем произвольно точку 2, в которую поместим начало вектора $\bar{R}_{21}^t$. Конец вектора $\bar{R}_{21}^t$ обозначим цифрой 3. Затем выполним по порядку сложение остальных векторов, входящих в уравнение (7.17). После изображения вектора $\bar{P}$ (отрезок 7-8) проведём через точку 8 прямую β перпендикулярно оси x . Прямая β является линией действия реакции $\bar{R}_{30}$. Точку пересечения прямых α и β обозначим цифрой 1. Отрезок 1-2

будет изображать составляющую реакцию $\bar{R}_{21}^n$. Отрезок 8-1 будет изображать реакцию $\bar{R}_{30}$.

В соответствии с уравнением (7.14) полная реакция $\bar{R}_{21}$ будет изображаться отрезком 1-3 на плане сил.

Для определения реакции $\bar{R}_{23}$ между звеньями 2 и 3 в шарнире B составим уравнение равновесия звена 2 в форме векторной суммы сил, действующих на звено 2.

$$\begin{matrix} \bar{R}_{21} & + & \bar{F}_2^H & + & \bar{G}_2 & + & \bar{R}_{23} & = & 0. \end{matrix} \quad (7.18)$$

1-3 3-4 4-5 5-1

Как следует из уравнения (7.18), отрезок 5-1 будет изображать на плане сил искомую реакцию $\bar{R}_{23}$.

Таким образом, определены все реакции в кинематических парах структурной группы вида 2.

Структурная группа вида 3. На звенья 2 и 3 структурной группы (рис. 7.17) действуют следующие силы.

Заданные силы:

$\bar{G}_3$ —сила тяжести звена 3 (силой тяжести звена 2 пренебрегаем в виду её малости);

$\bar{F}_3^H$ —главный вектор сил инерции звена 3;

$\bar{M}_3^H$ —главный момент сил инерции звена 3;

$\bar{P}$ —внешняя сила, действующая на звено 3.

Подлежат определению:

$\bar{R}_{21}$ —реакция, действующая на звено 2 со стороны отброшенного звена 1 (линия действия $\bar{R}_{21}$ перпендикулярна BC);

$\bar{R}_{30}$ — реакция, действующая на звено 3 со стороны отброшенной опоры;

$\bar{R}_{23}$ — реакция между звеньями 2 и 3.

Заменим момент $\bar{M}_3^H$ парой сил $\bar{F}_{3C}^H$ и $\bar{F}_{3B}^H$, приложив их в точках C и B соответственно. Направления сил $\bar{F}_{3C}^H$ и $\bar{F}_{3B}^H$ примем перпендикулярными BC так, чтобы момент этой пары сил совпадал по направлению с моментом $\bar{M}_3^H$.

$$\text{Причём } F_{3C}^H = F_{3B}^H = M_3^H / l_{BC},$$

где l_{BC} — плечо пары сил (известный размер звена BC).

Зададим первоначально направление $\bar{R}_{21}$ по линии её действия произвольным.

Для определения величины и действительного направления $\bar{R}_{21}$ составим уравнение равновесия группы в форме суммы моментов сил, действующих на группу, относительно точки B :

$$\Sigma M_B = -R_{21} \cdot AB - F_{3C}^H \cdot BC - G_3 \cdot BH + F_3^H \cdot BT + P \cdot BE = 0, \quad (7.19)$$

где AB , BC , BH , BT и BE — плечи сил (измеряются на схеме группы).

Из уравнения (7.19) следует:

$$R_{21} = (-F_{3C}^H \cdot BC - G_3 \cdot BH + F_3^H \cdot BT + P \cdot BE) / AB. \quad (7.20)$$

Если величина R_{21} , найденная из уравнения (7.20), будет положительной, то первоначально принятое направление составляющей $\bar{R}_{21}$ будет верным. В противном случае необходимо направление $\bar{R}_{21}$ изменить на противоположное.

Для определения реакции $\bar{R}_{30}$ составим уравнение равновесия группы в форме векторной суммы сил, действующих на группу:

$$\bar{R}_{21} + \bar{F}_{3\ 2-3}^I + \bar{G}_{3\ 3-4} + \bar{P}_{4-5} + \bar{R}_{30\ 5-1} = 0. \quad (7.21)$$

В уравнении (7.21) цифрами обозначены начала и концы соответствующих векторов. Неизвестная реакция $\bar{R}_{30}$ в этом уравнении помещена на последнем месте. Векторное уравнение (7.21) решим графически, построив в определённом масштабе план сил (рис. 7.18).

Складывая поочерёдно векторы сил, входящие в уравнение (7.21), и замкнув многоугольник сил отрезком 5-1, получим реакцию $\bar{R}_{30}$.

Реакцию $\bar{R}_{23}$ между звеньями 2 и 3 можно найти из условия равновесия звена 2: $\bar{R}_{21} + \bar{R}_{23} = 0$, откуда $\bar{R}_{23} = -\bar{R}_{21}$.

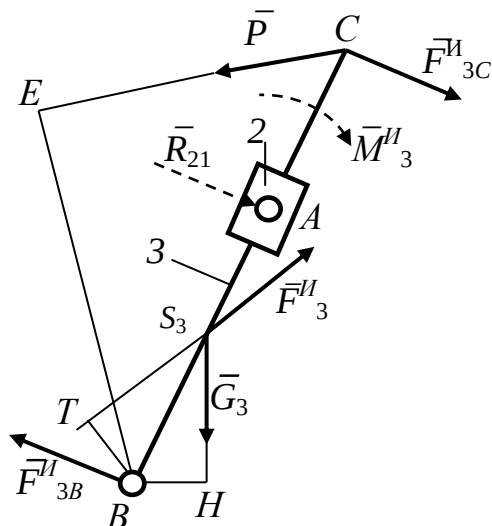


Рис. 7.17. Силы, действующие на группу вида 3

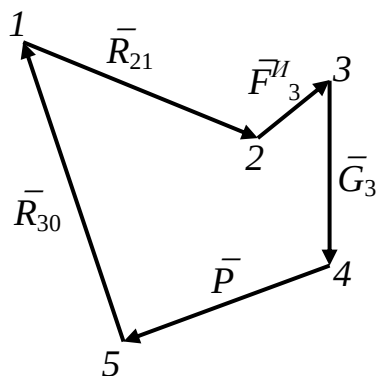


Рис. 7.18. План сил для группы вида 3

Структурная группа вида 4. На звенья 4 и 5 структурной группы (рис. 7.19) действуют следующие силы.

Заданные силы:

$\bar{G}_5$ – сила тяжести звена 5 (силой тяжести звена 4 пренебрегаем в виду её малости по условию);

$\bar{F}_5^I$ – главный вектор сил инерции звена 5;

$\bar{P}$ – внешняя сила, действующая на звено 5.

Подлежат определению:

$\bar{R}_{43}$ – реакция, действующая на звено 4 со стороны отброшенного звена 3 (линия действия $\bar{R}_{43}$ перпендикулярна направляющей n поступательной пары);

$\bar{R}_{50}$ – реакция, действующая на звено 5 со стороны отброшенной опоры (линия действия $\bar{R}_{50}$ перпендикулярна направляющей внешней поступательной пары);

$\bar{R}_{45}$ – реакция между звеньями 4 и 5.

Составим уравнение равновесия структурной группы в форме векторной суммы сил, действующих на звенья группы:

$$\begin{matrix} \bar{R}_{50} & + & \bar{P} & + & \bar{G}_5 & + & \bar{F}_5^M & + & \bar{R}_{43} & = & 0. \end{matrix} \quad (7.22)$$

1-2 2-3 3-4 4-5 5-1

В уравнении (7.22) цифрами обозначены начала и концы соответствующих векторов. Неизвестные реакции $\bar{R}_{50}$ и $\bar{R}_{43}$ в этом уравнении помещены на первое и последнее места. Векторное уравнение (7.22) решим графически, построив в определённом масштабе план сил (рис. 7.20).

Проведём прямую α перпендикулярно направляющей S внешней поступательной пары. Прямая α является линией действия реакции $\bar{R}_{50}$. На прямой α выберем произвольно точку 2, в которую поместим начало вектора $\bar{P}$. Конец вектора $\bar{P}$ обозначим цифрой 3. Затем выполним по порядку сложение остальных известных векторов, входящих в уравнение (7.22). Это векторы $\bar{G}_5$ и $\bar{F}_5^M$. Через точку 5, которая является концом вектора $\bar{F}_5^M$, проведём прямую β , перпендикулярно направляющей n внешней поступательной пары. Точку пересечения прямых α и β обозначим цифрой 1. Отрезок 5-1 будет изображать реакцию $\bar{R}_{43}$. Отрезок 1-2 будет изображать реакцию $\bar{R}_{50}$.

Реакцию $\bar{R}_{45}$ между звеньями 4 и 5 можно найти из условия равновесия звена 4: $\bar{R}_{43} + \bar{R}_{45} = 0$, откуда $\bar{R}_{45} = -\bar{R}_{43}$.

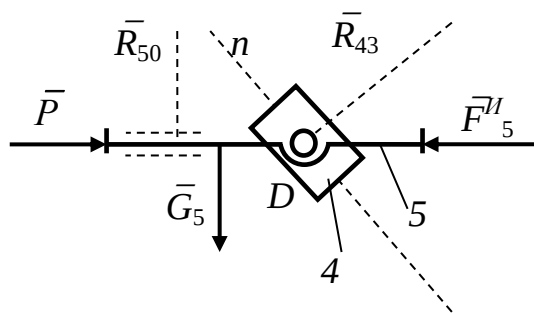


Рис. 7.19. Силы, действующие на группу вида 4

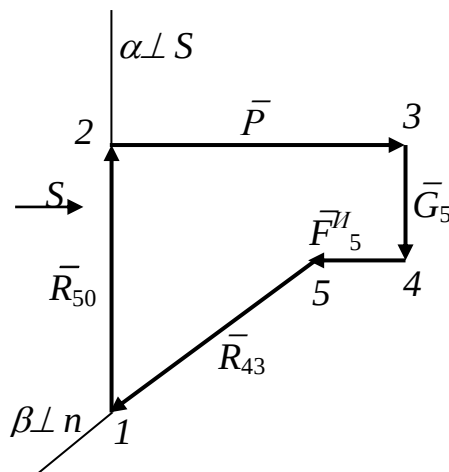


Рис. 7.20. План сил для группы вида 4

Таким образом, определены все реакции в структурной группе вида 4.

Структурная группа вида 5. На звенья 4 и 5 структурной группы (рис. 7.21) действуют следующие силы.

Заданные силы:

$\bar{G}_5$ —сила тяжести звена 5 (силой тяжести звена 4 пренебрегаем в виду её малости по условию);

$\bar{F}_5^M$ —главный вектор сил инерции звена 5;

$\bar{P}$ —внешняя сила, действующая на звено 5.

Подлежат определению:

$\bar{R}_{43}$ —реакция, действующая на звено 4 со стороны отброшенного звена 3 (линия действия $\bar{R}_{43}$ перпендикулярна направляющей поступательной пары, образованной звеньями 4 и 5, т.е. $\parallel x$);

$\bar{R}_{50}$ — реакция, действующая на звено 5 со стороны отброшенной опоры (линия действия $\bar{R}_{50}$ перпендикулярна направляющей внешней поступательной пары, т.е. $\perp x$);

$\bar{R}_{45}$ — реакция между звеньями 4 и 5.

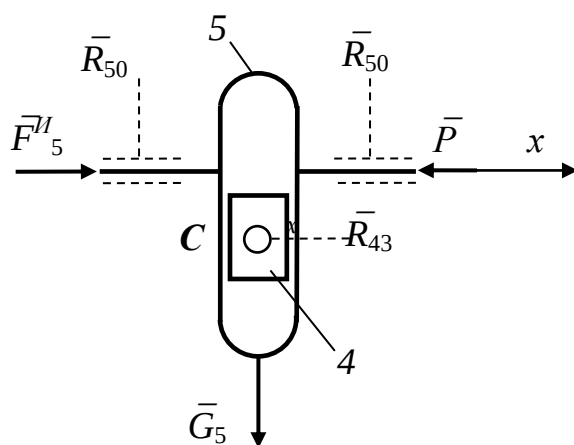


Рис. 7.21. Силы, действующие на группу вида 5

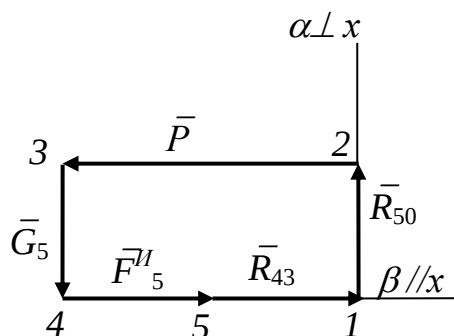


Рис. 7.22 . План сил для группы вида 5

Составим уравнение равновесия структурной группы в форме векторной суммы сил, действующих на звенья группы:

$$\bar{R}_{50} + \bar{P} + \bar{G}_5 + \bar{F}_5^M + \bar{R}_{43} = 0. \quad (7.23)$$

1-2 2-3 3-4 4-5 5-1

В уравнении (7.23) цифрами обозначены начала и концы соответствующих векторов. Неизвестные реакции $\bar{R}_{50}$ и $\bar{R}_{43}$ в этом уравнении помещены на первое и последнее места. Векторное уравнение (7.23) решим графически, построив в определённом масштабе план сил (рис. 7.22).

Проведём прямую линию α перпендикулярно направляющей x внешней поступательной пары. Прямая α является линией действия реакции $\bar{R}_{50}$. На

прямой α выберем произвольно точку 2, в которую поместим начало вектора $\bar{P}$. Конец вектора $\bar{P}$ обозначим цифрой 3. Затем выполним по порядку сложение остальных известных векторов, входящих в уравнение (7.22). Это векторы $\bar{G}_5$ и $\bar{F}_5^H$. Через точку 5, которая является концом вектора $\bar{F}_5^H$, проведём прямую β , перпендикулярно направляющей поступательной пары между звеньями 4 и 5, т.е. $\beta \parallel x$. Точку пересечения прямых α и β обозначим цифрой 2. Отрезок 5-1 будет изображать реакцию $\bar{R}_{43}$. Отрезок 1-2 будет изображать реакцию $\bar{R}_{50}$.

Реакцию $\bar{R}_{45}$ между звеньями 4 и 5 можно найти из условия равновесия звена 4: $\bar{R}_{43} + \bar{R}_{45} = 0$, откуда $\bar{R}_{45} = -\bar{R}_{43}$.

Таким образом, определены все реакции в структурной группе вида 5.

Силовой расчёт начального звена

Схема начального звена 1, образующего вращательную пару со стойкой изображена на рис. 7.23.

На звено 1 действуют следующие силы.

Заданные силы:

$\bar{G}_1$ — сила тяжести;

$\bar{R}_{12}$ — сила, действующая со стороны звена 2.

Подлежат определению:

$\bar{R}_{10}$ — реакция, действующая на звено 1 со стороны стойки в шарнире O;

M_y — уравновешивающий момент.

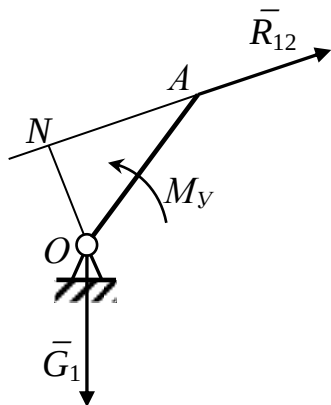


Рис. 7.23. Начальное звено

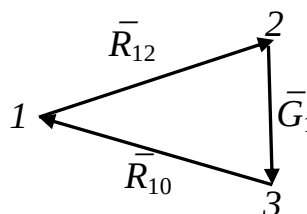


Рис. 7.24. План сил для начального звена

Составим уравнение равновесия в форме векторной суммы сил, действующих на звено 1.

$$\bar{R}_{12} + \bar{G}_1 + \bar{R}_{10} = 0. \quad (7.24)$$

1-2 2-3 3-1

В уравнении (7.24) цифрами обозначены начала и концы векторов, входящих в его состав.

Решая графически это уравнение, построим в определённом масштабе план сил (рис. 7.24). На плане сил отрезок 3-1 изображает реакцию стойки $\bar{R}_{10}$.

Составим уравнение равновесия звена 1 в форме суммы моментов сил, действующих на звено относительно точки O .

$$\Sigma M_O = R_{12} \cdot l_{ON} - M_Y = 0, \quad (7.25)$$

где l_{ON} – плечо силы $\bar{R}_{12}$ относительно точки O .

Из уравнения (25) следует

$$M_Y = R_{12} \cdot l_{ON}. \quad (7.26)$$

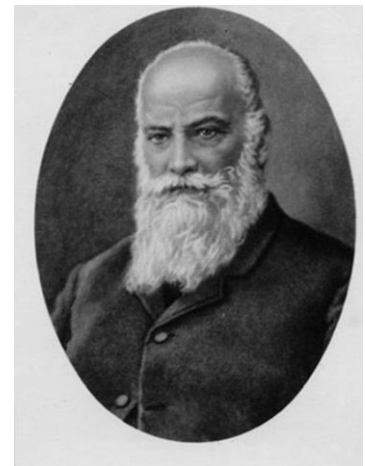
Таким образом, полностью определены реакция стойки $\bar{R}_{10}$ и уравновешивающий момент M_Y , действующие на звено 1.

ЛЕКЦИЯ 8

Рычаг Н.Е. Жуковского

ЖУКОВСКИЙ

НИКОЛАЙ ЕГОРОВИЧ (1847 – 1921) – русский учёный в области механики, основоположник современной аэро- и гидромеханики («Отец русской авиации»).



Рычаг Жуковского для данного механизма – жёсткая система (ферма), имеющая вид повернутого на 90 градусов плана скоростей механизма и закреплённая в полюсе.

Рассмотрим построение рычага Жуковского для шарнирного четырёхзвенового механизма, изображённого на рис. 8.1.

Построим предварительно план скоростей механизма в произвольном масштабе (рис. 8.2). Для этого составим векторное уравнение:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \quad (8.1)$$

где $\bar{V}_B$ – скорость точки B (направлена перпендикулярно BC);

$\bar{V}_A$ – скорость точки A (направлена перпендикулярно OA);

$\bar{V}_{BA}$ – скорость точки B при вращении звена AB вокруг точки A (направлена перпендикулярно AB).

Векторное уравнение (8.1) решим графически, построив план скоростей механизма (рис. 8.2). Масштаб построения плана скоростей можно принять произвольным).

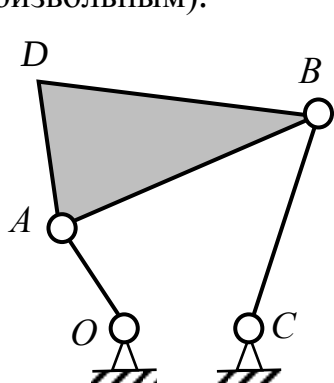


Рис. 8.1. Шарнирный четырёхзвенный механизм

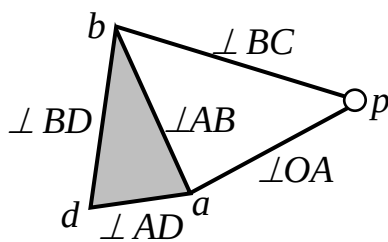


Рис. 8.2. План скоростей

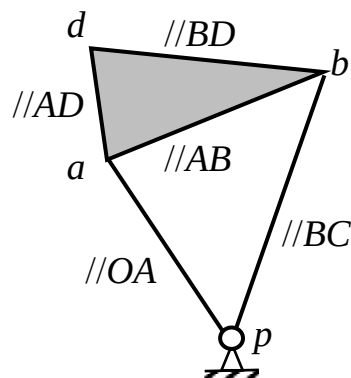


Рис. 8.3. Рычаг Жуковского

Повернув план скоростей на 90° в любую сторону и закрепив его в полюсе p , получим рычаг Жуковского (рис. 8.3). Масштаб построений рычага Жуковского может отличаться от масштаба плана скоростей механизма.

Теорема Жуковского о рычаге заключается в следующем.

Если силы, действующие на звенья механизма, перенести в соответствующие точки рычага Жуковского, то при равновесии механизма рычаг Жуковского тоже будет находиться в равновесии.

Теорема Жуковского о рычаге является геометрической интерпретацией принципа возможных перемещений для механизма с одной степенью свободы. Этот принцип заключается в том, что для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма мгновенных мощностей внешних сил и сил инерции, действующих на систему, была равна нулю, т.е.

$$\sum_1^n (F_k \cdot V_k \cdot \cos \alpha) = 0, \quad (8.2)$$

где $\bar{F}_K$ — отдельная сила, действующая на точку K (рис. 8.4);

$\bar{V}_K$ — скорость точки K ;

α — угол между векторами $\bar{F}_K$ и $\bar{V}_K$.

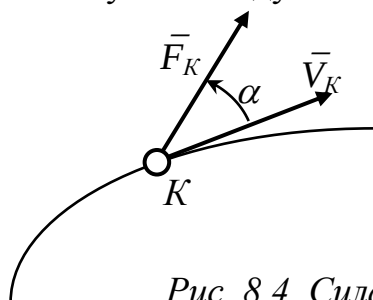


Рис. 8.4. Сила, действующая на точку K

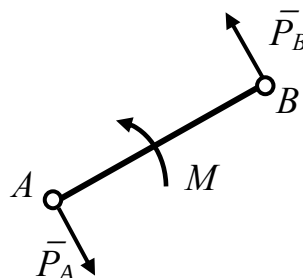


Рис. 8.5. Замена момента M парой сил $\bar{P}_A$ и $\bar{P}_B$

В том случае, когда кроме сил на звенья механизма действуют моменты сил, то для переноса их на рычаг Жуковского необходимо каждый из моментов заменить парой сил. Например, момент M , действующий на звено AB (рис. 8.5), можно заменить парой сил $\bar{P}_A$ и $\bar{P}_B$. Причём по величине $P_A = P_B = M / l_{AB}$, где l_{AB} – плечо пары сил. Силы $\bar{P}_A$ и $\bar{P}_B$ направлены перпендикулярно AB . Направление момента заменяющей пары сил должно совпадать с направлением момента M .

Теорему Жуковского о рычаге можно использовать для нахождения равнодействующей силы, действующей на механизм.

Рассмотрим использование теоремы Жуковского о рычаге для определения уравнивающего момента на примере кривошипно-ползунного механизма.

Кинематическая схема и силы, действующие на звенья механизма, изображены на рис. 8.6.

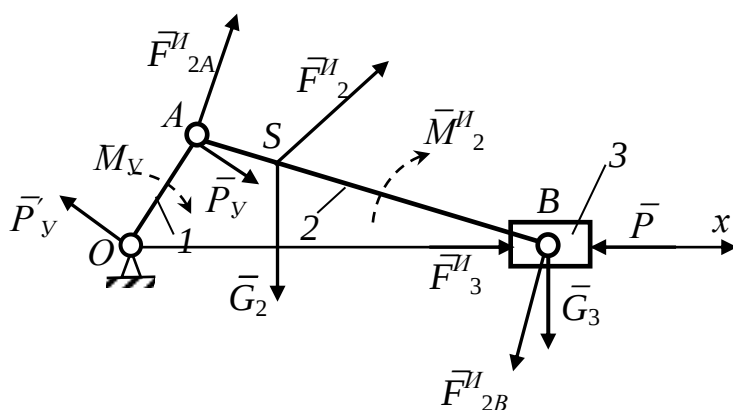


Рис. 8.6. Силы, действующие на кривошипно-ползунный механизм

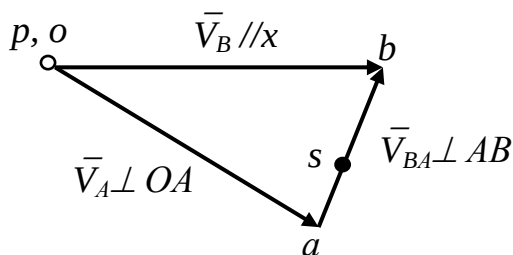


Рис. 8.7. План скоростей

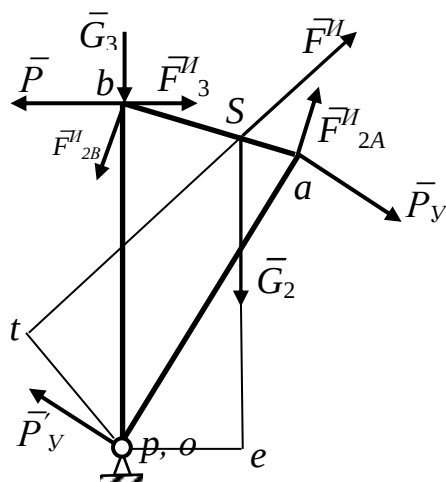


Рис. 8.8. Рычаг Жуковского

На звенья механизма действуют следующие заданные силы:

$\bar{G}_2$ и $\bar{G}_3$ – силы тяжести звеньев 2 и 3 соответственно;

$\bar{F}_2^H$ – главный вектор сил инерции звена 2;

$\bar{M}_2^H$ – главный момент сил инерции звена 2;

$\bar{F}_3^H$ – сила инерции звена 3;

$\bar{P}$ – внешняя сила, действующая на звено 3.

Требуется определить уравновешивающий момент $\bar{M}_y$, приложенный к начальному звену 1.

Для построения плана скоростей механизма составим векторные уравнения:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}; (8.3)$$

$$\bar{V}_B = \bar{V}_C + \bar{V}_{BC}; (8.4)$$

где $\bar{V}_B$ – скорость точки B (направлена параллельно направляющей x);

$\bar{V}_A$ – скорость точки A (направлена перпендикулярно OA);

$\bar{V}_{BA}$ – скорость точки B при вращении звена AB вокруг точки A (направлена перпендикулярно AB);

$\bar{V}_C$ – скорость точки C (равна нулю);

$\bar{V}_{BC}$ – скорость точки C при вращении звена BC вокруг точки C (направлена перпендикулярно BC).

Построим план скоростей (рис. 8.7), решив векторные уравнения (8.3) и (8.4) графически. При этом длину вектора $\bar{V}_A$, перпендикулярного OA , примем произвольной.

Повернув план скоростей на 90° и закрепив его в полюсе p , получим рычаг Жуковского (рис. 8.8).

В соответствующие точки рычага Жуковского перенесём силы, действующие на звенья механизма, сохранив их направления.

Момент $\bar{M}_2^H$ заменим парой сил $\bar{F}_{2A}^H$ и $\bar{F}_{2B}^H$, приложив их в точках A и B соответственно. Направления сил $\bar{F}_{2A}^H$ и $\bar{F}_{2B}^H$ примем перпендикулярными AB так, чтобы момент этой пары сил совпадал по направлению с моментом $\bar{M}_2^H$.

$$\text{Причём } F_{2A}^H = F_{2B}^H = M_2^H / l_{AB},$$

где l_{AB} – плечо пары сил (известный размер звена AB).

Искомый уравновешивающий момент $\bar{M}_y$ заменим парой сил $\bar{P}_y$ и $\bar{P}'_y$, приложив их в точках O и A соответственно. Направление момента $\bar{M}_y$ примем предварительно произвольным. Направление момента пары сил $\bar{P}_y$ и $\bar{P}'_y$ совпадает с принятым направлением момента $\bar{M}_y$.

$$\text{При этом } P_y = P'_y = M_y / l_{OA},$$

где l_{OA} – плечо пары сил (известный размер звена OA).

Пары сил $\bar{F}_{2A}^H$ и $\bar{F}_{2B}^H$, а также $\bar{P}_y$ и $\bar{P}'_y$ перенесём на рычаг Жуковского в соответствующие точки.

Составим уравнение равновесия рычага Жуковского в форме суммы моментов сил, действующих на рычаг, относительно полюса p .

$$\Sigma M_p = -P_y \cdot pa - G_2 \cdot pe + F_{2A}^{II} \cdot ab - F_2^{II} \cdot pt - F_3^{II} \cdot pb + P \cdot pb = 0,$$

откуда

$$P_y = (-G_2 \cdot pe + F_{2A}^{II} \cdot ab - F_2^{II} \cdot pt - F_3^{II} \cdot pb + P \cdot pb) / pa,$$

где pa , pe , ab , pt , pb – отрезки на рычаге Жуковского, изображающие плечи сил (измеряются на чертеже).

Если величина P_y здесь получилась положительной, то принятое первоначально направление момента M_y и пары сил $\bar{P}_y$ и $\bar{P}'_y$ оказалось верными. В противном случае выбранное направление момента M_y и пары сил $\bar{P}_y$ и $\bar{P}'_y$ необходимо изменить на противоположное.

Определим величину уравновешивающего момента:

$$M_y = P_y \cdot l_{OA},$$

где l_{OA} – заданный размер звена OA .

Таким образом, величина и направление уравновешивающего момента, действующего на начальное звено механизма, определены полностью. Знание уравновешивающего момента необходимо для проектирования привода механизма.

Составитель: Евдокимов Юрий Иванович

**ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН.
ЧАСТЬ 1.
СТРУКТУРА, КИНЕМАТИКА И КИНЕТОСТАТИКА
МЕХАНИЗМОВ
КУРС ЛЕКЦИЙ**

Редактор Н.К. Крупина
Компьютерная вёрстка Ю.И. Евдокимова

Переизданный курс лекции печатается в авторской редакции 2013 г.

Подписано в печать 29 сентября 2020
Формат 60×84 1/16. Объём 1,75 уч. – изд. л.
Тираж 120 экз. Изд. № _____. Заказ № _____

Отпечатано в издательстве
Новосибирского государственного аграрного университета

630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160, каб. 106
Тел/факс (383) 267-09-10. E-mail: 2134539@mail.ru

