ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

Теория вероятностей и математическая статистика

Методические указания по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы

09.03.03 *Прикладная информатика*

Новосибирск 2025

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор И. В. Ершов.

Теория вероятностей и математическая статистика: методические указания по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост.: Е.Ю.Тарсис – Новосибирск, 2025. – 70 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлению подготовки 09.03.03 Прикладная информатика.

Рекомендованы к изданию ученым советом института цифровых технологий ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ (протокол №11 от 27 мая 2025 г.).

Содержание

Р
е
к
о
м
е
н
д
о
в
а
н
ы

к

и
з
д

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания теории вероятностей и математической статистики в вузе для студентов экономических и организационно-управленческих специальностей –добиться усвоения студентами основ математического аппарата теории вероятностей и математической статистики, необходимого для решения теоретических и практических экономических и организационно-управленческих задач, привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям, подготовить к чтению современной научной литературы и обеспечить запросы других разделов математики и дисциплин, использующих возникающие в математическом анализе, конструкции; развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также начальные навыки прикладных исследований.

Задачи дисциплины:

– развить у студентов абстрактно-логическое и алгоритмическое мышление,
– познакомить студентов с идеями и методами математического анализа,
– привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,
– привить студентам опыт решения задач с использованием инструментариев теории вероятностей и математической статистики.
– помочь в овладении студентами основными математическими понятиями, алгоритмами и методами,
– сформировать способность искать, критически анализировать и систематизировать информацию, применять системный подход для успешного решения поставленных прикладных задач;
– умение разбираться в существующих математических методах и моделях и условиях их применимости на практике;
–приобретении студентами опыта выделения базовых составляющих при анализе задачи, ее декомпозиции.

1.2. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент ***должен***:

Знать:

– основные понятия и методы ТВиМС необходимые для критического и системного подхода к работе с информацией, требуемой для решения поставленных задач в области связи и информационно-коммуникационных технологий;

– основные понятия и методы ТВиМС необходимые для описания, анализа и оценки эффективности реализуемых процессов в бизнес-планировании, совершенствования и моделирования бизнес-процессов, поиска решений поставленных задач бизнес-анализа, управления и моделирования бизнес-процессов.

Уметь:

– работать с информацией и искать достоверные суждения; использовать полученные знания при изучении других дисциплин математического и профессионального циклов;

– применять современный инструментарий ТВиМС для решения профессиональных задач и исследования объектов профессиональной деятельности, поиска эффективных организационно-управленческих решений;

– адекватно анализировать конкретную прикладную задачу на основе сопоставления различных источников информации и оценки полученной информации, выбирать соответствующий прием и метод ее решения;

– формулировать содержательные выводы по результатам теоретического решения задач и проблем;

– определять последствия влияния различных методов и способов на результаты деятельности организации;

– применять математический аппарат теории вероятностей и математической статистики для исследования объектов профессиональной деятельности, построения экономико-математических моделей и решения экономических и управленческих задач;

Владеть на основе методов и алгоритмов ТВиМС навыками***:***

–применения инструментария ТВиМС для решения экономических и организационно-управленческих задач;

– выявления, сбора, анализа и синтеза информации, системного подхода к решению задач профессиональной деятельности;
– способностью находить организационно-управленческие решения, оценивать результаты и последствия принятого управленческого решения.
– навыками выявления, сбора и анализа информации бизнес-анализа, оценки и выбора решений, разработки моделей бизнес-процессов, а также для анализа и корректировки уже существующих.
– способностью находить организационно-управленческие решения, оценивать результаты и последствия принятого управленческого решения;
– методами и алгоритмами ТВиМС для выявления, сбора и анализа информации бизнес-анализа, оценки и выбора решений, разработки моделей бизнес-процессов, а также для анализа и корректировки уже существующих.

2. Методические рекомендации по самостоятельной работе

Успешное освоение компетенций, формируемых данной учебной дисциплиной, предполагает оптимальное использование времени самостоятельной работы. Особенно это актуально для студента-заочника, самостоятельная работа которого над учебным материалом, является основной формой обучения. В помощь заочнику университет организует чтение лекций и практические занятия. Кроме того, студент может обращаться к преподавателю с вопросами в письменном виде или устно. Однако студент-заочник должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь университета будет достаточно эффективной.

Самостоятельная работа во внеаудиторное время состоит из:

– проработки лекционного материала, доработки конспекта в результате изучения учебно-методической и научной литературы;

– подготовки к практическим занятиям;

– решения задач, выданных на практических занятиях;

– проведение самоконтроля путем ответов на вопросы текущего контроля знаний, решения представленных в учебно-методических материалах дисциплины задач.

2.1 Рекомендации к изучению материала по учебнику и ведению конспекта для студентов заочной и очной формы обучения

При изучении материала по учебнику из списка, приведенного на стр. 69, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления, в том числе и те, которые по их простоте опущены, воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести такие примеры самостоятельно. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения обязательно должны использоваться в доказательстве. Полезно составлять схемы доказательств. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее внешнее оформление конспекта не только приучит к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из небрежных, беспорядочных записей. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента.

2.2 Рекомендации к подготовке к практическим занятиям и решению задач

Все задания к практическим занятиям, а также задания, вынесенные на самостоятельную работу, рекомендуется выполнять непосредственно после соответствующей темы лекционного курса, что способствует лучшему усвоению материала, позволяет своевременно выявить и устранить «пробелы» в знаниях, систематизировать ранее пройденный материал, на его основе приступить к получению новых знаний и овладению навыками.

Чтение учебника и конспекта должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный (если конечно такой путь не указан в условии задачи, в этом случае следует решить ее указанным методом). Полезно до начала вычислений составить краткий план решения. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от остальных. Ошибочные записи следует замазывать корректором или просто зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения, например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений, то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом, циркулем и указывать масштаб. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны) входящих в нее величин. В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.д. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

2.3 Рекомендации к проведению самоконтроля (самопроверки)

После изучения определенной темы по конспекту и (или) учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику или конспекту. Вопросы и задачи для самопроверки, приведенные в данном пособии, должны помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, заключающейся в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате механически заученных форм, без понимания существа дела. Можно сказать, что умение решать задачи является необходимым, но не достаточным условием хорошего знания теории.

3. Методические указания по выполнению контрольной работы

Главная цель выполнения контрольной работы (КР)−оказать студенту помощь в его работе. Рецензия на эту работу позволяет студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывает на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы, помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем (письменной или устной). Прежде, чем выполнять КР нужно изучить соответствующий теоретический материал по конспекту и (или) учебнику, ответить на вопросы для самоконтроля. Этот материал нужно закрепить, решая самостоятельно (может быть и несколько раз) уже решенные типовые задачи, приведенных в соответствующих разделах в учебнике, выбранном из списка основной и дополнительной литературы; Не следует приступать к выполнению задачи из контрольной до решения достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию.

Контрольная работа должна выполняться самостоятельно. Не самостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателюрецензенту указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться не подготовленным к устному экзамену.

Студенты выполняют в 3-м семестре контрольную работу (стр.12-18) по следующим разделам:

Теория вероятностей – задачи 1-10, 11-20, 21-30, 31-40;

Элементы математической статистики – задачи 41-50;

Таким образом, студент должен выполнить **5 задач** в рамках КР.

При оформлении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1) Контрольная работа выполняется в отдельной ученической тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны название учебного заведения, факультета; название кафедры; название КР; название дисциплины; название специальности; ФИО и личный шифр студента; номер курса и группы.

2) Задачи контрольной работы следует располагать в порядке номеров, указанных в задании. Перед решением каждой задачи надо записать ее номер и полностью переписать ее условие.

3) Решение задачи должно быть изложено последовательно с краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, как получаются те или иные результаты) соответствующими ссылками на вопросы теории и указанием необходимых формул, теорем); в конце необходимо привести окончательный ответ.

4) Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5) При решении задач надо учесть указания (если они есть), приведенные после формулировки условия задачи.

6) На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной около 3 см для замечаний преподавателя.

7) Работы, не отвечающие перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются на переделку.

8) Студентам заочной формы обучения следует зарегистрировать выполненную контрольную работу в установленные сроки в деканате у методиста.

9) Получив прорецензированную работу (как зачтенную, так и не зачтенную), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. В случае незачета по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования преподавателя, и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

10) Зачтенную контрольную работу вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления преподавателю зачтенной контрольной работы студент не допускается к сдаче экзамена.

11) Из приведенных в ***таблице 1***, студент выполняет ***тот вариант КР, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра***.

Таблица 1

№ варианта	Номера задач контрольной работы по вариантам				
1	1	11	21	31	41
2	2	12	22	32	42
3	3	13	23	33	43
4	4	14	24	34	44
5	5	15	25	35	45
6	6	16	26	36	46
7	7	17	27	37	47
8	8	18	28	38	48
9	9	19	29	39	49
0	10	20	30	40	50

4. Задания для контрольной работы

В **задачах 1-10** нужно найти вероятность указанного в условии события, применяя формулу классической вероятности, и если необходимо–правило суммы.

Указание. Поскольку в задачах рассматривается схема выбора без возвращения и учета порядка, то для подсчета числа элементарных исходов следут использовать формулу числа сочетаний $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

1. На полке в почвенной лаборатории случайно смешаны бюксы с различными образцами почвы: 8 бюксов с влажной почвой и 6–с сухой. Найти вероятность того, что три из пяти наудачу взятых с этой полки бюксов будут сухими.

2. В районе 100 поселков. В двадцати пяти из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны два поселка. Какова вероятность того, что хотя бы в одном из них есть пункт проката?

3. Подготовлены для посадки на садовом участке и случайно смешаны саженцы двух сортов черной смородины: 6 саженцев сорта Селеченская и 8–сорта Вологда. Какова вероятность того, что первыми будут посажены 3 саженца смородины сорта Селеченская и один саженец сорта Вологда?

4. На станцию прибыли 10 вагонов разной продукции. Вагоны помечены номерами от одного до десяти. Найти вероятность того, что среди пяти наудачу выбранных для контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 или 5.

5. В отделе работают 8 специалистов, из которых 5–высокой квалификации. В командировку нужно отправить трех специалистов. Каждый специалист имеет равные возможности поехать в командировку. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы два специалиста высокой квалификации.

6. Фермер содержит 15 коров, 5 из которых дают удои более, чем по 4500 л молока в год. Случайным образом отобраны 4 принадлежащие этому фермеру коровы. Какова вероятность, что среди отобранных коров 3 дают указанные высокие удои.

7. Среди 10 растений некоторой популяции дикорастущей земляники 7 растений имеют красные ягоды, а остальные–розовые. Какова вероятность того, что среди отобранных случайным образом 8-ми растений этой популяции красные ягоды будут иметь 6 растений.

8. На сортировочном пункте имеется 15 контейнеров, причем 10 из них отечественного производства. Найти вероятность того, что при формировании грузового состава среди пяти взятых наудачу контейнеров три будут отечественного производства.

9. На складе торговой фирмы находятся однотипные товары, изготовленные разными фирмами; из них: 5 товаров изготовлены фирмой "ABC", 10 товаров – фирмой "F&N", 8 товаров – фирмой "ЭХО". При ревизии на складе просматривают один за другим все имеющиеся товары и отмечают места их изготовления. Найти вероятность того, что при этом из 6 просмотренных товаров 4 будут фирмы "ЭХО".

10. Из 18 клубней семенного картофеля половина имеет пятна. Наудачу отобрали 5 клубней. Какова вероятность, что среди них хотя бы четыре клубня без пятен.

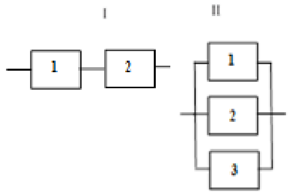
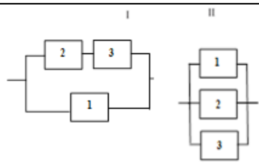
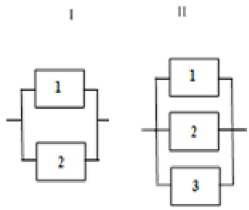
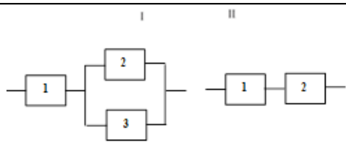
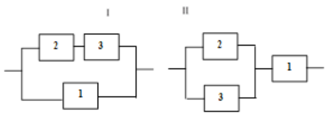
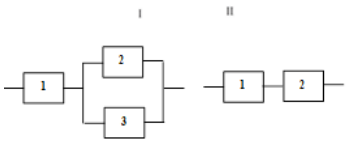
В **задачах 11-20** имеются две электрические цепи. Элементы каждой цепи могут независимо выходить из строя с вероятностью p. Наудачу выбрали одну из цепей, и она оказалась пропускающей ток (или оказалась разорванной).

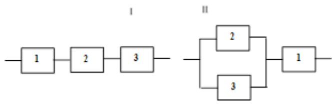
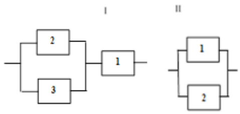
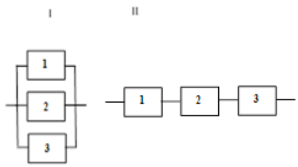
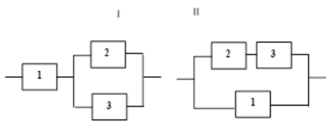
Найти вероятность указанного в условии события A, применяя формулу Байеса.

Схемы цепей, вероятность выхода из строя элемента цепи, состояние выбранной цепи, описание события A для каждой задачи приведены в ***таблице 2 стр.14***.

Указание. Перед выполнением задачи рекомендуется рассмотреть выполнение всех 9 примеров на стр. 20-29.

Таблица 2.

Номер задачи	p	Схемы цепей	Состояние выбранной цепи	Событие A
11.	0.1		Пропускает ток	Выбрали схему II
12.	0.2		Пропускает ток	Выбрали схему I
13.	0.4		Пропускает ток	Выбрали схему I
14.	0.1		Пропускает ток	Выбрали схему I
15.	0.2		Пропускает ток	Выбрали схему II
16.	0.4		Разорвана	Выбрали схему I

17.	0.6		Разорвана	Выбрали схему I
18.	0.1		Разорвана	Выбрали схему II
19.	0.2		Разорвана	Выбрали схему I
20.	0.7		Разорвана	Выбрали схему I

В **задачах 21-30**:

а) задан закон распределения дискретной случайной величины X:

x_i	-2	-1	0	m	$m+k$
p_i	$0,2$	$0,1$	$0,2$	p_4	p_5

Найти вероятности p_4 и p_5, дисперсию $D(X)$, среднеквадратическое отклонение σ, если $M(X) = -0,5 + 0,5 \cdot m + 0,1 \cdot k$.

б) случайная величина X (число кустов смородины, зараженных вирусом, из n посаженных) имеет биномиальное распределение. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста смородины равна p. Найти вероятность $P(m \le X \le m+2)$, если математическое ожидание $M(X)=k+1$, а дисперсия $D(X)=(k+1)(7-k)/8$.

Указание. Данные m, k для каждой задачи приведены в ***<u>таблице 3.</u>***

Таблица 3.

Номер задачи	m	k	Номер задачи	m	k
21.	4	2	**22.**	2	3
23.	5	2	**24.**	2	2
25.	4	1	**26.**	1	1
27.	2	5	**28.**	5	4
29.	3	2	**30.**	2	1

В **задачах 31-40** задана плотность распределения $f(x)$ нормально распределенной случайной величины X. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность $P(A)$.

Указание. Формула для плотности и событие A приведены для каждой задачи в ***<u>таблице 4.</u>***
Значение аргумента функции Лапласа округляем до второго знака после запятой. Значения функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$ приведены в ***<u>таблице 5 стр.37</u>***

Таблица 4.

Номер задачи	$f(x)$	$P(A)$
31.	$\sqrt{\frac{3}{\pi}}e^{-3x^2}$	$A=\{\lvert X\rvert<0,5\}$
32.	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2(x+4)^2}$	$A=\{\lvert X+4\rvert<0,5\}$

33.	$\frac{1}{\sqrt{5\pi}}e^{-\frac{x^2}{5}}$	$A=\{\lvert X\rvert<2\}$
34.	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x+1)^2}{2}}$	$A=\{-3<X<0\}$
35.	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2(x-24)^2}$	$A=\{23,3\le X\le 24,4\}$
36.	$\frac{10}{9\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-28)^2}{1,62}}$	$A=\{27,5\le X\le 28,9\}$
37.	$\frac{1}{\sqrt{5\pi}}e^{-\frac{(x+2)^2}{5}}$	$A=\{\lvert X+2\rvert>2\}$
38.	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2(x-29)^2}$	$A=\{28,3\le X\le 29,6\}$
39.	$\frac{5}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{50(x-22)^2}{9}}$	$A=\{\lvert X-22\rvert<0,8\}$ $A=\{\lvert X\rvert>1\}$
40.	$\frac{5}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{25(x-21)^2}{8}}$	$A=\{20,8<X<21,5\}$

В **задачах 41-50** для поступившей партии пшеницы, с целью определения среднего процентного содержания белка, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено 10-% обследование. Результаты анализа приведены в ***<u>таблице 6 стр.18.</u>*** Найти доверительный интервал, в котором с вероятностью 0.95 заключено среднее процентное содержание белка во всей партии.

Указание. При расчёте средней квадратической ошибки для бесповторной выборки по формуле $\sigma'_{\bar{x}} \approx \sqrt{\frac{s^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$ берём $N = 1000$, поскольку у нас 10%-ое обследование (взяли 100 проб из 1000 элементов генеральной совокупности).

Таблица 6.

Номер задачи								
41.	Процент содержания белка	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20
	Число проб	6	12	14	25	20	18	5
42.	Процент содержания белка	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21
	Число проб	7	11	20	33	18	8	3
43.	Процент содержания белка	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20
	Число проб	6	12	18	35	17	9	3
44.	Процент содержания белка	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21
	Число проб	6	13	23	30	16	10	2
45.	Процент содержания белка	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20
	Число проб	4	15	21	32	15	11	2
46.	Процент содержания белка	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21
	Число проб	7	11	14	25	20	15	8
47.	Процент содержания белка	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20
	Число проб	8	10	12	27	19	16	8
48.	Процент содержания белка	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21
	Число проб	4	8	15	30	20	19	4
49.	Процент содержания белка	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20
	Число проб	4	8	22	37	17	7	5
50.	Процент содержания белка	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21
	Число проб	5	7	23	36	18	6	5

5. Примеры решения задач контрольной работы

<u>Пример выполнения задач 1-10.</u> Имеется 20 яблок, из которых 7 красных, остальные – зелёные. Наудачу выбрали 5 яблок. Какова вероятность того, что 2 из них будут красные? Какова вероятность того, что хотя бы 3 из них будут красные?

Решение. Как известно, выбрать k однотипных предмета из n можно C_n^k способами, где $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ (считается, что $0! = 1$).

Следовательно, выбрать 5 любых яблок из 20 имеющихся в наличии можно C_{20}^5 способами. Выбрать же 2 красных яблока из 5 и 3 зелёных яблока из 13 по правилу произведения можно $C_7^2 \cdot C_{13}^3$ способами.

Обозначим через A событие, состоящее в том, что из выбранных наудачу 5 яблок будут 2 красных и 3 зелёных.

$\boldsymbol{m} = C_7^2 \cdot C_{13}^3 = \frac{7!}{2!\cdot 5!}\cdot\frac{13!}{3!\cdot 10!}$ – количество исходов, благоприятствующих событию A.

$\boldsymbol{n} = C_{20}^5 = \frac{20!}{5!\cdot 15!}$ – количество всевозможных исходов.

Согласно классическому определению вероятности, получим:

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{m}{n} = \frac{\frac{7!}{2!\cdot 5!}\cdot\frac{13!}{3!\cdot 10!}}{\left(\frac{20!}{5!\cdot 15!}\right)} = \frac{7!\cdot 13!\cdot 5!\cdot 15!}{20!\cdot 2!\cdot 5!\cdot 3!\cdot 10!} =$$

$$= \frac{7!\cdot 10!\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 5!\cdot 15!}{15!\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 2!\cdot 5!\cdot 3!\cdot 10!} = \frac{7!\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 2!\cdot 3!} =$$

$$= \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 1\cdot 2\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 1\cdot 2} = \frac{6\cdot 7\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 2} =$$

$$= \frac{7\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{16\cdot 17\cdot 3\cdot 19\cdot 2} = \frac{7\cdot 11\cdot 4\cdot 13}{16\cdot 17\cdot 19\cdot 2} = \frac{7\cdot 11\cdot 13}{4\cdot 17\cdot 19\cdot 2} = \frac{\mathbf{1001}}{\mathbf{2584}}.$$

Обозначим через B событие, состоящее в том, что из выбранных наудачу 5 яблок будет хотя бы 3 красных. Слова «хотя бы 3» означают, что среди 5 выбранных яблок будет или 3 (событие B_1), или 4 (событие B_2), или 5 красных (событие B_3). Поскольку множества элементарных исходов благоприятствующих событиям B_1 ($\boldsymbol{m_1}$– количество исходов, благоприятствующих событию B_1), B_2 ($\boldsymbol{m_2}$ – количество исходов, благоприятствующих событию B_2) и B_3 ($\boldsymbol{m_3}$ – количество исходов, благоприятствующих событию B_3) не пересекаются, то можно применить правило суммы для подсчета числа исходов, благоприятствующих событию B:

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m_1} + \boldsymbol{m_2} + \boldsymbol{m_3} = C_7^3 \cdot C_{13}^2 + C_7^4 \cdot C_{13}^1 + C_7^5 \cdot C_{13}^0 = \frac{7!}{3!\cdot4!} \cdot \frac{13!}{3!\cdot10!} +$$

$$+ \frac{7!}{4!\cdot3!} \cdot \frac{13!}{1!\cdot12!} + \frac{7!}{5!\cdot2!} \cdot 1 = \mathbf{35 + 35 \cdot 13 + 21 = 511.}$$

$$\boldsymbol{P(B)} = \frac{m}{n} = \frac{\mathbf{511}}{\mathbf{15504}}.$$

Ответ: $\boldsymbol{P(A)} = \frac{\mathbf{1001}}{\mathbf{2584}}$; $\boldsymbol{P(B)} = \frac{\mathbf{511}}{\mathbf{15504}}$.

<u>Примеры для выполнения задач 11-20</u>. Приведем список формул необходимых для выполнения задачи.

(*) **Вероятность суммы двух совместных событий** A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения, т.е. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

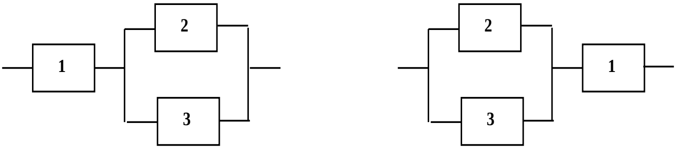
(**) **Вероятность произведения двух или нескольких (n) независимых событий** равна произведению вероятностей этих событий, т.е. $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$.

(***) **Сумма вероятностей противоположных событий** A и $\overline{A}$ равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

(****) **Формула Байеса**

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|H_k)P(H_k)} \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Пример 1. Рассмотрим следующие схемы цепей



Элементы цепи (1, 2 и 3) могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями, равными соответственно 0,1; 0,2; 0,3. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

Решение. Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя элемента 1 или одновременный выход из строя двух элементов − 2 и 3.

Введем события: $A_i -$выход из строя элемента i $(i=1,2,3)$; $A-$ разрыв электрической цепи. Очевидно, событие Aпроизойдет, если произойдет либо событие A_1, либо $A_2 \cdot A_3$, т.е. $A = A_1 + A_2 \cdot A_3$. События A_1, A_2, A_3совместные и независимые. Так как события A_1 и $A_2 \cdot A_3$ совместные, то по формуле (*) (теорема сложения для двух совместных событий)

$$P(A) = P(A_1 + A_2 \cdot A_3) = P(A_1) + P(A_2 \cdot A_3) - P\big(A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)\big) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) \cdot P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

(при использовании теоремы умножения учли независимость событий $A_1,, A_2, A_3$ (формула (**)).

Пусть $P(A_i) = p_i$, где $p_i -$вероятность выхода из строя элемента i. По условию задачи $p_1 = 0{,}1;\ p_2 = 0{,}2;\ p_3 = 0{,}3.$ Таким образом $P(A) = 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 - 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0{,}3 = 0{,}154.$

Пример 2. В рамках условия примера 1 найдем вероятность того, что цепь пропускает ток.

Решение. Электрическая цепь будет пропускать ток, если не выйдет из строя элемент 1 и не выйдет из строя элемент 2 или элемент 3.

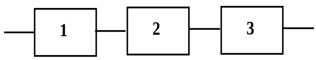
Введем события: $A_i -$не вышел из строя элемент i $(i=1,2,3)$; $A-$

цепь пропускает ток. Очевидно, событие $A = A_1 \cdot (A_2 + A_3)$. События A_1, A_2, A_3 – независимые и совместные. В силу независимости событий A_i-ых ($i = 1,2,3$), события A_1 и $A_2 + A_3$ тоже независимы. На основании теоремы умножения для независимых событий (**) и теоремы сложения для двух совместных событий (*) получим

$$P(A) = P(A_1 \cdot (A_2 + A_3)) = P(A_1) \cdot P(A_2 + A_3) =$$
$$= P(A_1) \cdot [P(A_2) + P(A_3) - P(A_2) \cdot P(A_3)].$$

Так как в условии заданы вероятности событий, противоположных A_i-м, то $P(A_i) = 1 - p_i$, где p_i – вероятность выхода из строя i-го элемента (используем формулу для суммы вероятностей противоположных событий (***)). По условию задачи $p_1 = 0,1;\ p_2 = 0,2;\ p_3 = 0,3$. Тогда $P(A_1) = 1 - p_1 = 0,9;\ P(A_2) = 1 - p_2 = 0,8;\ P(A_3) = 1 - p_3 = 0,7.$ Таким образом $P(A) = 0,9 \cdot (0,8 + 0,7 - 0,8 \cdot 0,7) = 0,846.$ Очевидно, что событие «цепь пропускает ток» противоположно событию «цепь разорвана» и в сумме вероятности этих событий должны дать 1 (0,846+0,154=1).

Пример 3. Схема цепи имеет вид



Элементы цепи (1, 2 и 3) могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями, равными 0,3. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

***Решение*.** Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя хотя бы одного из ее элементов. Введем события: A_i – выход из строя элемента i ($i = 1,2,3$); A – разрыв электрической цепи. Очевидно, событие A произойдет, если произойдет хотя бы одно из событий A_1, A_2, A_3, т.е. $A = A_1 + A_2 + A_3$. События A_1, A_2, A_3 совместные и независимые.

В случае трех и более совместных событий соответствующая формула для вероятности суммы $P(A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n)$ весьма громоздка и проще перейти к противоположному событию $L=\overline{A_1+A_2+A_3+...+A_n}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot...\cdot\overline{A_n}$ (непоявление всех данных србытий). Тогда на основани (***) $P(A_1+A_2+A_3+...+A_n)=1-P(L)$, или $P(A_1+A_2+A_3+...+A_n)=1-P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot...\cdot\overline{A_n}\right)$. Если при этом события $A_1,A_2,A_3,...,A_n$ – независимые, то $P(A_1+A_2+A_3+...+A_n)=1-P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right)\cdot...\cdot P\left(\overline{A_n}\right)$. (*). В частном случае, если вероятности независимых событий равны $P(A_1)=P(A_2)=(A_3)=...=P(A_n)=p$, то вероятность их суммы $P(A_1+A_2+A_3+...+A_n)=1-(1-p)^n$, (ибо в этом случае $P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right)\cdot...\cdot P\left(\overline{A_n}\right)=\underbrace{(1-p)\cdot...\cdot(1-p)}_{n\ раз}=(1-p)^n$).

В силу вышесказанного $P(A)=1-(1-p)^3=1-0,7^3=1-0,343=0,657.$

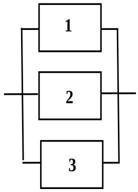
Замечание. Если схема состоит из двух последовательно соединенных элементов, то применяем теорему сложения вероятностей для двух совместных событий (*). Но можно и так как в случае трех элементов перейти к противоположному событию. Тогда $P(A)=1-(1-p)^2=1-0,7^2=1-0,49=0,51.$

Пример 4. В рамках условия примера 3 найдем вероятность того, что цепь пропускает ток.

Решение. Электрическая цепь будет пропускать ток, если не выйдет из строя ни один из ее элементов. Событие $A-$цепь пропускает ток. Если оставить введенные в примере 3 события A_i-выход из строя элемента i ($i=1,2,3$) и применить рассуждения касающиеся вычисления вероятности произведения событий, то $A=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$ и $P(A)=P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right)=(1-p)^3=0,7^3=0,343.$ По сути в данном примере мы искали вероятность противоположного события к событию из примера 3.

Замечание. Если схема состоит из двух последовательно соединенных элементов, то $P(A)=P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)=(1-p)^2=0,7^2=0,49.$

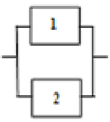
Пример 5. Рассмотрим следующие схему цепи



Элементы цепи (1, 2 и 3) могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями, равными 0,3. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

Решение. Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя всех ее элементов. Введем события: A_i – выход из строя элемента i ($i=1,2,3$); A – разрыв электрической цепи. Тогда $A=A_1\cdot A_2\cdot A_3$. События A_1, A_2, A_3 – независимые. По теореме (**) $P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0,3^3=0,027.$

Замечание. Если цепь состоит из двух параллельно соедененных элементов



то $A=A_1\cdot A_2$ и $P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0,3^2=0,09.$

Пример 6. В рамках условия примера 5 найдем вероятность того, что цепь пропускает ток.

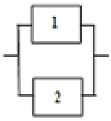
Решение. Электрическая цепь будет пропускать ток, если не выйдет из строя хотя бы один ее элемент. Введем события: A_i – не вышел из строя элемент i ($i=1,2,3$); A – цепь пропускает ток. Очевидно, событие A произойдет, если произойдет хотя бы одно из событий A_1, A_2, A_3, т.е.

$A = A_1 + A_2 + A_3$. События A_1, A_2, A_3 совместные и независимые. Повторяем рассуждения из примера 3 и получаем $P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}\right) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) = 1 - p^3 =$

$= 1 - 0,3^3 = 1 - 0,027 = 0,973.$

Здесь мы учли, что $P\left(\overline{A_1}\right) = P\left(\overline{A_2}\right) = P\left(\overline{A_3}\right) = p = 0,3.$

Замечание. Если цепь состоит из двух параллельно соедененных

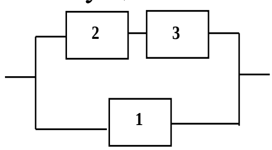
элементов 

, то $A = A_1 + A_2$ и применяем теорему сложения вероятностей для двух совместных событий (*). С учетом независимости событий-слагаемых

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) =$

$= (1 - 0,3) + (1 - 0,3) - (1 - 0,3)^2 = 0,7 + 0,7 - 0,7^2 = 0,91.$ Но можно и так как в случае трех элементов перейти к противоположному событию. Тогда $P(A) = 1 - p^2 = 1 - 0,3^2 = 1 - 0,09 = 0,91.$

Пример 7. Рассмотрим схему цепи



Элементы цепи (1, 2 и 3) могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями, равными 0,3. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

Решение. Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя элемента 1 и выход из строя хотя бы одного из двух элементов − 2 и 3.

Введем события: $A_i -$ выход из строя элемента i ($i = 1, 2, 3$); $A -$ разрыв электрической цепи. Очевидно, событие A произойдет, если произойдет событие A_1 и событие $A_2 + A_3$, т.е. $A = A_1 \cdot (A_2 + A_3)$. События $A_1, A_2, A_3 -$ независимые и совместные. В силу независимости событий

A_i-ых ($i = 1, 2, 3$), события A_1 и $A_2 + A_3$ тоже независимы. На основании теоремы умножения для независимых событий (**) и теоремы сложения для двух совместных событий (*) получим

$$P(A) = P\left(A_1 \cdot (A_2 + A_3)\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 + A_3) =$$
$$= P(A_1) \cdot \left[P(A_2) + P(A_3) - P(A_2) \cdot P(A_3)\right].$$

По условию примера вероятности $P(A_i) = 0,3 (i = 1, 2, 3)$. Таким образом $P(A) = 0,3 \cdot (0,3 + 0,3 - 0,3 \cdot 0,3) = 0,153.$

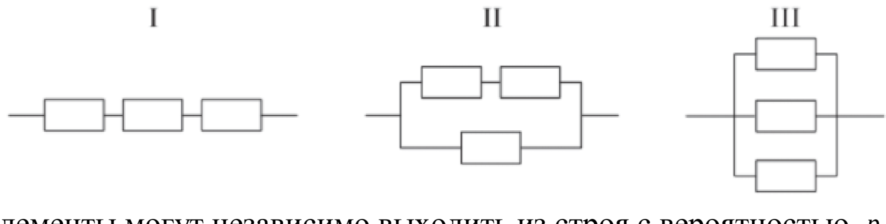
Пример 8. В рамках условия примера 7 найдем вероятность того, что цепь пропускает ток.

Решение. Электрическая цепь будет пропускать ток, если не выйдет из строя элемент 1 или оба элемента − 2 и 3. Введем события: A_i − не вышел из строя элемент i ($i = 1, 2, 3$); A − цепь пропускает ток. Очевидно, что событие $A = A_1 + A_2 \cdot A_3$. События A_1, A_2, A_3 совместные и независимые. Так как события A_1 и $A_2 \cdot A_3$ совместные, то по формуле (*) (теорема сложения для двух совместных событий)

$$P(A) = P(A_1 + A_2 \cdot A_3) = P(A_1) + P(A_2 \cdot A_3) - P\left(A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)\right) = P(A_1) +$$
$$+ P(A_2) \cdot P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

(при использовании теоремы умножения учли независимость событий $A_1,, A_2, A_3$ (формула (**)). Так как в условии заданы вероятности событий, противоположных A_i-м, то $P(A_i) = 1 - 0,3 = 0,7$ (используем формулу для суммы вероятностей противоположных событий (***)). Таким образом $P(A) = 0,7 + 0,7 \cdot 0,7 - 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0,7 = 0,847.$

Пример 9. Имеются три схемы с ненадежными элементами:



Элементы могут независимо выходить из строя с вероятностью p.

Наудачу выбрали одну из схем, и она оказалась работающей. Какова вероятность, что выбрали вторую схему?

Решение. Введем события: событие $A-$«выбранная схема оказалась работающей», событие H_1- «выбрали схему I», событие H_2- «выбрали схему II», событие H_3- «выбрали схему III».

$P\left(H_1\right)=P\left(H_2\right)=P\left(H_3\right)=\dfrac{1}{3}$ так как «наудачу» означает равновозможность выбора одной из схем.

По формуле Байеса (****) стр.20 получаем

$$P\left(H_2\middle|A\right)=\frac{P\left(A\middle|H_2\right)P\left(H_2\right)}{P\left(A\middle|H_1\right)P\left(H_1\right)+P\left(A\middle|H_2\right)P\left(H_2\right)+P\left(A\middle|H_3\right)P\left(H_3\right)}=$$

$$=\frac{P\left(A\middle|H_2\right)\cdot\dfrac{1}{3}}{\left(P\left(A\middle|H_1\right)+P\left(A\middle|H_2\right)+P\left(A\middle|H_3\right)\right)\cdot\dfrac{1}{3}}=\frac{P\left(A\middle|H_2\right)}{P\left(A\middle|H_1\right)+P\left(A\middle|H_2\right)+P\left(A\middle|H_3\right)}.$$

Найдем все «априорные» условные вероятности. Найдем $P\left(A\middle|H_1\right)$:

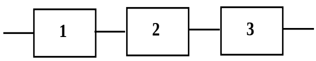


Схема I будет работать, если все ее элементы будут работать. Событие A/H_1- «схема работает, при условии, что выбрали схему I». Если событие A_i-выход из строя элемента i ($i=1,2,3$), то $A/H_1=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$, где $\overline{A_i}-$противоположное событие к A_i (т.е.элемент i работает). Так как события A_1, A_2, A_3-независимые, то и $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ тоже независимые и по формуле (**) стр.20.

$$P\left(A/H_1\right)=P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right).$$

$P\left(\overline{A_i}\right)=1-P\left(A_i\right)=1-p$ по (***) стр. ($i=1,2,3$) и по условию.

Таким образом, $P(A/H_1) = (1-p)\cdot(1-p)\cdot(1-p) = (1-p)^3$.

Найдем $P(A|H_2)$:

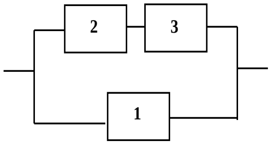


Схема II будет работать, если будет работать элемент 1 или оба элемента – 2 и 3. Событие A/H_2 – «схема работает, при условии, что выбрали схему II». Если событие A_i – элемент i работает ($i = 1, 2, 3$), то $A/H_2 = A_1 + A_2 \cdot A_3$. События A_1, A_2, A_3 совместные и независимые. Так как события A_1 и $A_2 \cdot A_3$ совместные, то по формуле (*) (теорема сложения для двух совместных событий)

$$P(A/H_2) = P(A_1 + A_2 \cdot A_3) = P(A_1) + P(A_2 \cdot A_3) - P\left(A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)\right) = P(A_1) +$$
$$+P(A_2)\cdot P(A_3) - P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3).$$

(при использовании теоремы умножения учли независимость событий $A_1,, A_2, A_3$ (формула (**) стр. 20). $P(A_i) = 1 - P\left(\overline{A_i}\right) = 1 - p$ ($i = 1, 2, 3$), где $\overline{A_i}$ – выход из строя элемента i.

Таким образом, $P(A/H_2) = 1 - p + (1-p)^2 - (1-p)^3$.

Найдем $P(A|H_3)$:

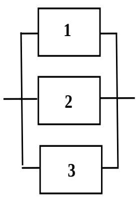


Схема III будет работать, если будет работать хотя бы один ее элемент. Событие A/H_3 – «схема работает, при условии, что выбрали схему

III». Если событие A_i – элемент i работает ($i=1,2,3$), то $A/H_3 = A_1 + A_2 + A_3$ и используя рассуждения из примеров 3 и 6 на стр.22 и стр.24:

$$P(A/H_3) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\right) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right) = 1 - p^3.$$

Подставляем найденные $P(A/H_1), P(A/H_2)$ и $P(A/H_3)$ в ранее полученную формулу (стр.27)

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)}{P(A|H_1)+P(A|H_2)+P(A|H_3)} = \frac{1-p+(1-p)^2-(1-p)^3}{(1-p)^3+1-p+(1-p)^2-(1-p)^3+1-p^3} =$$

$$= \frac{1+p-p^2}{3+p^2}.$$

<u>Пример выполнения задач 21-30</u>. а) Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

x_i	-2	-1	0	5	10
p_i	$0,2$	$0,1$	$0,2$	p_4	p_5

Найти вероятности p_4 и p_5, дисперсию $D(X)$, среднеквадратическое отклонение σ, если $M(X)=2,5$.

Решение. Из условия $\sum p_i = 1$ имеем $p_4 + p_5 + 0,2 + 0,1 + 0,2 = 1$ или $p_4 + p_5 = 0,5$.

Из определения математического ожидания $M(X) = \sum x_i p_i$ получим:

$$-0,4 - 0,1 + 5p_4 + 10p_5 = 2,5 \text{ или } 5p_4 + 10p_5 = 3.$$

Таким образом, имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} p_4 + p_5 = 0,5 \\ 5p_4 + 10p_5 = 3 \end{cases}$, решая которую получаем: $p_4 = 0,4,\ p_5 = 0,1.$

Дисперсию найдем из формулы

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Находим математическое ожидание квадрата случайной величины

$$M\left(X^2\right)=\sum x_i^2 p_i=(-2)^2\cdot 0,2+(-1)^2\cdot 0,1+5^2\cdot 0,4+10^2\cdot 0,1=$$
$$=0,8+0,1+10+10=20,9.$$

Тогда

$$D(X)=20,9-2,5^2=14,65.$$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{14,65}\approx 3,828.$

Ответ: $p_4=0,4,\ p_5=0,1,\ D(X)=14,65,\ \sigma=\sqrt{14,65}\approx 3,828.$

б) Случайная величина X (число покупателей, которым требуется рассада огурцов, из n покупателей, находящихся в магазине) имеет биномиальное распределение. Вероятность того, что покупателю нужна рассада огурцов равна p. Найти вероятность $P(0\le X\le 2)$, если математическое ожидание $M(X)=1$, а дисперсия $D(X)=7/8$.

Решение. Как известно, для биномиального распределения $M(X)=np$ и $D(X)=npq.$ Тогда

$$\begin{cases} np=1 \\ npq=7/8. \end{cases}$$

Делим второе уравнение на первое, получаем

$$q=7/8=0,875,\ p=1-q=1-7/8=1/8=0,125,\ n=8.$$

Вероятность

$$P(0\le X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2).$$

По формуле Бернулли

$$P(X=s)=C_n^s p^s q^{n-s}=\frac{n!}{s!(n-s)!}p^s q^{n-s}$$

имеем

$$P(X=0)=C_8^0 p^0 q^8=\frac{8!}{0!8!}(0,125)^0(0,875)^8=0,3436.$$

$$P(X=1)=C_8^1 p^1 q^7=\frac{8!}{1!7!}(0,125)^1(0,875)^7=0,3927.$$

$$P(X=2)=C_8^2 p^2 q^6=\frac{8!}{2!6!}(0,125)^2(0,875)^6=0,1963.$$

Окончательно:

$$P\left(0 \le X \le 2\right) = 0,3436 + 0,3927 + 0,1963 = 0,9326.$$

Ответ: $P\left(0 \le X \le 2\right) = 0,9326.$

<u>Пример выполнения задач 31-40.</u> Плотность $f\left(x\right) = C \cdot e^{-2x^2}$ распределения нормально распределенной случайной величины X. Найти параметр C, математическое ожидание $M\left(X\right)$, дисперсию $D\left(X\right)$, вероятность $P\left(A\right)$ и $P\left(B\right)$, где $A = \left\{\left|X\right| > 0,5\right\}$, $B = \left\{23,3 \le X \le 24,4\right\}$.

Решение. Как известно, плотность $f\left(x\right)$ нормально распределенной случайной величины X имеет вид $f\left(x\right) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}$, где $a = M\left(X\right)$, $\sigma = \sqrt{D\left(X\right)} > 0.$ Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $\left(\alpha;\beta\right)$, вычисляется по формуле $P\left(\alpha < X < \beta\right) = \Phi\left(\dfrac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha - a}{\sigma}\right)$,

$\Phi\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}\,dz$ − функция Лапласа (ее значения приведены **<u>таблице 5</u>** см. приложение).

Функция распределения случайной величины X находится по формуле $F(x) = \dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$, а вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания менее чем на δ равна: $P\left(\left|X - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$.

По условию $-\dfrac{\left(x-a\right)^2}{2\cdot\sigma^2} = -2x^2$ и $\Rightarrow a = 0,\ \sigma^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow C = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}},\ M\left(X\right) = a = 0,\ D\left(X\right) = \sigma^2 = \dfrac{1}{4}.$ Теперь вычисляем

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(|X|>0,5)=1-\mathrm{P}(|X|\le 0,5)=1-\mathrm{P}(|X|<0,5)=$$

$$=1-\mathrm{P}(|\mathrm{X}-a|<\delta)=\|a=\mathrm{M}(\mathrm{X})=0\|=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{0,5}{0,5}\right)=$$

$$=2\Phi(1)=2\cdot 0.3413=0,6826.$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B})=\mathrm{P}(1,3\le \mathrm{X}\le 2,4)=\mathrm{P}(1,3<\mathrm{X}<2,4)=\Phi\left(\frac{2,4}{0,5}\right)-\Phi\left(\frac{1,3}{0,5}\right)=$$

$$=\Phi(4,8)-\Phi(2,6)=\mathrm{F}(0,5)-\mathrm{F}(-0,5)\approx 0,5-0,4953\approx 0,0047.$$

Ответ: $\mathrm{P}(\mathrm{A})=0,1587$; $\mathrm{P}(\mathrm{B})\approx 0,0047$.

Пример выполнения задач 41-50. Для поступившей партии яблок, с целью определения средней массы плода, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено 10-% обследование. Результаты анализа приведены в таблице. Найти 95%-ный доверительный интервал для оценки средней массы плода яблока во всей партии.

Масса плода	125 − 135	135 − 145	145 − 155	155 − 165	165 − 175	175 − 185	185 − 195
Среднее значение x_i^*	130	140	150	160	170	180	190
Число проб n_i	4	8	18	38	20	10	2

Решение. Имеем N (объем генеральной совокупности) $=$ 1000, n(объем выборки) $= 100$.

Доверительный интервал для генеральной средней $\overline{x_0}$ может быть найден по формуле

$$\overline{\boldsymbol{X}}-\Delta\le\overline{x_0}\le\overline{\boldsymbol{X}}+\Delta,$$

где $\overline{\boldsymbol{X}}$−выборочная средняя, Δ−предельная ошибка выборки.

$\Delta=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\sigma}'_{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{t}$−значение аргумента функции Лапласа

$\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-z^2/2}dz$ **(см. приложение, табл. 5)**, при котором $\Phi(t)=\dfrac{\gamma}{2}$,

т. е. $\boldsymbol{t} = \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, где γ – доверительная вероятность. Т.к. требуется найти 95%-ный доверительный интервал, то $\gamma = 0{,}95$.
$\boldsymbol{\sigma'_{\bar{x}}}$ – средняя квадратическая ошибка для бесповторной выборки, которая определяется по формуле $\boldsymbol{\sigma'_{\bar{x}}} \approx \sqrt{\frac{s^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$, где $s^2 = D_{\text{в}}$ – выборочная дисперсия.
Найдём точечные оценки числовых характеристик генеральной совокупности.
Выборочная средняя: $\overline{X} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{7} x_i^* \cdot n_i = \sum_{i=1}^{7} x_i^* \cdot \frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{7} x_i^* \cdot \omega_i =$
$x_1^* \cdot \omega_1 + x_2^* \cdot \omega_2 + x_3^* \cdot \omega_3 + x_4^* \cdot \omega_4 + x_5^* \cdot$
$\cdot\, \omega_5 + x_6^* \cdot \omega_6 + x_7^* \cdot \omega_7$
$= 130 \cdot 0.04 + 140 \cdot 0.08 + 150 \cdot 0.18 + 160 \cdot 0.38 + 170 \cdot 0.2 +$
$+180 \cdot 0.1 + 190 \cdot 0.02 = 5.2 + 11.2 + 27 + 60.8 + 34 + 18 + 3.8 = \mathbf{160}$.
Выборочная средняя квадрата случайной величины:
$$\overline{X^2} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{7}(x_i^*)^2 \cdot n_i = \sum_{i=1}^{7}(x_i^*)^2 \cdot \omega_i$$
$= (x_1^*)^2 \cdot \omega_1 + (x_2^*)^2 \cdot \omega_2 + (x_3^*)^2 \cdot \omega_3 + (x_4^*)^2 \cdot \omega_4 +$
$+(x_5^*)^2 \cdot \omega_5 + (x_6^*)^2 \cdot \omega_6 + (x_7^*)^2 \cdot \omega_7$
$= 130^2 \cdot 0.04 + 140^2 \cdot 0.08 + 150^2 \cdot 0.18 + 160^2 \cdot$
$\cdot\, 0.38 + 170^2 \cdot 0.2 + 180^2 \cdot 0.1 + 190^2 \cdot 0.02$
$= 16900 \cdot 0.04 + 19600 \cdot 0.08 + 22500 \cdot$
$\cdot\, 0.18 + 25600 \cdot 0.38 + 28900 \cdot 0.2 + 32400 \cdot 0.1 + 36100 \cdot 0.02$
$= 676 + 1568 + 4050 +$
$+9728 + 5780 + 3240 + 722 = 25764$.
Выборочная дисперсия:
$\boldsymbol{s^2 = D_{\text{в}}} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 25764 - 160^2 = 25764 - 25600 = \mathbf{164}$.
Выборочное среднее квадратическое отклонение:
$\boldsymbol{s} = \sqrt{s^2} = \sqrt{164} \approx \mathbf{12.8062}$.
Найдём среднюю квадратическую ошибку для бесповторной выборки:

$$\boldsymbol{\sigma'_{\bar{x}}} \approx \sqrt{\frac{s^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{164}{100}\cdot\left(1-\frac{100}{1000}\right)} = \sqrt{\frac{164}{100}\cdot(1-0.1)} = \sqrt{\frac{164}{100}\cdot 0.9}$$
$$= \mathbf{1.476}.$$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$ **(табл.**

5) найдём значение параметра $\boldsymbol{t}$**:**

$\boldsymbol{t} = \Phi^{-1}(0.95/2) = \Phi^{-1}(0.475) \approx \mathbf{1.96}$.

Найдём предельную ошибку бесповторной выборки по формуле $\Delta = \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\sigma'_{\bar{x}}}$**:**

$\Delta \approx 1.96\cdot 1.476 = 2.89296 \approx \mathbf{2.89}$.

Доверительный интервал для генерального среднего имеет вид

$$\left(\bar{x} - t\cdot\sigma'_{\bar{x}}; \bar{x} + t\cdot\sigma'_{\bar{x}}\right).$$

Отсюда получим искомый доверительный интервал:

$160 - 2.89 \le \overline{x_0} \le 160 + 2.89 \Leftrightarrow 157.11 \le \overline{x_0} \le 162.89$

$$\Leftrightarrow \mathbf{(157.11; 162.89)}.$$

Ответ: $\mathbf{(157.11; 162.89)}$.

6. Задания для проведения практических занятий и самостоятельной работы, вопросы для самоконтроля

Занятие 1. *Элементы комбинаторики. Классическая вероятность.*

Задания для аудиторной работы:

1. Сколько существует способов приобрести кассовый аппарат, если в продаже есть 5 видов различных кассовых аппаратов производства Белоруссии, 4 – производства США, 3 – производства Китая и 2 – производства Германии.

2. В конкурсе на лучший проект экономического развития некоторой отрасли производства принимают участие 7 коллективов. Сколькими способами могут быть распределены между ними первое, второе и третье места?

3. Предприятие выпускает 25 наименований продукции. Сколько существует способов выбрать 3 различных наименования продукции для презентации на выставке?

4. Сколько может быть составлено различных трехзначных кодов из десяти цифр от 0 до 9, если цифры в коде не повторяются? А если цифры в коде могут повторяться?

5. Фирма закупила четыре различные партии товара. Сколькими способами можно распределить эти партии среди 12 фирменных магазинов, так, чтобы ни один магазин не получил более одной партии нового товара?

6. У мамы 4 яблока и 3 груши. Каждый день в течении недели она дает ребенку по одному фрукту. Сколькими способами это можно сделать?

7. На полке стоят 8 учебников. Сколькими способами можно поставить эти книги, так чтобы учебники по математическому анализу, линейной алгебре и аналитической геометрии стояли рядом?

8. В партии 10 деталей из них 4 с дефектом. Сколькими способами можно выбрать 3 детали, что бы среди них были 2 детали, удовлетворяющие стандарту и одна деталь с дефектом. Детали выбираются без возвращения.

9. Брошены три монеты. Найти вероятности событий А = {первая монета выпала гербом вверх}, В = {выпало ровно два герба}, С = {выпало не более двух гербов}.

10. Подбрасываются две занумерованные игральные кости. Найти вероятность событий: А = {сумма выпавших на костях очков четна}, В= {число очков на 1-ой кости меньше чем на 2-ой}.

11. Буквы в слове «крыса» наудачу переставили. Чему равна вероятность того, что получилось слово «рысак»?

Ответ: 1/120.

12. Слово «СТАТИСТИКА» составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки перемешивают и наудачу раскладывают в ряд. Найти вероятность того, что вновь получится слово «СТАТИСТИКА».

13. Флаг составлен из 13 горизонтальных полос красного, голубого и белого цветов. Какова вероятность что в наудачу полученном флаге соседние полосы имеют разные цвета?

14. В 15 пакетиках находится пыльца, собранная с 15 цветков гороха, из которых 5 красные, а остальные белые. Наудачу выбирают 2 пакетика. Какова вероятность того, что в обоих пакетиках пыльца одноцветных цветов?

15. На ферме из 12 коров 3 больные. Какова вероятность того, что из 4 наудачу отобранных 1 больная?

16. Шесть различимых шаров размещаются наугад в трех различимых урнах. Найти вероятность событий: а) в каждой урне окажется по два шара; б) одна из урн окажется пустой; в) в двух урнах окажется по три шара.

17. Из колоды карт вынули 4 туза и 4 короля. Эти карты перемешали и разложили в ряд. Какова вероятность того, что все 4 короля окажутся расположенными рядом?

18. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0.9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля:

1. Что такое комбинаторика?

2. Сформулируйте основные правила комбинаторики.

3. Сколько существует способов провести воскресный вечер, если выбирать между посещением театра, дискотеки, ресторана, кинотеатра, считая, что территориально удобно расположены 5 театров, 4 дискотеки, 6 ресторанов и 3 кинотеатра?

Ответ: 18.

4. На третьем курсе изучаются девять предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на один день, если в учебный день разрешается проводить занятия только по четырем разным предметам?
Ответ: 3024.
5. Что называется сочетанием. Как посчитать число сочетаний из n элементов по k элементов?
6. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти?
Ответ: 10.
7. В цехе работают 12 человек: 5 женщин и 7 мужчин. Сколькими способами можно сформировать бригаду из 7 человек, чтобы в ней было 3 женщины.
Ответ: 350.
8. Что называется размещением? Как посчитать число размещений из n элементов по k элементов?
9. Сколько различных трехцветных полосатых флагов можно сшить, если имеется материал пяти различных цветов?
Ответ: 60.
10. Что такое перестановка? Чему равно число перестановок из n элементов?
11. Сколькими способами 5 студентов могут занять 5 должностей в студенческом самоуправлении?
Ответ: 120.
12. Какие схемы выбора вы знаете? Сколькими способами можно осуществить выбор в каждой из этих схем?
13. Дайте определение случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Запишите ПЭИ для случайного эксперимента, состоящего в подбрасывании двух различимых монет, на сторонах которых «герб» и «решка». Два раза бросают игральную кость.
14. Дайте определение случайного события. Приведите примеры событий

для экспериментов из **13.**

15. Дайте определение достоверного и невозможного события. Приведите пример таких событий для экспериментов из **13.**

16. Какие события называют противоположными? Приведите пример таких событий для экспериментов из **13.**

17. В урне находится 20 пронумерованных шаров (номера от 1 до 20). Случайным образом вынимается один из них. Определите какие из следующих событий являются достоверными, невозможными, противоположными: достали шар с четным номером (событие A), достали шар с нечетным номером (событие B), достали шар без номера (событие C), достали шар с номером 2 (событие D).

18. Дайте определение равновозможных событий. Являются ли равновозможными событиями выпадение «2-ух» и «3-ех» очков на симметричной игральной кости?

19. Что называется полной группой событий?

20. Приведите классическое определение вероятности.

21. Перечислите основные свойства вероятности.

22. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находится, написал его наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнил, что номер выражается двузначным числом с различными числами?

Ответ: 1/81.

23. Среди 20 мышат 5 карликовых, т.е. прекращающих расти к концу второй недели. Наудачу выбрали 5 мышат. Найдите вероятность того, что: а) все 5 мышей карликовые; б) 2 из них карликовые.

Ответ: а) $\dfrac{1}{C_{20}^5}$; б) $\dfrac{C_5^2 \cdot C_{15}^3}{C_{20}^5}$.

24. В денежно - вещевой лотерее на серию в 100 билетов приходится 12 денежных и 8 вещевых выигрышей. Чему равна вероятность того, что из трех купленных билетов хотя бы два окажутся выигрышным?

Ответ: $\dfrac{C_{20}^{2}\cdot 80+C_{20}^{3}}{C_{100}^{3}}$.

25. Из букв слова «ТРЕУГОЛЬНИК» наугад составляется пятибуквенное слово. Найти вероятность событий: H={получится слово «УГОЛЬ»}, G={слово состоит из одних согласных букв (включая мягкий знак)}.

Ответ: $P(H)=\dfrac{1}{A_{11}^{5}}$, $P(G)=\dfrac{A_{7}^{5}}{A_{11}^{5}}$.

26. В коробке находится шесть одинаковых по форме и близких по диаметру сверл. Случайным образом сверла извлекаются из коробки. Какова вероятность того, что сверла извлекутся в порядке возрастания их диаметра?

Ответ: 1/720.

27. В спортивной сумке 5 теннисных мячей и 3 мячей для гольфа. Из нее наугад два раза извлекают по одному мячу. Найти вероятность того, что оба извлеченных мяча одинакового типа, если первый мяч в сумку: а) возвращают; б) не возвращают.

Ответ: а) $\dfrac{5^2+3^2}{8^2}$; б) $\dfrac{A_5^2+A_3^2}{A_8^2}$.

28. Что такое статистическая устойчивость? Дайте статистическое определение вероятности случайного события.

29. При стрельбе была получена частота попадания 0,6. Сколько было сделано выстрелов, если получено 12 промахов?

Ответ: n = 30.

30. Отдел технического контроля обнаружил 6 бракованных деталей в партии из случайно отобранных 60 деталей. Найти относительную частоту появления брака.

Ответ: 0,1.

31. Метеорологические наблюдения в течении 10 лет в некоторой местности показали, что число дождливых дней в июле было в разные года

равно: 2; 4; 3; 2; 4; 3; 2; 3; 5; 3. Определить вероятность того, что какой-либо определенный день июля будет дождливым.
Ответ: 0,1.

Занятие 2. *Теоремы сложения и умножения вероятностей. Схема Бернулли.*

Задания для аудиторной работы:

1. Потребитель может увидеть рекламу определенного товара по телевидению (событие А), на рекламном стенде (событие В) и прочесть в газете (событие С). Что означает событие $(A + B) \cdot \overline{C}$?

2. Если событие А–он не пришёл на встречу, событие В–она не пришла на встречу, тогда что означает событие С=А+В? $\overline{C}$ =? (через произведение).

3. Рабочий изготовил три различных детали. Каждая деталь может быть либо годной, либо бракованной. Построить пространство элементарных исходов. Из каких элементарных исходов состоят следующие события: А = {первая изготовленная деталь–годная}, В= {изготовлено две годные детали}, С= {изготовлено не более одной годной детали}, D= {первая и последняя детали разного качества}, Е= {две «соседние» детали разного качества}. Являются ли совместными события А и D? D и Е?

4. Образуют ли полную группу событий следующие события: а) испытание: бросание монеты, события: А1 – появление герба, А2 – появление решки. б) испытание: бросание двух монет, события: В1 – появление двух гербов, В2 –появление двух решек. в) испытание: два выстрела по мишени, события: С1 – одно попадание, С2 – два попадания, С0 – ни одного попадания. г) испытание: два выстрела по мишени, события: D1 – хотя бы одно попадание, D2 – хотя бы один промах.

5. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с первого, пять со второго, семь с третьего и четыре с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или с третьего склада?

6. Покупатель может приобрести акции трех компаний: А, В и С. Надежность первой компании оценивается экспертами на уровне 90%, второй – 95% и третьей – 85%. Чему равна вероятность того, что все три компании обанкротятся?

7. Вероятность повреждения кочанов капусты при погрузке равна 0,05; вероятность повреждения при транспортировке равна 0,02; вероятность повреждения при разгрузке – 0,04. Найти вероятность того, что кочаны капусты будут доставлены в овощехранилище без повреждений.

8. В первой урне находятся три белых, пять красных и семь синих шаров, во второй урне – два белых, четыре красных и девять синих шаров. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что извлечённые шары будут: а) одного цвета; б) разных цветов.

9. В магазине имеются 10 женских и 6 мужских дубленок. Для анализа качества отобрали три дубленки случайным образом. Определить вероятность того, что среди отобранных дубленок окажутся: а) только женские шубы; б) только мужские или только женские шубы.

10. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру любой масти или карту пиковой масти (фигурой называются валет, дама или король)?

11. Для сигнализации об утечке газа установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при утечке газа сработает первый сигнализатор, равна 0,96, вероятность для второго сигнализатора – 0,92. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

12. Из 30 учащихся спортивной школы 12 человек занимаются баскетболом, 15 – волейболом, 5 – баскетболом и волейболом, а остальные – другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только баскетболом или только волейболом?

13. В университете 60% студентов первого курса написали входное тестирование по математике без троек. Известно, что 40% студентов являются медалистами, а 20% студентов–медалисты, написавшие тест без троек. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный студент является медалистом, написавшим тест без троек?

14. Две производственные установки связаны единым технологическим циклом. Вероятность выхода из строя одной из них зависит от того, в каком состоянии находится другая. Вероятность того, что первая установка не выйдет из строя равна 0,8. Условная вероятность того, что выйдет из строя вторая установка, равна 0,6 при условии, что выйдет из строя первая. Найти вероятность того что, хотя бы одна из установок не выйдет из строя.

15. Решить предыдущее задание, при условии, что установки не связаны единым циклом, т.е. работают независимо друг от друга.

16. Исследование инкубации яиц яичного кросса Беларусь-9 показало, что цыплята выводятся в среднем из 70% заложенных в инкубатор яиц. Из общего количества заложенных в инкубатор яиц случайным образом отобраны и помечены 6. Найти вероятность того, что из помеченных яиц выведутся: а) менее трех цыплят; б) более трех цыплят; в) не менее трех; г) не более трех.

17. Вероятность того, что в течение рабочего дня произойдет сбой в поставке сырья на производство, равна 0.8. Определить вероятности того, что в течение рабочей недели (5 дней): а) три рабочих дня не будет сбоя в поставке сырья; б) сбой в поставках будет в трех рабочих днях; в) сбой будет менее чем в трех рабочих днях; г) сбой будет не более чем в одном рабочем дне; д) сбоя в поставках не будет ни разу; е) сбой будет хотя бы в одном рабочем дне; ж) сбой будет не менее чем в одном и не более чем в трех рабочих днях.

18. При механизированной уборке картофеля повреждается в среднем 10% клубней. Найти вероятность того, что в случайной выборке из 200 клубней повреждено от 15 до 50 клубней.

19. Опытный участок засеян семенами костра безостного. На одной из делянок этого участка в травостое содержится 0,4% сорных растений. Какова вероятность того, что среди 125 растений этой делянки, отобранных случайным образом, имеются; а) ровно 3 сорных; б) не более трех сорных.

20. При скрещивании двух кормовых сортов люпина во втором поколении теоретически ожидаемым отношением алкалоидных растений к безалкалоидным является отношение 9:7. Найти вероятность того, что среди полученных 150 гибридных растений половина растений будут алкалоидными.

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение совместных событий. Приведите пример.

2. Какие два события называются несовместными? Приведите пример.

3. Какие события называются попарно несовместными?

4. Дайте определение суммы (объединения) двух событий. Чему равна сумма событий «выпало 2-а очка» и «выпало не менее 3-ех очков» при броске игральной кости?

5. Дайте определение произведения (пересечения) двух событий. Чему равно произведение событий «выпало более 1-го очка» и «выпало менее 3-ех очков» при броске игральной кости? Чему равно произведение несовместных событий?

6. $A \cdot A = ?$; $A \cdot \varnothing = ?$; $A + \varnothing = ?$; $A + \Omega = ?$

7. $P(A) = 0{,}2. \quad P(\overline{A}) = ?$

8. При движении автомобиля под его правые и левые колеса попадают препятствия (выступы и впадины дорожного полотна). Пусть A–событие, состоящее в попадании препятствия под левое колесо, B–под правое. Какой смысл имеют события: а) $A + B$; б) $A \cdot B$; в) $\overline{A + B}$; г) $\overline{A} \cdot \overline{B}$.

Ответ: а) препятствие попало хотя бы под одно колесо; б) препятствие попало под оба колеса; в) и г) препятствие не попало ни под одно из колес.

9. Что называется условной вероятностью события?

10. На занятии присутствует две группы студентов. В первой группе 15 студентов, из них три отличника, во второй группе 20 студентов, из них четыре отличника. К доске для решения задачи вызван один отличник. Найти вероятность того, что вызван студент из второй группы.

Ответ: 3/7.

11. Из колоды в 36 игральных карт тянут подряд две карты. Известно, что первая вынутая карта–карта червовой масти. Какая вероятность, что вторая вынутая карта–туз?

Ответ: 1/9.

12. Какие события называют независимыми (независимыми в совокупности)?

13. События A и B независимы. Что можно сказать о событиях A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$?

14. $P(A \cdot B) = ?,$ если A и B независимые события.

15. Два человека больны заболеванием, для которого коэффициент выздоровления составляет 98%. Найти вероятность того, что они оба выздоровеют.

Ответ: 0,9604.

16. В одном ящике 4 черных и 8 белых шаров. В другом ящике 3 черных и 12 белых шаров. Из каждого ящика наугад извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что оба шара черные.

Ответ: 1/15.

17. $P_B(A) = ?,$ если A и B независимые события.

18. $P(A \cdot B) = ?,$ если A и B зависимые события.

19. $P(A + B) = ?,$ если A и B несовместные события.

20. Какова вероятность выпадения «5» или «6» при однократном бросании игральной кости?

Ответ: 1/3.

21. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с первого, пять со второго, семь с третьего и четыре с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или с третьего склада?

Ответ: 11/20.

22. В урне 6 белых и 8 черных шаров. Взято подряд без возвращения два шара. Какова вероятность, что они одного цвета?

Ответ: 86/182=43/91.

23. $P(A+B)=?$, если A и B совместные события

24. $A, B-$совместные события, $P(A)=P(B)=0,4$. Чему равна вероятность того, что хотя бы одно из них наступило, если $P(\overline{A}\cdot\overline{B})=0,4$? Чему равна вероятность того, что наступили оба события?

Ответ: 0,6; 0,2.

25. $P(A+B)=?$, если A и B совместные и независимые события.

26. Два человека больны заболеванием, для которого коэффициент выздоровления составляет 98%. Найти вероятность того, что, по крайней мере, один из них выздоровеет.

27. Вероятность повреждения клубней картофеля вследствие уборки его картофелеуборочным комбайном равна 0,02. Вероятность повреждения вследствие транспортировки и разгрузки равна 0,01. Какова вероятность повреждения клубней?

Ответ: 0,0298.

28. На сессии студенту предстоит сдать экзамены по трем предметам. Студент освоил 90% вопросов по первому предмету, 80% – по второму и 60% – по третьему предмету. Какова вероятность, что: а) студент сдаст только один экзамен; б) студент сдаст хотя бы один экзамен?

Ответ: а) 0,116; б) 0,992.

29. Вероятность прижиться саженцу яблони одного сорта равна 0,83, другого–0,7. Найти вероятность того, что из двух саженцев разных сортов: а) хотя бы один не приживется; б) не приживется только один.
Ответ: а) 0,419; б) 0,368.
30. Два игрока поочередно извлекают наудачу по одному шару из урны, в которой находятся два белых и четыре черных шара. После каждого извлечения шар не возвращается в урну. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Вычислить вероятность выигрыша для каждого участника.
Ответ: 0,6 и 0,4.
31. В первой урне находится 2 черных и 3 белых шара, во второй урне–2 белых и 3 черных. Два игрока поочередно вынимают шары без возвращения, каждый из своей урны, до тех пор, пока впервые не появится черный шар. Игрок, вынувший его, считается победителем. Какова вероятность, что выиграет 1-й (2-й) игрок?
Ответ: 0,53; 0,47
32. Из колоды в 52 карты наугад извлекаются две карты, без возвращения. Какова вероятность, что вторая карта пиковой масти, если первая карта пиковой масти? Какова вероятность, что первая карта пиковой масти, если вторая карта пиковой масти? Зависимы ли эти события?
Ответ: 12/51; 0,249; зависимы.
33. Дайте определение схемы Бернулли. Приведите пример.
34. Запишите формулу Бернулли. Поясните смысл входящих в нее величин.
35. Что называется биномиальным распределением вероятностей?
36. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41-го размера, равна 1/4. Чему равна вероятность того, что из четырех покупателей обувь этого размера понадобится двоим?
Ответ: 27/128.
37. Три рекламные фирмы участвуют в тендере. Для каждой из них вероятность получения заказа равна 0,4. Найти вероятность того, что хотя бы

одна из трех фирм выиграет тендер.
Ответ: 0,784.

38. В магазине 5 холодильников. Вероятность выхода из строя каждого холодильника в течение года равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение года ремонта потребует: а) 4 холодильника; б) не менее 2 холодильников; в) не более 1 холодильника; г) не менее 1 холодильника; д) хотя бы один холодильник.
Ответ: а) 0,0064; б) 0,2627; в) 0,7373; г) 0,6723; д) 0,6723.

39. Сформулируйте теорему Пуассона для схемы Бернулли. Что называется распределением Пуассона?

40. В вузе обучаются 3650 студентов. Вероятность того, что день рождения студента приходится на определенный день года, равна 1/365. Найти вероятность того, что 10 студентов родилось 1 мая.
Ответ: 0,1251.

41. Сформулируйте локальную теорему Муавра-Лапласа.

42. У клевера красного сорта Пермский местный бывает в среднем 84% позднеспелых растений. Какова вероятность того, что 52 растения из 60 растений клевера, отобранных случайным образом, являются позднеспелыми.
Ответ: 0,1201.

43. Сформулируйте интегральную теорему Муавра-Лапласа.

44. При обследовании уставных фондов банков установлено, что пятая часть банков имеют уставной фонд свыше 100 млн. руб. Найти вероятность того, что среди 1800 банков имеют уставной фонд свыше 100 млн. руб. от 300 до 400 включительно.
Ответ: 0,906.

Занятие 3. *Случайные величины.*

Задания для аудиторной работы:

1. В партии 12% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 3 детали. Написать биномиальный закон распределения случайной величины X –

числа нестандартных деталей среди трех отобранных. Найти $M(X)$ и $D(X)$. Построить многоугольник распределения.

2. а) задан закон распределения дискретной случайной величины X:

x_i	–2	–1	0	3	6
p_i	0,2	0,1	0,2	p_4	p_5

Найти вероятности p_4 и p_5, дисперсию DX, среднеквадратическое отклонение σ, если $MX = 1{,}3$.

б) случайная величина X (число кустов смородины, зараженных вирусом, из n посаженных) имеет биномиальное распределение. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста смородины равна p. Найти вероятность $P(3 \le X \le 5)$, если математическое ожидание $MX = 2$, а дисперсия $DX = 1{,}5$. Найти функцию распределения и построить ее график.

3. Случайная величина X имеет нормальное распределение. Плотность распределения $f(x) = A \cdot e^{-\frac{(x+3)^2}{8}}$. Найти параметр $A, M(X), D(X), P(-2 < X < 3)$.

4. Ошибка измерения длины платформы станции метро подчинена нормальному закону. Математическое ожидание этой ошибки равно 5см, а среднее квадратичное отклонение равно 10см. Найти вероятность того, что измеряемое значение длины платформы будет отклоняться от истинного не более чем на 20см.

5. Средняя масса годовалого осетра 230 г, среднее квадратичное отклонение 5 г. Полагая, что случайная величина X, равная массе годовалого осетра, распределена нормально, найти: а) вероятность того, что масса наудачу выловленного осетра будет заключена в пределах от 220 г до 240 г; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания окажется меньше

3 г; в) по правилу трех сигм найти наименьшую и наибольшую границы предполагаемой массы годовалого осетра.

6. Расход бензина на 100 км для исправного автобуса – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения со средним, равным 15 кг, и средним квадратическим отклонением, равным 2 кг. На автобазе составлена инструкция, согласно которой, автобус отправляется в ремонт, если при испытании он расходует более 20 кг бензина на 100 км. Найти вероятность отправки в ремонт исправного автобуса. Как надо составить инструкцию, чтобы эта вероятность была 0,01?

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение дискретной случайной величины (ДСВ). Приведите пример.

2. Охарактеризуйте множество возможных значений ДСВ.

3. Что называется распределением вероятностей ДСВ?

4. Что такое ряд распределения?

5.

x_i	-1	0	1
p_i	$0,5$	p_2	$0,2$

$p_2 - ?$

6. Что называется законом распределения случайной величины X?

7. Какое распределение вероятностей называется биномиальным?

8. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлены три светофора, дающие независимо друг от друга зеленый сигнал в течение 30 с, желтый–в течение 5 с, красный–в течение 25 с. Составьте закон распределения случайной величины $X-$ числа остановок автомобиля.

Ответ:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125

9. Что называется многоугольником распределения? Постройте многоугольник распределения для задания **8.**

10. Дайте определение функции распределения СВ X.

11. $P\{X<2\}=0,4,\ F(2)=?$

12. Запишите формулу для ФР ДСВ X и нарисуйте график взяв для простоты число возможных значений X равным 4.

13. Найдите функцию распределения и вероятность события $P\{X\le 2\}$ для задания **8.**

Ответ: $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0,125 & 0<x\le 1\\ 0,5 & 1<x\le 2\\ 0,875 & 2<x\le 3\\ 1 & x>3\end{cases}$, $P\{X\le 2\}=0,875.$

14. Сформулируйте свойства ФР ДСВ X.

15. Функция распределения дискретной случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 2\\ 0,4, 2<x\le 5\\ 0,9, 5<x\le 8\\ 1, x>8\end{cases}.$$

Найти $P(3\le X<9).$

Ответ: 0,6.

15. Какие числовые характеристики СВ вы знаете?

16. Что называется математическим ожиданием ДСВ, каков его вероятностный смысл?

17. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной рядом распределения

x_i	1	2	3	4

p_i	0,1	?	0,4	0,2

Ответ: $M(X) = 2{,}7$.

18. Случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	0	x_2	5
p_i	0.1	0.2	0.7

Найти значение x_2, если $M(X) = 5.5.$

Ответ: 10.

19. Перечислите известные вам свойства математического ожидания.

20. Известно, что X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. Чему равно $M(X)$?

21. Дайте определение дисперсии $D(X)$ случайной величины. Каков ее вероятностный смысл? Назовите свойства дисперсии.

22. Запишите расчетные формулы для вычисления дисперсии ДСВ.

23. Если дискретная случайная величина X принимает три значения: -1, 0, 1 с равными вероятностями, то ее дисперсия $D(X)$ равна а) 1/9; б) 2/9; в) 0; г) 2/3; д) 1/3.

Ответ: г.

24. Что называется средним квадратическим отклонением СВ?

25. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0{,}1$ возможного значения x_1, математическое ожидание $M(X) = 3{,}9$ и дисперсия $D(X) = 0{,}09$. Найти закон распределения этой случайной величины.

Ответ:

x_i	3	4
p_i	0,1	0,9

26. Случайные величины X и Y независимы (объясните что это значит).

Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 2X - 3Y$, если известно что, $D(X) = 3, D(Y) = 2$.

Ответ: $\sqrt{30}$.

27. Найти среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной рядом распределения

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	?	0,4	0,2

Ответ: $\sigma(X) = 0,9$.

28. Известно, что X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. Чему равна $D(X)$?

29. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X из задания **8.** Ответ: $M(X) = 1,5$, $D(X) = 0,75$.

30. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X – выручка фирмы, Y – затраты:

x_i	3	4	5
p_i	1/3	1/3	1/3

y_i	1	2
p_j	1/2	1/2

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X - Y$ (Z – прибыль).

Ответ: $M(X) = 2,5$; $D(X) = 11/12$.

31. Дайте определение непрерывной случайной величины (НСВ). Приведите пример.

32. Охарактеризуйте множество возможных значений НСВ.

33. Каким свойством обладает функция распределения НСВ, которым не обладает ФР ДСВ?

34. Приведите определение, вероятностный смысл и свойства плотности распределения вероятностей $f(x)$.

35. Какова связь между $F(x)$ и $f(x)$?

36. Приведите определение математического ожидания НСВ.

37. Приведите определение дисперсии НСВ.

38. Когда НСВ имеет нормальное распределение?

39. Что позволяет осуществить «правило трех сигм»?

40. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 1,\\ C(x-1)^2, 1<x\le 3,\\ 1, x>3.\end{cases}$$

Найти: а) значение параметра C; б) плотность распределения; в) математическое ожидание и дисперсию; г) вероятность $P\{X=0,5\}, P\{X<2\}$, $P\{1/2<X<2\}$.

Ответ: а) $C=1/4$; б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}, x\in(1,3);\\ 0, x\notin(1,3);\end{cases}$ в) $M(X)=7/3$, $D(X)=2/9$; г) $P\{X=0,5\}=0$, $P\{X<2\}=0,25$, $P\{1/2<X<2\}=0,25$.

41. Случайная величина X имеет нормальное распределение. Плотность распределения $f(x)=A\cdot e^{-2x^2}$. Найти параметр $A, M(X), D(X), P(|X|>0,5)$.

Ответ: $A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}, M(X)=0, D(X)=0,25, P(|X|>0,5)=0,3173.$

42. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x+1)^2}{18}}$. Чему равно M (2X - 1)?

Ответ: – 3.

43. Случайная величина распределена по нормальному закону, причем $M(X)=15.$ Известно, что $P(15<X<25.85)=0,485.$ Тогда $D(X)$ равна?

Ответ: 25.

44. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. 1. Найти вероятность того, что цена акции: а) не выше 15,3 ден. ед; б) не ниже 15,4 ден. ед; в) от 14,9 до 15,3. 2) С помощью правила трех сигм найти границы, в которых будет находится текущая цена акции.

Ответ: 1. а) $P(X\le 15,3)=F(15,3)=0,9332$; б) $P(X\ge 15,4)=1-F(15,4)=0,0228$; в) $P(14,9\le X\le 15,4)=0,6246$; 2. $14,4\le X\le 15,6$.

Занятие 4. *Выборка и ее представление. Точечные оценки числовых характеристик генеральной совокупности (параметров распределения). Интервальные оценки.*

Задания для аудиторной работы:

1. В супермаркете проводились наблюдения над числом *X* покупателей, обратившихся в кассу за один час. Наблюдения в течение 30 часов (15 дней в период с 9 до 10 и с 10 до 11 часов) дали следующие результаты: 70,75,100,120,75,60,100,120,70,60,65,100,65,100,70,75,60,100,100,120,70,75,70,120,65,70,75,70,100,100. Составить вариационный и статистический ряд.

2. В таблице приведена выборка результатов измерения роста 105 студентов (юношей):

155	170	185	180	188	152	173	178	178	168	185
173	170	183	175	173	170	183	175	180	175	193
178	183	180	197	178	181	187	168	174	179	184
183	178	180	178	163	166	178	175	182	190	167
170	178	183	170	178	181	173	168	185	175	170
155	169	186	179	189	155	174	179	179	169	186
174	171	184	175	193	178	184	180	196	175	181
188	168	179	178	183	184	178	181	177	163	166
178	175	183	190	167	170	178	183	170	178	182
173	168	186	176	171	188					

Измерения проводились с точностью до 1 см. Требуется составить интервальный статистический ряд.

3. По статистическому ряду из **1.** построить выборочную функцию распределения.

4. По интервальному статистическому ряду из **2.** построить кумуляту (график «накопленных относительных частот»).

5. Построить полигон относительных частот по данному статистическому ряду:

x_i	1	4	5	7	9
m_i	10	25	45	20	10

6. Построить гистограмму частот и относительных частот по данному интервальному статистическому ряду:

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	3–5	20
2	5–7	25
3	7–9	15
4	9–11	13
5	11– 13	12
6	13– 15	8
7	15– 17	7

7. По статистическим данным распределение магазинов города по годовому товарообороту (млн. руб.) имеет следующий вид:

Товарооборот	Менее 1	1 – 3	3 – 7	7 – 13	13 – 23	23 – 35	Свыше 35
Число магазинов (% к итогу)	35	40	10	6	4	4	1

Найти: средний товарооборот, моду и медиану ряда, размах вариации, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

8. По данному статистическому распределению выборки методом произведений вычислить числовые характеристики выборки: а) выборочную среднюю; б) выборочную и исправленную дисперсию; в) выборочное среднее квадратическое отклонение.

x_i	110	115	120	125	130	135	140
m_i	3	7	11	40	19	12	8

В задачах **9.** и **10.** дано распределение признака X (случайной величины X), полученного по n наблюдениям. Необходимо: 1) построить полигон (гистограмму), кумуляту и эмпирическую функцию распределения X; 2) найти: выборочное среднее, выборочную дисперсию, исправленную дисперсию, с.к.о.

9. X – число задач, решенных абитуриентами на вступительном экзамене (экзаменационный билет по математике содержит 10 задач); n=300 (абитуриентов).

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_i	13	17	15	35	10	9	40	51	45	33	32

10. X –удой коров на молочной ферме за лактационный период (в ц), n=100 (коров).

x_i	4–6	6–8	8–10	10–	12–	14–	16–	18 –	20–	22–	24–

				12	14	16	18	20	22	24	26
m_i	1	3	6	11	15	20	14	12	10	6	2

11. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено 10%-ное обследование предприятий одной из отраслей экономики в отчетном году. Результаты обследования представлены в таблице:

Выпуск продукции, млн. руб.	Менее 30	30–40	10–50	50–60	60–70	70–80	80–90	Более 90
Число предприятий	6	9	19	29	20	18	5	2

Найти несмещенные точечные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии.

12. При обследовании выработки 1000 рабочих цеха в отчетном году по сравнению с предыдущим по схеме собственно-случайной выборки было отобрано 100 рабочих. Получены следующие данные:

i	*Выработка в отчетном году в процентах к предыдущему x*	*Частота (количество рабочих) n_i*	*Частость (доля рабочих)* $w_i = \frac{n_i}{n}$
1	94,0—100,0	3	0,03
2	100,0—106,0	7	0,07
3	106,0—112,0	11	0,11
4	112,0—118,0	20	0,20
5	118,0—124,0	28	0,28
6	124,0—130,0	19	0,19
7	130,0—136,0	10	0,10
8	136,0—142,0	2	0,02
Σ		100	1,00

Определить: а) вероятность того, что средняя выработка рабочих цеха отличается от средней выборочной не более чем на 1% (по абсолютной величине); б) границы, в которых с надежностью 0,9545 заключена средняя выработка рабочих цеха; в) определить объем выборки, при котором с вероятностью 0,9973 отклонение средней выработки всех рабочих цеха не превзойдет 1% (по абсолютной величине).

13. Для поступившей партии пшеницы, с целью определения среднего процентного содержания белка, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено 10-% обследование. Результаты анализа приведены в таблице:

Процент содержания белка	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20
Число проб	6	12	15	24	20	18	5

Найти доверительный интервал, в котором с вероятностью 0.95 заключено среднее процентное содержание белка во всей партии.

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля:

1. Объясните предмет и перечислите основные задачи математической статистики.

2. В чем суть выборочного метода?

3. Дайте определение генеральной и выборочной совокупности. Что такое объем генеральной совокупности и объем выборки?

4. Дайте определение случайной выборки. Опишите классификацию выборок.

5. Объясните понятие репрезентативности выборки.

6. Что такое статистика?

7. Что такое вариационный ряд?

8. Что такое частота, относительная частота?

9. Что такое статистический ряд?

10. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

x_i	1	2	3	4
n_i	10	9	8	n_4

Найти n_4.

Ответ: $n_4 = 23$.

11. Что такое интервальный статистический ряд?

12. Как определяется рекомендуемое число частичных интервалов?

13. Сколько частичных интервалов можно порекомендовать в случае объема выборки: а) $n = 200$; б) $n = 500$?

Ответ: а) *k*=8; б) *k*=9.

14. В городе А для определения сроков гарантийного обслуживания проведено исследование величины среднего пробега автомобилей, находящихся в эксплуатации в течение двух лет с момента продажи автомобиля магазином. Получен следующий результат (тыс. км.):

3,0; 25,0; 18,6; 12,1; 10,6; 18,0; 17,3; 29,1; 20,0; 18,3; 21,5; 26,7; 12,2; 14,4; 7,3; 9,1; 2,9; 5,4; 40,1; 16,8; 11,2; 9,9; 25,3; 4,2; 29,6.

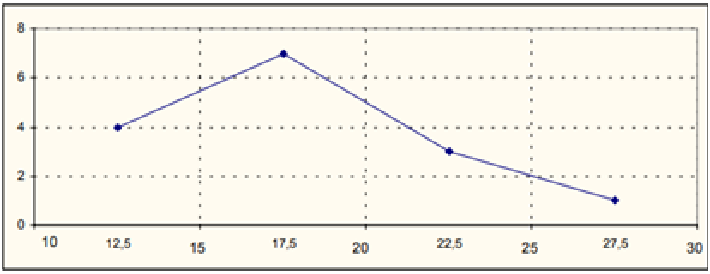
Составить интервальный статистический ряд.

Ответ:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45
m_i	3	4	5	6	2	4	0	0	1
p_i^*	0,12	0,16	0,20	0,24	0,08	0,16	0	0	0,04

15. Что такое полигон частот, гистограмма, эмпирическая функция распределения выборки, кумулята?

16. Для какой выборки, представленной в виде интервального статистического ряда, построен полигон частот:



а)

Границы интервалов	10-15	15-20	20-25	25-30
Частоты	4	7	3	1

б)

Границы интервалов	0-12,5	12,5-17,5	17,5-22,5	22,5-27,5
Частоты	20	35	15	5

в) нет правильного ответа.

Ответ: а).

17. Как строится гистограмма? О чем она дает представление?

18. Как определяется рекомендуемое число частичных интервалов при построении гистограммы? Запишите формулу Стерджеса.

19. Найти эмпирическую функцию распределения по данному статистическому ряду:

x_i	1	3	7	9	12
m_i	2	10	4	24	10

Ответ:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ 0{,}04, & \text{если } 1 < x \leqslant 3, \\ 0{,}24, & \text{если } 3 < x \leqslant 7, \\ 0{,}32, & \text{если } 7 < x \leqslant 9, \\ 0{,}8, & \text{если } 9 < x \leqslant 12, \\ 1, & \text{если } x > 12; \end{cases}$$

20. Найти кумуляту по данному интервальному статистическому ряду:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i < X \le x_{i+1}$	11–14	14– 17	17–20	20 – 23	23– 26	26–29	29– 32	32– 35
m_i	16	24	30	7	8	6	5	4

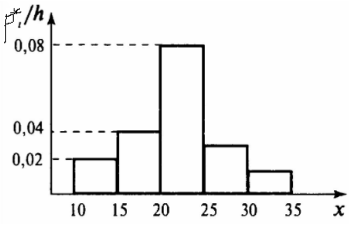
Ответ:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 11, \\ 0{,}16, & \text{если } 11 < x \leqslant 14, \\ 0{,}4, & \text{если } 14 < x \leqslant 17, \\ 0{,}7, & \text{если } 17 < x \leqslant 20, \\ 0{,}77, & \text{если } 20 < x \leqslant 23, \\ 0{,}85, & \text{если } 23 < x \leqslant 26, \\ 0{,}91, & \text{если } 26 < x \leqslant 29, \\ 0{,}96, & \text{если } 29 < x \leqslant 32, \\ 1, & \text{если } x > 32. \end{cases}$$

21. Построить гистограмму относительных частот по наблюдениям:

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	10–15	2
2	15–20	4
3	20–25	8
4	25–30	4
5	30–35	2

Ответ:



22. Статистическим аналогом каких объектов в теории вероятностей являются статистический ряд, эмпирическая функция распределения, полигон и гистограмма?

23. Что такое точечные оценки числовых характеристик генеральной совокупности (параметров распределения)?
24. Перечислите требования к оценкам.
25. Статистическим аналогом какой величины в теории вероятностей является выборочная средняя?
26. Приведите расчетные формулы вычисления выборочной средней для повторной и бесповторной выборок. Чем они различаются?
27. Известен доход по 4 фирмам $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, $x_3 = 9$, $x_4 = 6$. Известна также выборочная средняя по 5 фирмам, равная $\overline{x} = 7$. Доход пятой фирмы равен?
Ответ: 8.
28. Что такое выборочная и исправленная дисперсии? Чем они различаются?
29. Какова несмещенная оценка дисперсии, если рассчитанная по выборке объемом 15 наблюдений выборочная дисперсия равна 28?
Ответ: 30.
30. Приведите расчетные формулы вычисления выборочной и исправленной дисперсий для повторной и бесповторной выборок.
31. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n ($n \ll N$). Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, исправленное среднеквадратическое отклонение.

x_i	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5
n_i	2	18	40	25	6	5	4

Ответ: 11,73; 0,4071; 0,411; 0,641.
32. Некоторое сельхозпредприятие закупило удобрения для повышения урожайности. В таблице приведены результаты выборочного обследования 30 земельных участков площадью по 1га каждый для определения роста урожайности в процентах к предыдущему году.

Требуется: а) составить интервальный статистический ряд и построить гистограмму частот; б) найти несмещенные точечные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии.

Результаты выборочного обследования				
117	111	113	108	110
123	122	120	115	104
129	109	102	119	127
115	116	109	96	111
122	100	111	131	113
115	112	107	114	108

Ответ: **:** $\overline{X_в} \approx 112.97$, $s^2 \approx 50.46$.

33. Что такое интервальные оценки?

34. Дайте определение понятий доверительного интервала и доверительной вероятности.

35. Доверительный интервал–это…: а) интервал, который покрывает известный параметр распределения, б) интервал, который покрывает неизвестный параметр распределения с надежностью, в) интервал, в котором всегда содержится неизвестный параметр распределения, г) интервал, в который с вероятностью 1 попадает неизвестный параметр распределения.

Ответ: б).

36. Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 10. Тогда доверительный интервал для его оценки может иметь вид: а) (10; 10,9), б) (8,4; 10), в) (8,5; 11,5), г) (8,6; 9,6)?

Ответ: в).

37. Объясните понятие точности оценки.

38. Как осуществляется построение доверительного интервала для оценки генеральной средней при известном и неизвестном среднем квадратическом отклонении?

39. Соотношение $P\left(\bar{x}-(\ldots)\frac{s}{\sqrt{n}}<\bar{x}_0<\bar{x}+(\ldots)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=\gamma$ приближенно оценивает математическое ожидание генеральной совокупности с произвольным распределением при большом объеме выборки. Допишите пропущенный множитель в числителе и объясните его смысл.

Ответ: $u_{(1+\gamma)/2}$ – квантиль стандартного нормального распределения уровня $(1+\gamma)/2$.

40. Как определяется потребный объем выборки для оценки генеральной средней с заданной точностью и надежностью?

41. Объем генеральной совокупности равен 10000, объем выборки 1000. В результате измерения интересующего нас признака получено: $\bar{x}=15,5,\ \hat{s}^2=3,15.$ Найти вероятность того, что среднее значение признака отличается от своей оценки

42. Для исследования доходов населения города, составляющего 20 тыс. человек, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки было отобрано 1000 жителей. Получено следующее распределение жителей по месячному доходу (руб.):

x_i	менее 500	500—1000	1000—1500	1500—2000	2000—2500	свыше 2500
n_i	58	96	239	328	147	132

Необходимо: 1. а) найти вероятность того, что средний месячный доход жителя города отличается от среднего дохода его в выборке не более чем на 45 руб. (по абсолютной величине); б) определить границы, в которых с надежностью 0,99 заключен средний месячный доход жителей города. 2. Каким должен быть объем выборки, чтобы те же границы гарантировать с надежностью 0,9973?

Ответ: 1. а) $0,9715$; б) $(1599,9;1706,1)$ (руб.); 2) 1329.

43. Для поступившей партии яблок, с целью определения средней массы плода, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено 10-% обследование. Результаты анализа приведены в таблице. Найти 95%-ный доверительный интервал для оценки средней массы плода яблока во всей партии.

Масса плода	$125-135$	$135-145$	$145-155$	$155-165$	$165-175$	$175-185$	$185-195$
Число проб	4	8	18	38	20	10	2

Ответ: : $(157.14; 162.86)$.

7. Вопросы к экзамену

1. Основные правила комбинаторики: сложения и умножения. Схемы выбора, число перестановок (факториал), число сочетаний, число размещений.
2. Случайный эксперимент. Пространство элементарных исходов. Случайное событие. Невозможное и достоверное события. Противоположные события. Совместные и несовместные (попарно несовместные) события. Полная группа событий.
3. Операции над случайными событиями.
4. Дискретное пространство элементарных исходов. Классическое определение вероятности. Основные свойства вероятности.
5. Статистическая устойчивость. Статистическое определение вероятности.
6. Условная вероятность. Независимость событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
7. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Биномиальное распределение вероятностей.
8. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
9. Теорема Пуассона.
10. Понятие случайной величины. Дискретная случайная величина (ДСВ). Закон распределения ДСВ. Распределение вероятностей. Ряд распределения. Функция распределения.

11. Операции над случайными величинами. Числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение (с.к.о.) и их свойства.
12. Биномиальное распределение (БР – схема «число успехов»). Математическое ожидание и дисперсия БР.
13. Непрерывная случайная величина (НСВ). Плотность и функция распределения НСВ.
14. Числовые характеристики НСВ: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.
15. Нормальное распределение (НР). Математическое ожидание и дисперсия НР.
16. Закон больших чисел: неравенство Чебышева, теорема Чебышева, теорема Бернулли.
17. Предмет и основные задачи статистики.
18. Генеральная совокупность и выборка. Случайная выборка. Классификация выборок.
19. Варианта. Вариационный ряд. Частота и относительная частота. Статистический ряд. Интервальный статистический ряд.
20. Эмпирическая функция распределения и гистограмма. Кумулята, гистограмма частот, полигон.
21. Квантиль.
22. Точечные оценки числовых характеристик генеральной совокупности (параметров распределения). Требования к оценкам (несмещенность, состоятельность, эффективность). Выборочное среднее, выборочная и исправленная дисперсии, выборочное с.к.о.
23. Расчетные формулы вычисления выборочной средней, дисперсии и исправленной дисперсий для повторной и бесповторной выборок.
24. Интервальные оценки числовых характеристик генеральной совокупности (параметров распределения). Доверительный интервал и доверительная вероятность (надежность). Предельная ошибка выборки. Доверительный интервал для генеральной средней по большой выборке (повторной и бесповторной).

7.1. Критерии оценки знаний студентов на экзамене

– отметка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал монографической литературы, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.

– отметка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.

– отметка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, демонстрирует недостаточно систематизированы теоретические знания программного материала, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.

– отметка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки при его изложении, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы.

8. Приложение

Таблица 5. Некоторые значения функции $\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-z^2/2}dz$.

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1,48	0,4306	1,75	0,4599	2,03	0,4803	2,60	0,4953
1,49	0,4319	1,76	0,4608	2,04	0,4812	2,62	0,4956
1,50	0,4332	1,77	0,4616	2,05	0,4821	2,64	0,4959
1,51	0,4345	1,78	0,4626	2,06	0,4830	2,66	0,4961
1,52	0,4357	1,79	0,4633	2,07	0,4838	2,68	0,4963
1,53	0,4370	1,80	0,4641	2,16	0,4846	2,70	0,4965
1,54	0,4382	1,81	0,4649	2,18	0,4854	2,72	0,4967
1,55	0,4394	1,82	0,4656	2,20	0,4861	2,74	0,4969
1,56	0,4406	1,83	0,4664	2,22	0,4868	2,76	0,4971
1,57	0,4418	1,84	0,4671	2,24	0,4875	2,78	0,4973
1,58	0,4429	1,85	0,4678	2,26	0,4881	2,80	0,4974
1,59	0,4441	1,86	0,4686	2,28	0,1887	2,82	0,4976
1,60	0,4452	1,87	0,4693	2,30	0,4893	2,84	0,4977
1,61	0,4463	1,88	0,4699	2,32	0,4898	2,86	0,4979
1,62	0,4474	1,89	0,4706	2,34	0,4904	2,88	0,4980
1,63	0,4484	1,90	0,4713	2,36	0,4909	2,90	0,4981
1,64	0,4495	1,91	0,4719	2,38	0,4913	2,92	0,4982
1,65	0,4505	1,92	0,4726	2,40	0,4918	2,94	0,4984
1,66	0,4515	1,93	0,4732	2,42	0,4922	2,96	0,4985
1,67	0,4525	1,94	0,4738	2,44	0,4927	2,98	0,4986
1,68	0,4535	1,95	0,4744	2,46	0,4931	3,00	0,49865
1,69	0,4545	1,96	0,4750	2,48	0,4934	3,20	0,49931
1,70	0,4554	1,97	0,4756	2,50	0,4938	3,40	0,49966
1,71	0,4564	1,98	0,4761	2,52	0,4941	3,60	0,499841
1,72	0,4573	1,99	0,4767	2,54	0,4945	3,80	0,499928
1,73	0,4582	2,00	0,4772	2,56	0,4948	4,00	0,499968
1,74	0,4591	2,01	0,4783	2,58	0,4951	4,50	0,499997
		2,02	0,4793			5,00	0,499997

9. Литература

Список основной литературы

1. Коган Е. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.А. Коган, А.А. Юрченко. — Москва: ИНФРА-М, 2023. — 250 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/textbook_5cde54d3671a96.35212605. - ISBN 978-5-16-014235-7. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1920312
2. Соколов, Г. А. Основы теории вероятностей: учебник / Г. А. Соколов. — 2-е изд. — Москва: ИНФРА-М, 2019. — 340 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс]. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-006728-5. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1008004
3. Красс, М. С. Математика для экономического бакалавриата : учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 472 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-004467-5. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1933160

Список дополнительной литературы

1. Хуснутдинов, Р. Ш. Математическая статистика: Учебное пособие / Хуснутдинов Р.Ш. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 205 с. (Высшее образование: Бакалавриат) (Обложка. КБС)ISBN 978-5-16-009520-2. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1002159
2. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики: учебник / А.Н. Бородин. – 8-е изд. – М.: Лань, 2021. – 256 с. (ЭБС «Лань»)
3. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 538 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10004-4. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/517540

Составитель **Тарсис Екатерина Юрьевна**

Теория вероятностей и математическая статистика: методические указания по проведению практических заданий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы

Печатается в авторской редакции

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160