НОСИБИРСКИЙ ГАУ
ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

АГРОИНЖЕНЕРНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Допущено Министерством сельского хозяйства Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по агроинженерным и агроэкономическим специальностям
(№13-03-3/2275 от 2 октября 2010 г.)

Новосибирск 2016

УДК 519.2
ББК 22.171
Б 914

Кафедра теоретической и прикладной физики

Составители: доц. И.М. Дзю, д.т.н., проф. С.В. Викулов, к.т.н., доц. И.В. Тихонкин

Рецензенты:
д-р.техн.наук проф. А.П. Пичугин, НГАУ;
д-р.физ.-мат. наук, проф. М.П. Синюков, СГУВТ

Агроинженерная механика**:** учеб.пособие / сост.: И.М. Дзю, С.В. Викулов, И.В. Тихонкин;Новосиб.гос. аграр. ун-т. Инженер.ин-т. – Новосибиск, 2016. – 150 с.

Учебное пособие содержит изучаемый в курсе общей физики материал по механике.
С целью более глубокого освоения предмета в пособие включено достаточно большое количество примеров и задач с подробными решениями, что должно помочь студентам получить необходимые знания, используемые на практике.
Предназначено для студентов, обучающихся по всем направлениям и формам обучения, реализуемым в НГАУ.

Утверждено и рекомендовано к изданию методическим советом
Инженерного института, протокол №7, от 1 марта 2016 г

Допущено Министерством сельского хозяйства Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по всем направлениям и формам обучения, реализуемым в НГАУ.
(№13-03-3/2275 от 2 октября 2010 г.).

ВВЕДЕНИЕ

Физика – наука о природе. Науки, изучающие различные виды движения материальных объектов, называются естественными. Физика занимает особое место среди всех естественных наук, так как она изучает наиболее фундаментальные и универсальные закономерности взаимодействия частиц и полей, лежащих в основе всех других явлений: химических, биологических, астрономических и др. Курс физики совместно с курсом высшей математики составляют основу теоретической подготовки инженеров и играют роль фундаментальной базы, без которой невозможна успешная деятельность инженеров любого профиля.

Физика делится на части, каждая из которых изучает в основном определенный вид движения материи. Механика изучает перемещение тела в пространстве; молекулярная физика – беспорядочное движение большого количества атомов и молекул, составляющих вещество; электромагнетизм – взаимодействие электрических и магнитных полей с электрическими зарядами; оптика – возникновение, особенности распространения излучения и его взаимодействия с веществом; физика атома и атомного ядра – особенности внутриатомного и внутриядерного движения материи.

Механика состоит из следующих частей: механика материальной точки, механика системы точек, механика твердого тела, механика жидкостей и газов. Каждая такая часть, в свою очередь, состоит из трех разделов: кинематики, динамики и статики. Кроме того, особым разделом выделяют учение о колебаниях и волнах.

Основную информацию и знания по физике большинство студентов получают на лекциях, практических занятиях, при выполнении и защите лабораторных работ. Эти знания обязательно должны дополняться целеустремленной самостоятельной работой (по программе для этого отводится половина рабочего времени): изучение конспекта лекций, выполнение индивидуальных заданий (решение задач), подготовка к выполнению лабораторных работ. Необходимое условие успешного усвоения курса физики – его систематическое изучение в течение всего учебного процесса на всех видах учебных занятий.

Данное учебное пособие предназначено для оказания помощи студентам инженерных специальностей в изучении курса общей физики при самостоятельном выполнении индивидуальных заданий по кинематике и динамике поступательного, вращательного и колебательного движений.

Физические основы классической механики

Наиболее простым видом движения материи является механическое, под которым понимают изменение положения в пространстве одних тел относительно других.

Механику подразделяют на классическую и квантовую, а также на классическую нерелятивистскую и релятивистскую. Все, что связано с развитием физики до начала XX в., относится к классической нерелятивистской механике. Гипотеза Планка (1900 г.) положила начало развитию квантовой механики, а разработка специальной теории относительности (Эйнштейн, 1916 г.) сформировала принципы релятивистской механики при движении тел со скоростью, соизмеримой со скоростью света ($v = c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с).

Механика состоит из трех разделов: кинематика, динамика и статика.

Кинематика изучает движение без учета причин, вызывающих его.

Динамика изучает движение тел, с учетом причин, вызывающих это движение.

Статика изучает условия равновесия тел.

Движение материальных тел относительно, поэтому при описании механического движения необходимо указывать *систему отсчета*, которая включает тело отсчета и систему координат с часами. При решении большинства практических задач в механике систему отсчета связывают с землей.

Движение реальных тел столь сложно, что точное его описание невозможно, поэтому для установления наиболее важных закономерностей движения используют некоторые физические модели: материальная точка, абсолютное твердое тело, траектория и др.

Материальная точка – тело, размерами которого в данных условиях движения можно пренебречь.

Абсолютно твердым телом в механике называют тело, взаимное расположение частей которого остается неизменным во время движения. Строго говоря, абсолютно твердых тел в природе не существует.

Траектория– непрерывная линия, которую описывают точки при своем движении. По форме траектории различают прямолинейные и разнообразные криволинейные движения (по окружности, параболе и т.п.).

1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Любое сложное механическое движение тела может быть представлено как сумма двух основных видов движения: поступательного и вращательного (рисунок1.1).

При поступательном движении тела любая прямая, соединяющая две произвольные точки тела, всегда переносится параллельно самой себе, при этом все точки твердого тела движутся по одинаковым траекториям с одинаковыми скоростями и ускорениями (рисунок 1.1а).

При вращательном движении различные точки тела движутся по окружностям, центры которых находятся на одной прямой, называемой осью вращения (рисунок 1.1б).

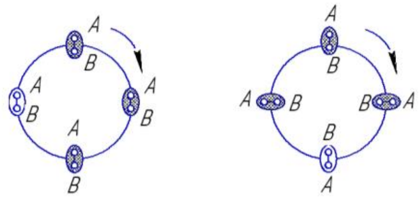

Рисунок 1.1 – Основные виды движения
а) – поступательное; *б*) – вращательное

1.1. Кинематика поступательного движения материальной точки

Положение материальной точки M относительно системы отсчета можно указать с помощью радиуса-вектора $\vec{r}$; проведенного в данную точку из начала координат – точки O (рисунок 1.2). При этом закон движения точки указывается в виде $\vec{r} = \vec{r}\ (t)$, где $\vec{r}(t)$ - векторная функция, описывающая зависимость радиуса-вектора $\vec{r}$ от времениt. Такой способ описания движения носит название *векторного* (полярная система координат). Он наиболее удобен для теоретических исследований.

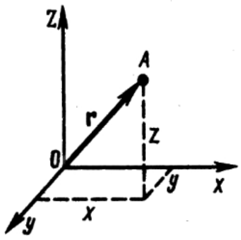

Рисунок 1.2 – Радиус-вектор

При решении задачи в численном виде, применяют *координатный метод* (декартовая система координат) описания движения. В этом случае положение точки M указывают с помощью координат x, y, z, являющихся проекциями радиуса – вектора rна координатные оси. Закон движения записывается при этом в виде трех скалярных функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{1.1}$$

Если заранее известна траектория движения материальной точки, можно использовать наиболее простой способ описания движения – *естественный,* при котором положение материальной точки определяется расстоянием S от некоторой начальной точки, измеренным вдоль траектории. Величину S называют *дуговой координатой*, а закон движения записывают в виде

$$S = S(t). \tag{1.2}$$

Вектор $\Delta\vec{r}$, соединяющий начальную 1 и конечную 2 точки движения (рисунок1.3), называется перемещением. Если точка движется по траектории все время в одну сторону, то за время Δtеё дуговая координата изменится на величинуΔS , называемую *длиной пройденного пути* $\Delta S = S_2 - S_1$, где S_1 и S_2 – дуговые координаты точек *1* и *2* соответственно.

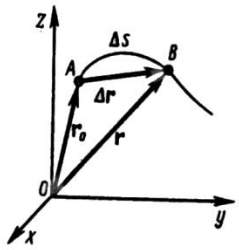

Рисунок 1.3– Вектор перемещения

Для оценки быстроты изменения положения тела в пространстве с течением времени вводится понятие *скорость* $\vec{v}$– векторная величина.

Средней скоростью $\vec{v}_{\text{ср}}$ называют величину, равную отношению перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt, в течение которого это перемещение произошло,

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.3}$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением вектора перемещения. При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим отрезком траектории, и модуль его $|\Delta\vec{r}|$ равен *пройденному пути* $|\Delta\vec{r}| = \Delta S$. В этом случае

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{1.4}$$

Средняя скорость может иметь различное значение на разных участках траектории, поэтому надо знать скорость в данный момент времени – *мгновенную скорость. Мгновенная скорость* $\vec{v}$ *определяется как производная от перемещения по времени*:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.5}$$

По мере уменьшения интервала времени Δt величина пути ΔS приближается к модулю перемещения $|\Delta\vec{r}|$, поэтому одновременно с (1.5) для численного значения мгновенной скорости справедливо выражение

$$v = \frac{dS}{dt}. \tag{1.6}$$

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории в данной точке (рисунок 1.3).

В большинстве случаев скорость со временем может изменяться по величине, по направлению, либо по величине и по направлению одновременно. Для оценки быстроты изменений скорости вводится понятие *ускорения* $\vec{a}$.

Ускорение – это отношение изменения скорости ко времени, за которое это изменение произошло.

Равномерное изменение скорости может быть оценено *средним* ускорением

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

При неравномерном изменении скорости во времени необходимо определить *мгновенное* ускорение

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.8)$$

Если движение тела криволинейное и скорость его изменяется по величине и по направлению, то вектор ускорения имеет направление под углом к вектору скорости. В этом случае – это *полное ускорение*, состоящее из касательного a_τ (тангенциального) и a_n – нормального (центростремительного), т.е.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_\tau. \quad (1.9)$$

На рисунке 1.4 изображен случай ускоренного движения.

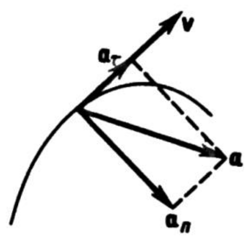

Рисунок 1.4 – Вектор ускорения

Касательное (тангенциальное) ускорение направлено по касательной к траектории движения и характеризует изменение скорости по величине

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.10)$$

Оно может совпадать по направлению со скоростью движения, в этом случае движение ускоренное. Если движение замедляется, то вектор a_τ направлен противоположно вектору скорости.

Ускорение, характеризующее быстроту изменения скорости по направлению, называют нормальным (центростремительным) ускорением

$$\vec{a}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_n}{dt}. \quad (1.11)$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ вектор $\vec{a}_n$ будет перпендикулярен к вектору $\vec{v}$ и направлен к центру кривизны (рисунок 1.4).

Модуль нормального ускорения определяется как

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (1.12)$$

Модуль полного ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + \mathrm{a}_n^2}. \quad (1.13)$$

(векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ взаимно перпендикулярны).

Классифицируя поступательное движение на равномерное, равнопеременное и неравномерное, можно записать следующие уравнения:

- равномерное

$$\vec{v} = const, \ \vec{a} = 0, \ \vec{S} = \vec{v}t; \tag{1.14}$$

- равнопеременное

$$\vec{a} = const, \ \vec{v} = \vec{v}_0 \pm \vec{a}t, \ \vec{S} = \vec{v}_0 t \pm \frac{\vec{a}t^2}{2}. \tag{1.15}$$

- неравномерное

$$\vec{a} \neq const, \ \vec{v} = \frac{d\vec{S}}{\overline{dt}}; \ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{S}}{dt^2}; \ \vec{S} = f(t). \tag{1.16}$$

В формулах плюс соответствует случаю равноускоренного движения, а минус – равнозамедленного.

Пример №1. Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось x) имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, $A = 4$ м/c, $B = 2$ м/c, $C = -0{,}5$ м/c^3. Для момента времени $t = 2\ c$ определить: 1) координату x_1точки, 2) мгновенную скорость v_1, 3) мгновенное ускорение a_1.

Дано:
$x = A + Bt + Ct^3$,
$A = 4$ м,
$B = 2$ м/с,
$C = -0{,}5$ м/c^3,
$t = 2\ c$.
Найти: 1) x_1 =? 2) v = ? 3) a_1 = ?

*Решение.*1. Координату точки, для которой известно кинематическое уравнение движения, найдем, подставив в уравнение движения вместо t заданное значение времени t_1:

$$x_1 = A + Bt_1 + Ct_1^3.$$

Подставим в это выражение значения A, B, C, t_1 и произведем вычисления:

$$x_1 = (4 + 2 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot 2^3) \text{ м} = 4 \text{ м}.$$

2. Мгновенную скорость в произвольный момент времени найдем, продифференцировав координату х по времени: $v = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2$. Тогда в заданный момент времени t_1 мгновенная скорость $v_1 = B + 3Ct^2$.
Подставим сюда значения B, C, t_1 и произведем вычисления:

$$v_1 = -4 \text{ м/с}.$$

Знак минус указывает на то, что в момент времени $t_1 = 2\ c$ точка движется в отрицательном направлении координатной оси.

3. Мгновенное ускорение в произвольный момент времени найдем, взяв вторую производную от координатыxпо времени: $a = \frac{d^2x}{dt^2}$. Мгновенное ускорение в заданный момент времени t_1 равно

$$a_1 = 6Ct_1.$$

Подставим значения C, t_1 и произведем вычисления:

$$a_1 = -6 \cdot 0{,}5 \cdot 2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = -6\ \text{м/с}^2.$$

Знак минус указывает на то, что направление вектора ускорения совпадает с отрицательным направлением координатной оси, причем в условиях данной задачи это имеет место для любого момента времени.

Ответ: 1) $x_1 = 4$ м, 2) $v_1 = -4$ м/с, 3) $a_1 = -6$ м/с^2.

Пример №2. Автомобиль движется равноускоренно с начальной скоростью $v_0 = 5$ м/с и ускорением $a = 2$ м/с^2. За какое время t он пройдет $S = 1000$ м пути?

Дано:
$v_0 = 5$м/с,
$a = 2$ м/с^2,
$S = 1000$ м.
Найти: $t = ?$

*Решение.*Для решения задачи воспользуемся формулой (1.16), записанной в виде

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \text{так как } S_0 = 0.$$

Приведем ее к квадратному уравнению:

$$at^2 + 2v_0 t - 2S = 0. \quad (1)$$

Решение уравнения (1) будет выглядеть следующим образом:

$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2aS}}{a}.$$

Знак минус перед корнем мы отбросим, так как время не может быть отрицательной величиной. Выразим путь в единицах СИ:1 км $= 1000$ м.

Подставим числа и вычислим время t:

$$t = \frac{-5 + \sqrt{25 + 2 \cdot 2 \cdot 1000}}{2}\ c = 29\ c.$$

Ответ: $t = 29\ c$.

Пример № 3. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. На какой высоте h и через сколько времени t скорость тела v будет вдвое меньше первоначальной скорости v_0?Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано
$v_0 = 20$ м/с,
$v = \frac{v_0}{2}$,
$g = 9.8$ м/с.
Найти: $h = ?$; $t = ?$

Решение. Обозначим: v_0– начальная скорость тела в момент бросания,– время взлета тела на высоту h, v – скорость тела на высоте h, g – ускорение свободного падения тела.

Высоту, на которую поднимается тело, можно определить изформулы

$$v^2 - v_0^2 = -2gh,$$

отсюда $$h = v^2 - \frac{v^2 - v_0^2}{-2g}. \qquad (1)$$

По условию задачи $v = \frac{v_0}{2}$, тогда

$$v^2 = \frac{v_0^2}{4}. \qquad (2)$$

Подставим значение (2) в формулу (1) для h , получим

$$h = \frac{\frac{v^2}{4} - v_0^2}{-2g}; \; h = \frac{-3v_0^2}{8g}.$$

Для определения времени t воспользуемся формулой

$$v = v_0 - gt, \text{ откуда } t = \frac{v_0 - v}{g}.$$

Поскольку

$$v = \frac{v_0}{2}, \text{ то } t = \frac{v_0 - \frac{v_0}{2}}{g} = \frac{v_0}{2g}.$$

Произведем вычисления:

$$h = \frac{3 \cdot 20^2}{8 \cdot 9.8} \text{ м} = 15{,}3 \text{ м}, \; t = \frac{20}{2 \cdot 9.8} \text{ с} = 1{,}02 \text{ с}.$$

Ответ: $h = 15{,}3$ м , $t = 1{,}2$ с.

Вопросы для самопроверки

1. Какие движения называются равномерными?
2. Что называют скоростью равномерного прямолинейного движения?
3. Что называют средней скоростью неравномерного движения?
4. Что называется мгновенной скоростью неравномерного движения?
5. Какое движение называется равнопеременным? Что называетсяускорением равнопеременного движения, и какими единицами оно измеряется?
6. Как подсчитывается путь при неравномерном движении?
7. Как по закону движения определить скорость, ускорение и путь?

1.2. Кинематика вращательного движения

Вращательное движение рассмотрим на примере вращения тела вокруг неподвижной оси. Различные точки вращающегося твердого тела движутся по траекториям с различными скоростями и ускорениями, однако все радиусы, соединяющие ось вращения с точками тела, поворачиваются за время Δt на одинаковые углы $\Delta\varphi$ (рисунок 1.5). Поэтому для описания вращательного движения вводятся угловые кинематические характеристики, главной особенностью которых является то, что они имеют одинаковые значения для всех точек вращающегося тела.

Угловыми кинематическими величинами являются: угол поворота $\vec{\varphi}$, *рад*; угловая скорость $\vec{\omega}$, *рад*/с и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$, *рад*/с^2.

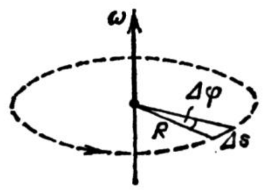

Рисунок 1.5 – Движение материальной точки по окружности

По аналогии с линейной скоростью $\vec{v}$ мгновенная угловая скорость равна

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \tag{1.17}$$

При равномерном вращении тела средняя угловая скорость определяется как

$$\overleftarrow{\omega}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}. \tag{1.18}$$

В этом случае движение можно характеризовать периодом или частотой вращения.

Период вращения T – время совершения телом одного полного оборота (поворот на угол 2π рад) вокруг оси, c:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.19}$$

Частота вращения ν– число оборотов, совершаемых телом в единицу времени, то есть величина, обратная периоду, c^{-1}:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{1.20}$$

При неравномерном вращении быстроту изменения угловой скорости характеризуют угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$.

В случае равнопеременного вращения используют среднее угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}, \tag{1.21}$$

а при неравномерном движении необходимо определять мгновенное угловое ускорение:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.22}$$

Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ – аксиальные векторы, расположенные на оси вращения. Направление вектора $\vec{\omega}$ определяется по правилу «правого винта» (рисунок 1.6). Вектор $\vec{\omega}$ совпадает с направлением поступательного движения острия буравчика (винта) вдоль оси вращения, когда его ручка вращается по часовой стрелке и совпадает с направлением вращения тела.

а) – при $\varepsilon > 0$ *б*) – при $\varepsilon < 0$

Рисунок 1.6 – Направления вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$

Если угловая скорость со временем возрастает, то вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{\omega}$ (рисунок 1.6 *а*), если убывает, то он направлен в противоположную сторону (рисунок 1.6 *б*).

Установим связь между угловыми характеристиками движения тела и линейными характеристиками движения отдельных его точек. На рисунке 1.7 показано движение материальной точки, принадлежащей некоторому абсолютно твердому телу. За время dtточка проходит путь dS по дугеокружности, а радиус-вектор r повернулся при этом на угол $d\varphi$. Очевидно, $dS = rd\varphi$

Рисунок 1.7 – Связь между линейными и угловыми скоростями

Используя определение скорости (1.6), получим:

$$v = \frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot r. \quad (1.23)$$

Нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \quad (1.24)$$

Тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega \cdot r)}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \cdot r. \quad (1.25)$$

Величины $\Delta\varphi$, $\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$ в кинематике вращательного абсолютного твердого тела аналогичны по физическому смыслу величинам$\Delta\vec{S}, \vec{v}, \vec{a}$в кинематике поступательного движения, аналогичны и связывающие их уравнения.

Таблица 1 – Формулы связи между линейными и угловыми величинами

Поступательное движение	Вращательное движение
Равномерное $v = const$ $S = vt$ ***Равнопеременное*** $a = const$ $v = v_0 \pm at$ $\vec{S} = \vec{v}_0 \cdot t \pm \frac{\vec{a}t^2}{2}$ ***Неравнопеременное*** $v = \frac{d\vec{S}}{dt}$	***Равномерное*** $\omega = const$ $\varphi = \omega t$ ***Равнопеременное*** $\varepsilon = const$ $\vec{\omega} = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\vec{\varepsilon}t^2}{2}$ ***Неравнопеременное*** $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$

$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$ $S = f(t)$	$\varepsilon = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ $\varphi = f(t)$

Пример № 4. Точка движется по окружности радиусом $R = 2$ см. Зависимость пути от времени даётся уравнением $S = Ct^3$, где $C = 0{,}1$ см/с^3. Найти нормальное и тангенциальное a_t ускорения точки в момент, когда линейная скорость точки $v = 0{,}300$ м/с.

Дано:
$R = 2$ см,
$S = Ct^3$,
$C = 0{,}1$ см/с^3,
$V = 0{,}300$ м/с.
Найти: $a_t = ?$; $a_n = ?$

Решение. Нормальное и тангенциальное ускорения точки вращающегося тела выражаются формулами:

$$a_n = \omega^2 R;\ a_t = \frac{dv}{dt},$$

где ω – угловая скорость точки; β– её угловое ускорение.

Угловую скорость определяют по формуле:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{0{,}3\ \text{м/с}}{0{,}02\ \text{м}} = 15\ \text{рад/с},$$

тогда $$a_n = 15^2 \cdot 0{,}02 = 4{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

так как $v = \frac{dS}{dt} = 3Ct^2$, получим $t = \sqrt{\frac{v}{3C}} = \sqrt{\frac{0{,}3}{3\cdot 0{,}001}} = 10\ c$,

тогда $$a_t = \frac{dv}{dt} = 6Ct = 6 \cdot 0{,}0001\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 10\text{с} = 0{,}006\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: $a_t = 0{,}006$ м/с^2; $a_n = 4{,}5$ м/с^2.

Пример № 5. Пуля, летевшая горизонтально, пробила один за другим два диска, насаженных на один вал и вращавшихся с частотой $n = 10\ c^{-1}$. Расстояние между дисками$S = 30$ см. Найти скорость пули vмежду дисками, если угловое смещение пробоины $\varphi = 9°$и пробоины оказались расположенными на одинаковом расстоянии от оси вращения.

Дано:
$n = 10c^{-1}$,
$S = 30$ см,
$\varphi = 9°$.
Найти: $v = ?$

Решение. Поскольку пуля между пробоинами двигалась спостоянной скоростью, то ее скорость определим отношениемрасстояния между дисками S ко времени движения пули между ними t:

$$v = \frac{S}{t}.$$

За это время первый диск, пробитый пулей, повернется на угол φ**,** вращаясь с угловой скоростью ω, которую мы определим через частоту ν.
Согласно определению:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}, \text{ откуда } t = \frac{\varphi}{\omega}, \text{ где } \omega = 2\pi\nu,$$

поэтому $v = \frac{2\pi\nu S}{\varphi}$.. С учетом этого

$$v = \frac{2\pi\nu S}{\varphi}.$$

Переведем все единицы в СИ:

$$\varphi = \frac{9\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{20} \text{ рад}.$$

Произведем вычисления: $v = \frac{0{,}3 \cdot 2\pi \cdot 10 \text{ м/с}}{\frac{\pi}{20}} = 120 \text{ м/с}$.

Ответ: $v = 120$ м/с.

Пример №6. Путь, пройденный материальной точкой при ее равномерном движении по окружности, изменяется с течением времени по закону$S = 6{,}28t$. Найти частоту оборотов точки n, если радиус окружности$R = 10$ см.
Дано:
$S = 6{,}28t$,
$R = 10$ см.
Найти: $n = ?$

Решение. При равномерном движении материальной точки по окружности уравнение ее движения:

$$S = vt,$$

где v–линейная скорость точки.
Следовательно, $v = \frac{S}{t}$; или $v = \omega R$,
откуда $$\omega = \frac{v}{R}.$$
Угловая скорость ω связана с искомой частотой n простым соотношением

$$\omega = 2\pi n,$$

откуда $$n = \frac{\omega}{2\pi},$$

или $$n = \frac{S}{2\pi R} = \frac{6{,}28}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1} c^{-1} = 10\, c^{-1}.$$

Ответ: $n = 10\, c^{-1}$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют угловой скоростью движения точки по окружности? В каких единицах измеряется угловая скорость?
2. Какова связь линейной скорости с угловой при равномерном движении точки по окружности?

3. Как записывается закон равномерного движения точки через угловые величины?

4. Что называют мгновенной угловой скоростью и каков физический смысл этой величины?

5. Что называют угловым ускорением равнопеременного движения по окружности? Дайте определение единицы измерения углового ускорения. Что называют мгновенным ускорением? Как угловое ускорение связано с угловой скоростью и углом поворота?

6. Какова связь линейного ускорения с угловым?

7.Как записать закон равнопеременного движения точки по окружности через угловые величины?

8. Что понимают под угловой скоростью? Как направлен этот вектор и чему равен его модуль?

9. Что понимают под угловым ускорением? Как направлен этот вектор и чему равна его величина, если ось вращения неподвижна?

10.Как выражаются полное ускорение и его нормальная и тангенциальная составляющие при движении по окружности?

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Динамика изучает законы взаимодействия тел, причины изменения и появления движения. Таким образом, главной задачей динамики является установление связи между изменением движения тел и теми причинами, которые приводят к изменениям.

2.1. Инерциальные системы отчета. Закон инерции

Движение относительно разных систем отсчета имеет неодинаковый характер.

Среди всевозможных систем отсчета существуют такие, относительно которых движение тел оказывается особенно простым. В частности, *тела, не подверженные воздействию других тел, движутся относительно таких систем без ускорения, т.е. прямолинейно и равномерно. Эти системы отсчета называются инерциальными.*

Мерой инерции тела при поступательном движении является его масса. За единицу массы в системе СИ принят килограмм (кг).

Утверждение о существовании инерциальных систем отсчета Ньютон сформулировал в виде ***закона инерции***, который называют также ***первым законом Ньютона.*** Согласно этому закону,*всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.*

Системы отсчета, в которых первый закон Ньютона не выполняется, называются *неинерциальными*. К ним можно отнести, например, разгоняющийся, тормозящий или движущийся по закреплению пути автомобиль. В дальнейшем мы будем рассматривать все законы механики применительно к инерциальным системам отсчета, особо это не оговаривая.

Произведение массы тела m на его скорость $\vec{v}$ при поступательном движении называют импульсом (количеством движения) тела

$$\vec{P} = m\vec{v}. \quad (2.1)$$

Второй закон Ньютона *– изменение движения (ускорение) тела прямо пропорционально силе F, которая действует на тело, и обратно пропорционально массе m тела*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.2)$$

Подставив в уравнение (2.2) ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, получим

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (2.3)$$

Современная трактовка закона такова: *быстрота изменения импульса во времени равна действующей на тело силе.*

Сила – это количественная мера взаимодействия тел.

Выражение (2.3) можно записать:

$$\vec{F}dt = d(m\vec{v}). \quad (2.4)$$

Произведение $F \cdot dt$ принято называть импульсом силы. Следовательно, следствием второго закона Ньютона является *закон изменения импульса: изменение импульса тела равно импульсу действующей силы.*

Если к телу приложено несколько сил F_i, можно, произведя операцию векторного сложения сил, заменить их одной – равнодействующей силой:

$$\vec{F}_P = \sum \vec{F}_i.$$

Третий закон Ньютона *–тела всегда взаимодействуют попарно, а силы, с которыми действуют друг на друга тела, равны по величине и противоположны по направлению.*

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \text{ или } F_{1,2} = F_{2,1}. \quad (2.5)$$

Необходимо помнить, что эти силы приложены к разным телам (с разными массами) и поэтому друг друга не уравновешивают.

Все три закона Ньютона выполняются в инерциальных системах отсчета. Они взаимно связаны и дополняют друг друга. Второй закон считается основным.

2.2. Силы в механике

Всё изучаемое физикой многообразие взаимодействий тел при детальном рассмотрении сводится в настоящее время к четырем видам взаимодействия:

–*гравитационному*, описываемому законом всемирного тяготения;

–*электромагнитному* – взаимодействие неподвижных и движущихся электрически заряженных частиц и тел;

–*сильному (ядерному),* обеспечивающему связь частиц в атомном ядре;

–слабому, ответственному за многие процессы распада элементарных частиц.

В механике используют в основном три типа сил: *тяготения, упругости и трения.* Действие сил тяготения объясняется гравитационным взаимодействием тел, а упругости и трения – электромагнитным взаимодействием частиц, составляющих тела.

2.2.1. Сила тяготения

Ньютоном был сформулирован ***закон всемирного тяготения***: *силы, с которыми два тела притягиваются друг к другу, пропорциональны их массам и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними*:

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{2.6}$$

где F– величина силы; m_1 и m_2– массы тел; r – расстояние между ними; $G =$ ми; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{м}^3/\text{кг}\cdot\text{с}^2$–гравитационная постоянная. Гравитационное взаимо-
действие осуществляется через *гравитационное поле*. В результате существования такого поля вокруг Земли на все тела, находящиеся в этом поле, действует сила притяжения – *сила тяжести* F_T. Эта сила направлена к центру Земли и вблизи ее поверхности равна:

$$F_T = \frac{GmM_З}{R_З^2},$$

где $M_З$ и $R_З$– масса и радиус Земли. Так как $G,\ R_З$и $M_З$ – величины постоянные, можно ввести новую постоянную $g = \frac{G\cdot M_З}{R^2} = 9{,}81\ \text{м}/\text{с}^2$, называемую напряженностью гравитационного поля. Вблизи поверхности Земли эта величина называется *ускорением свободного падения*. Тогда силу тяжести можно определить как

$$F_T = mg. \tag{2.7}$$

Весом тела называют силу, с которой оно действует на опору или на подвес. Например: при ускоренном движении вверх $P > F_T,$ при ускоренном движении вниз $P < F_T$, а при $v = 0$ или $v = const,\ P = F_T$. Вес тела равен нулю, когда оно движется вниз с ускорением свободного падения. Такое состояние называется ***невесомостью***.

2.2.2. Силы упругости

Упругие силы возникают в результате деформации тел. Согласно третьему закону Ньютона, упругая сила $F_{\text{упр}}$ равна по модулю внешней деформирующей силе F и направлена противоположно ей: $F_{\text{у}} = -F$.

В пределах упругих деформаций (упругими называют такие деформации, при которых после прекращения действия деформирующей силы тело восстанавливает свои размеры и форму) тела подчиняются *закону Гука* – величина деформации x пропорциональна величине деформирующей силы F:

$$x = \frac{F}{k},$$

где k – коэффициент упругости (жесткости) тела, зависящий от размеров, формы, материала тела, а также от точки приложения и направления действия деформирующей силы.

Закон Гука применим к любым видам деформации (продольным, сдвиговым, кручению и т.д.), обычно его записывают в виде:

$$F_{\text{упр}} = -kx. \tag{2.8}$$

В последнем случае знак минус указывает на то, что сила упругости направлена в сторону, противоположную направлению деформации.

Силы упругости имеют электомагнитную природу.

2.2.3. Силы трения

Силы трения возникают при перемещении соприкасающихся тел или их частей относительно друг друга. Действие сил трения объясняется взаимодействием частиц, из которых состоят соприкасающиеся тела. Природа этих сил также электомагнитная.

При движении твердого тела по поверхности другого твердого тела возникает *сухое (внешнее)* трение. Для сухого трения характерно наличие трения покоя и пропорциональность силы трения–$F_{\text{тр}}$. силе нормальной реакции опоры –N (закон Кулона):

$$\vec{F}_{\text{тр}} = \mu \cdot \overrightarrow{N}, \tag{2.9}$$

где μ – коэффициент трения, зависящий от материалов и состояния поверхностей соприкасающихся тел. В первом приближении можно считать силу сухого трения не зависящей от скорости движения.

Все законы сухого трения в равной степени применимы и к трению скольжения, и к трению качения.

При движении твердого тела в жидкости или газе, а также при взаимном перемещении слоев жидкости или газа возникает *вязкое (внутреннее) трение*. Сила внутреннего трения зависит от скорости движения тела, для него характерно отсутствие трения покоя, пропорциональность$F_{\text{тр}}$ первой степени скорости $F_{\text{тр}} = \mu_1 \cdot v$ для относительно малых скоростей и пропорциональность ее величины квадрату скорости $F_{\text{тр}} = \mu_2 \cdot v^2$ для больших скоростей (рисунок 2.1).

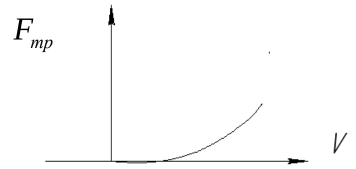

Рисунок 2.1 – Зависимость силы внутреннего трения от скорости (для больших скоростей)

2.3. Энергия

Энергия является наиболее общей количественной мерой движения материи. Различным видам движения материи соответствуют различные виды энергии. Энергия – скалярная величина.

Механическому движению материи соответствует *механическая энергия* $W_{\text{мех}}$. Механическая энергия системы материальных тел зависит как от их движения, так и от их взаимного расположения и взаимодействия. Различают два вида механической энергии: *кинетическую* и *потенциальную*.

Кинетической энергией $W_{\text{к}}$ обладают только движущиеся тела, и она определяется массой тела и скоростью движения:

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}. \qquad (2.10)$$

Кинетическую энергию покоящегося относительно системы отсчета тела считают равной нулю.

Потенциальная энергия W_n обусловлена взаимным расположением тел или частей тел и характером сил их взаимодействия.

Потенциальной энергией обладает упруго сжатая пружина:

$$W_n = \frac{kx^2}{2}, \qquad (2.11)$$

где k – коэффициент жесткости пружины; x– величина деформации пружины.

Потенциальная энергия тела определяется с точностью до постоянной величины. Например, для тела, поднятого на высоту h в поле земного тяготения, эта энергия определяется по формуле

$$W_n = mgh, \qquad (2.12)$$

где m – масса тела; $g = 9{,}81\ \text{м/с}^2$– ускорение свободного падения на Земле; h – высота тела над уровнем моря, принятым за нулевой (формула справедлива при $h << R$; $R_з$– радиус Земли).

2.4. Работа

Работа – результат действия силы. Механическая работа совершается при перемещении тела под действием приложенной к нему силы.

Величина элементарной работы dA определяется по формуле:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dS \cdot \cos\alpha = F_\tau \cdot dS, \qquad (2.13)$$

где α– угол между направлением вектора силы F и направлением вектора перемещения (рисунок 2.2); $F_\tau = F \cdot cos\alpha$ – проекция вектора силы F на направление перемещения; dS– элементарная величина пути.

Полная работа силы на участке пути от S_1 до S_2 равна сумме элементарных работ на этом участке

$$A = \int dA = \int_{S_1}^{S_2} F \cdot dS. \qquad (2.14)$$

Если в процессе движения величина и направление вектора силы не изменяются ($F = const$), то

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = F \cdot Scosa = F_\tau \cdot S. \qquad (2.15)$$

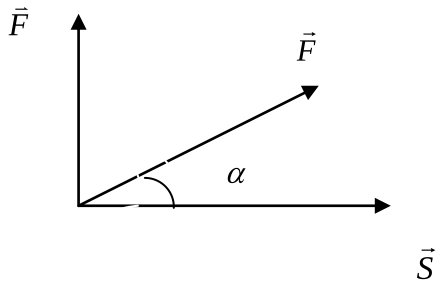

Рисунок 2.2 – Зависимость вектора силы $\vec{F}$ от перемещения $\vec{S}$

Работа может быть определена через изменение механической энергии.

Процесс изменения энергии системы под действием силы называется *процессом совершения работы*, а изменение энергии при этом процессе измеряется *величиной работы*

$$A = \Delta W_{\text{мех}} = W_{\text{мех2}} - W_{\text{мех1}}. \qquad (2.16)$$

Если в процессе совершения работы энергия системы возрастает ($\Delta W_{\text{мех}} > 0$), работу считают положительной. В обратном случае ($\Delta W_{\text{мех}} < 0$) – отрицательной. Работа – скалярная величина. Работе присущесвойство *аддитивности*. Это означает, что работа нескольких действующих на тело сил равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой силой в отдельности.

2.5. Мощность

Быстроту совершения работы при том или ином процессе характеризуют мощностью N:

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Подставив $dA = F_\tau \cdot dS$, получим мгновенное значение мощности:

$$N = \frac{F_\tau \cdot dS}{dt} = F_\tau \cdot v, \qquad (2.17)$$

где $\frac{dS}{dt} = v$– мгновенная скорость движения материальной точки.

Среднее значение мощности определяют по формуле:

$$N_{\text{ср}} = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \qquad (2.18)$$

В СИ работа и энергия измеряются в джоулях [Дж], а мощность в тах [Вт].

2.6. Силовое поле, его характеристики

Если материальная точка (тело) испытывает в каждой точке пространства воздействие со стороны какого-либо тела (или тел), то говорят, что материальная точка находится в *силовом поле*.

Поля, работа по перемещению тела в которых зависит лишь от положения начальной и конечной точек пути и не зависит от формы траектории, называются *потенциальными*, а действующие в них силы – *консервативными*.

Примером таких полей являются гравитационное, электростатическое, поле упругих тел.

Поля, в которых работа зависит от формы пути, называются *непотенциальными*, перемещение в них тел связано с рассеянием (диссипацией) механической энергии, поэтому действующие в таких полях силы называют*диссипативными* (например, силы трения).

Силовой характеристикой поля является *напряженность*. Для гравитационного поля напряженность равна отношению силы F, действующей на помещенную в поле материальную точку, к массm этой точки:

$$\frac{F}{m} = g, \tag{2.19}$$

то есть в поле тяготения Земли напряженность численно равна ускорению свободного паденияg.

Для *потенциальных* полей можно указать энергетическую характеристику – *потенциал*. Потенциал какой-либо точки гравитационного поля измеряют отношением величины потенциальной энергии материальной точки, внесенной в поле, к её массе:

$$\varphi_q = \frac{W_n}{m}. \tag{2.20}$$

2.7. Закон сохранения импульса

Этот закон является *фундаментальным* законом природы, справедливым для *замкнутой* системы и различных тел, от планет и звезд до атома и элементарных частиц.

Рассмотрим систему из N материальных тел, взаимодействующих друг с другом. На каждый элемент системы в общем случае (неизолированная система) действуют два рода сил: *внутренние* – $\vec{f_i}$ взаимодействие между телами внутри системы и где *внешние* F_i– действие тел, не входящих в систему. Если на систему не действуют внешние силы, то её называют *замкнутой* (изолированной). Замкнутых систем в природе не существует. Однако возможны системы, где внешние воздействия пренебрежимо малы или уравновешены. Такие системы можно считать замкнутыми и применять к ним закон сохранения импульса. Закон сохранения импульса является следствием второго и третьего законов Ньютона, убедимся в этом.

Рассмотрим систему материальных точек массами $m_1, m_2, \dots m_n$, движущихся со скоростями $v_1, v_2, \dots v_n$. Пусть $F_1, F_2, \dots F_n$– равнодействующие внутренних сил, действующих на каждое из этих тел, а $F_1, F_2, \dots F_n$– равнодействующие внешних сил. Запишем второй закон Ньютона для каждого из n тел механической системы

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} = \left(\vec{f}_{1,2} + \vec{f}_{1,3} + \dots \vec{f}_{1,n}\right) + \vec{F}_1,$$
$$\frac{d(m_2\vec{v}_2}{dt} = (\vec{f}_{2,1} + \vec{f}_{2,3} + \dots \vec{f}_{2,n}) + \vec{F}_2,$$

....

$$\frac{d(m_n\vec{v}_n)}{dt} = (\vec{f}_{n,1} + \vec{f}_{n,2} + \ldots \vec{f}_{n(n\ 1)}) + \vec{F}_n.$$

Так как геометрическая сумма внутренних сил механической системы по третьему закону Ньютона равна нулю, то

$$\frac{d}{dt}(m_1v_1 + m_2v_2 + \ldots + m_nv_n) = F_1 + F_2 + \ldots F_n. \qquad (2.21)$$

Таким образом, производная по времени от импульса механической системыравна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему.

В случае отсутствия внешних сил (рассматриваем замкнутую систему)

$$\frac{dp}{dt} = \sum_{i-1}^{n} m_i v_i = 0, \text{т.е } P = \sum_{i-1}^{n} m_i v_i = const. \qquad (2.22)$$

Закон сохранения импульса: *полный импульс замкнутой системы с течением времени не изменяется* (по модулю и направлению).

Закон сохранения импульса является следствием определенного свойства симметрии пространства – его однородности. *Однородностьпространства* заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физические свойства и законы движения не изменяются, иными словами, не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета.

В механике Галилея-Ньютона из-за независимости массы от скорости импульс системы может быть выражен через скорость ее центра масс. *Центром масс* (или *центром инерции*) системы материальных точек называется воображаемая точка *C*, положение которой характеризует распределение массы этой системы. Ее радиус-вектор равен

$$r_c = \frac{\sum_{i-1}^{n} m_i r_i}{m},$$

где m_i и r_i – соответственно масса и радиус-вектор i-й материальной точки; n– число материальных точек в системе; $m = \sum_{i-1}^{n} m$–масса системы. Скорость центра масс

$$v_c = \frac{dr_c}{dt} = \frac{\sum_{i-1}^{n} m_i \frac{dr_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i-1}^{n} m_i v_i}{m}.$$

Учитывая, что $P_i = m_i v_i$, а $\sum_{i-1}^{n} P_i$ есть импульс P системы, можно написать

$$\mathrm{P} = m v_c. \qquad (2.23)$$

Подставив выражение (2.22) в уравнение (2.23), получим

$$m\frac{dv_c}{dt} = F_1 + F_2 + \ldots + F_n, \qquad (2.24)$$

это выражение представляет собой *закон движения центра масс*.

В соответствии с (2.23) из закона сохранения импульса вытекает, что *центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.*

2.8. Закон сохранения механической энергии

Рассмотрим систему материальных точек массами $m_1, m_2 \ldots m_n$, движущихся со скоростями $v_1, v_2, \ldots v_n$. Пусть $F_1, F_2, \ldots F_n$– равнодействующие внутренних консервативных сил, действующих на каждую из этих точек, а $F_1, F_2, \ldots F_n$– равнодействующиевнешних сил, которые также будем считать консервативными. Кроме того, будем считать, что на материальные точки действуют еще и внешние неконсервативные силы. Равнодействующие этих сил, действующих на каждую из материальных точек, обозначим $f_1, f_2, \ldots f_n$. При $v << c$ массы материальных точек постоянны, и уравнения закона Ньютона для этих точек следующие:

$$m_1\frac{dv_1}{dt} = \grave{F}_1 + \grave{F}_1 + f_1,$$
$$m_2\frac{dv_2}{dt} = \grave{F}_2 + \grave{F}_2 + f_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$m_n\frac{dv_n}{dt} = \grave{F}_n + \grave{F}_n + f_n.$$

Двигаясь под действием сил, точки системы за интервал времени dt совершают перемещения, соответственно равные $dr_1, dr_2 \ldots dr_n$. Умножим каждое из уравнений скалярно на соответствующее перемещение и, учитывая, что $dr_i = v_i dt$, получим

$$m_1(v_1 dv_1) - \left(\grave{F}_1 + F_1\right)dr_1 = f_1 dr_1,$$
$$m_2(v_2 dv_2) - \left(\grave{F}_2 + F_2\right)dr_2 = f_2 dr_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$m_n(v_n dv_n) - \left(\grave{F}_n + F_n\right)dr_n = f_n dr_n.$$

Сложим эти уравнения, получим

$$\sum_{i-1}^{n} m_i(v_i dv_i) = \sum_{i-1}^{n}\left(\grave{F}_i + F_i\right)dr_i = \sum_{i-1}^{n} f_i dr_i. \qquad (2.25)$$

Первый член левой части равенства (2.25)

$$\sum_{i-1}^{n} m_i(v_i dv_i) = \sum_{i-1}^{n} \frac{d(m_i v_i^2}{2} = dT,$$

где dT – приращение кинетической энергии системы. Второй член $\sum_{i-1}^{n}\left(\grave{F}_i + F_i\right)dr_i$ равен элементарной работе внутренних и внешних консервативных сил, взятой со знаком минус, т.е. равен элементарному приращению потенциальной энергии $d\Pi$ системы.

Первая часть равенства (2.25) задает работу внешних неконсервативных сил, действующих на систему. Таким образом, имеем

$$d(T + \Pi) = dA.$$

Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, то

$$d(T + \Pi) = 0,$$

откуда

$$T + \Pi = E = const, \qquad (2.26)$$

т.е. полная механическая энергия системы сохраняется постоянной. Выражение (2.26) представляет собой закон сохранения механической энергии: *в системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется.*

2.9. Применение законов сохранения энергии и импульса

к прямому центральному удару шаров

Если два шара движутся поступательно по прямой, соединяющей их центры, то удар шаров будет прямым и центральным.В момент удара не возникает сил, направленных иначе, чем по прямой, проходящей через центры и, следовательно, после удара центры шаров будут двигаться по этой же прямой. В такой системе выполняется закон сохранения импульса, а если система консервативна, то и закон сохранения механической энергии.

Рассмотрим два предельных случая: *абсолютно неупругий* и *абсолютно упругий удары.*

Абсолютно неупругий удар

После абсолютно неупругого удара шары движутся совместно, с одинаковыми по величине и направлению скоростями. При таком ударе неизбежен переход хотя бы части механической энергии шаров во внутреннюю энергию (теплоту), поэтому закон сохранения механической энергии не выполняется.

Пусть до удара шары массами m_1и m_2 двигались со скоростями v_1и v_2. (рисунок 2.3). После абсолютно неупругого удара (удар шаров из пластилина, глины) они движутся как одно тело массой $(m_1 + m_2)$ со скоростью u. Согласно закону сохранения импульса, векторная сумма импульсов двух тел до взаимодействия равна векторной сумме их импульсов после взаимодействия:

$$m_1 v_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

откуда

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \tag{2.27}$$

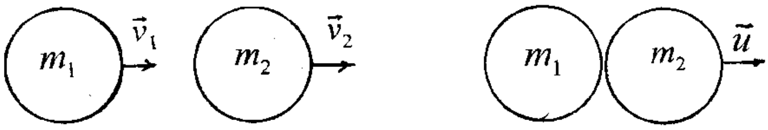

Рисунок 2.3 – Взаимодействие двух тел при абсолютно неупругих столкновениях

Вследствие деформации шаров происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую. Это уменьшение можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара.

$$\Delta W_k = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)}{2} u^2. \tag{2.28}$$

Абсолютно упругий удар

Примером приложения закона сохранения механической энергии и импульса является центральный удар двух абсолютно упругих шаров, то есть таких шаров, у которых деформации, возникающие при соударении, затем полностью ликвидируются, и механическая энергия не рассеивается в тепловую. Вся кинетическая энергия, которой обладают тела до удара, снова превращается в кинетическую энергию после удара. Пусть шары массами m_1 и m_2 имеют скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ до удара и после удара $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ соответственно, причем $v_1 > v_2$ (рисунок 2.4).

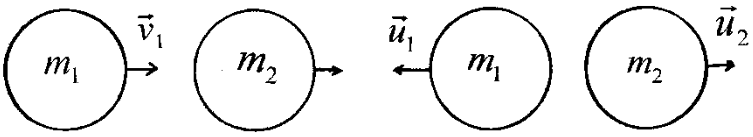

Рисунок 2.4 – Взаимодействие двух тел приабсолютно упругом столкновении

Считая, что система изолированная, законы сохранения энергии и импульса запишем

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \qquad (2.29)$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2. \qquad (2.30)$$

Совместное решение уравнений (2.29) и (2.30) дает:

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2 \vec{v}_2 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2}, \qquad (2.31)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1 \vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (2.32)$$

2.10. Динамические характеристики и основной закон динамики поступательного движения

При изучении кинематики движения материальных тел мы воспользовались физической моделью – материальной точкой, а форму и размеры в расчет не принимали.

При исследовании динамики движения необходимо рассматривать тело как совокупность множества элементов с массой m_i (размер элементов << размера тела). При поступательном движении все элементы тела движутся с одинаковыми скоростями и ускорениями, поэтому тело можно заменить материальной точкой с массой, равной массе тела и находящейся под действием результирующей силы $\vec{F}_i$. Такой точкой может быть центр масс (или центр тяжести). Координаты центра масс тела можно выразить через координаты x_i, y_i, z_i элементов и их масс (m_i) как

$$x_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i, \; y_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} y_i m_i, \; z_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} z_i m_i, \qquad (2.33)$$

где m– масса тела.

Расчеты показывают, что при отсутствии действия внешних сил на систему элементов центр масс её будет двигаться с постоянной скоростью, так же как движется по инерции одна точка. Из постоянства скорости следует, что движение происходит по инерции, и центр масс есть не что иное, как *центр инерции.*

Следует заметить, что центр масс (центр инерции) не связан с наличием массы. Например, при разрыве снаряда центр инерции движется с $v = const$, а осколки снаряда разлетаются в разные стороны с разными скоростями: $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$ и т.д.

С учетом особенностей поступательного движения основными динамическими характеристиками являются:

– масса (m)– мера инертности тела,кг;
–сила (F)– мера взаимодействия между телами, Н;
– импульс ($m\vec{v}$) – произведение массы на скорость, кг $\cdot$ м/с.

Основной закон динамики поступательного движения твердого тела может быть представлен в форме:

$$\vec{F} = m\vec{a} \text{ или } \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

где $\vec{F}$– это результирующая всех сил $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, действующих на тело.

Пример №1. Под действием силы $F = 10$ Н тело движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом путиsот времени t даётся уравнением
$S = A - Bt + Ct^2$,где$C = 1$ м/с^2. Н*а*йти массу тела m.

Дано:
$F = 10$ Н,
$S = A - Bt + Ct^2$,
$C = 1$ м/с^2.
Найти: $m = ?$

Решение. По второму закону Ньютона сила $F = m \cdot a$, значит отсюда масса тела:

$$m = \frac{F}{a}. \quad (1)$$

Мгновенная скорость есть первая производная от пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt} = -B + 2Ct.$$

Ускорение, с которым тело движется, найдём, взяв первую производную от скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2C = 2 \cdot 1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Теперь подставляем в формулу(1) и находим массу:

$$m = \frac{F}{a} = \frac{10\ H}{2\ \text{м/с}^2} = 5\ \text{кг}.$$

Ответ: $m = 5$ кг.

Пример №2. Ящик массой $m_1 = 15$ кгсоскальзывает по идеально гладкому лотку длиной $l = 2$ м на неподвижную тележку с песком и застревает в нём. Тележка с песком массой $m_2 = 60$ кг может свободно (без трения) перемещаться по рельсам в горизонтальном направлении. Определить скорость тележки с ящиком, если лоток наклонен под углом $\alpha = 30°$ к рельсам.

Дано:
$m_1 = 15$ кг,
$m_2 = 60$ кг,

$l = 2$ м,
$\alpha = 30°$.
Найти:$u = ?$

Решение.Тележку и ящик можно рассмотреть как систему двух не упруго взаимодействующих тел. Но это система не замкнута, так как сумма внешних сил, действующих на систему: двух сил тяжести $\boldsymbol{m_1 g}$ и $\boldsymbol{m_2 g}$ и силы реакции $\boldsymbol{N_2}$ (рисунок 2.5) – не равна нулю.

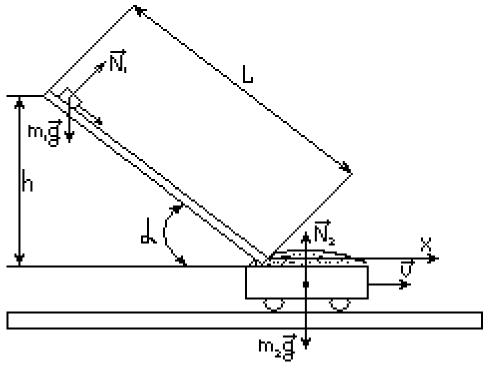

Рисунок 2.5 – Силы, действующие на тележку и ящик

Поэтому применить закон сохранения импульса к системе ящик – тележка нельзя. Но так как проекция суммы указанных сил на направление оси *x*, совпадающей с направлением рельс, равна нулю, то составляющую импульса системы в этом направлении можно считать постоянной, т.е.:

$$P_{1x} + P_{2x} = P_{1x}^{`} + P_{2x}^{`}, \qquad (1)$$

где P_{1x} и P_{2x} – проекции импульса ящика и тележки с песком в момент падения ящика на тележку;

$P_{1x}^{`}$и $P_{2x}^{`}$– те же величины после падения ящика.

Выразим в равенстве (1) импульсы тел через их массы и скорости, учитывая, что $P_{2x}^{`} = 0$ (тележка до взаимодействия с ящиком покоилась), а также то, что после взаимодействия оба тела системы движутся с одной и той же скоростью u:

$$m_1 v_{1x} = (m_1 + m_2) \cdot u \text{ или } m_1 v_1 \cos\alpha = (m_1 + m_2) \cdot u,$$

где v_1 – скорость ящика перед падением на тележку; $v_{1x} = v_1 \cos\alpha$ – проекция этой скорости на ось x.

Отсюда выразим искомую скорость:

$$u = \frac{m_1 v_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2}. \qquad (2)$$

Скорость v определим из закона сохранения энергии:

$$m_1 g h = \frac{m_1 v_1^2}{2},$$

где $h = l \cdot \sin\alpha$.

После сокращений на m_1 найдём:

$$v_1 = \sqrt{2gl\sin\alpha}.$$

Подставив найденные выражения V_1в формулу (2), получим:

$$u = \frac{m_1\sqrt{2gl\sin\alpha}\cdot\cos\alpha}{m_1+m_2}.$$

Подставим сюда числовые значения величин и проведём вычисления:

$$u = \frac{15\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 2\cdot\sin 30}\cdot\cos 30}{15+60} = 0{,}7 \text{ м/с}.$$

Ответ: $u = 0{,}7$ м/с.

Пример №3. На спокойной воде пруда перпендикулярно к берегу и носом к нему стоит лодка массой $M = 240$ кг и длиной $l = 3$ м, на корме стоит человек массой $m = 60$ кг. На какое расстояние S удалится лодка от берега, если человек перейдет с кормы на нос лодки? Силами трения пренебречь.

Дано:
$M = 240$ кг,
$l = 3$ м,
$m = 60$ кг.
Найти: $S = ?$

Решение. Согласно следствию закона сохранения импульса, внутренние силы системы тел не могут изменять положения центра масс системы. Применяя это следствие к системе «человек – лодка», можно считать, что при перемещении человека по лодке центр тяжести системы C не изменяет своего положения, т.е. остаётся на прежнем расстоянии от берега (рисунок 2.6).

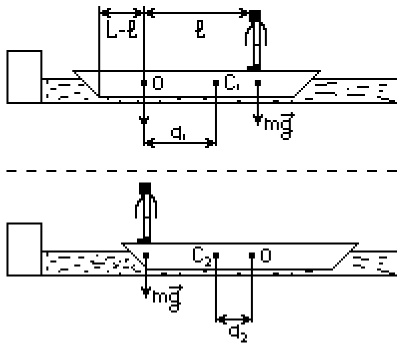

Рисунок 2.6 – Расположение точки O в начальный момент, находящийся на расстоянии a_1 и после перехода человека на расстояние a_2

Пусть центр тяжести системы человек – лодка находится на вертикали, проходящей в начальный момент через точку C_1 лодки, а после перемещения лодки через другую её точку C_2. Так как эта вертикаль неподвижна относительно берега, то искомое перемещение S лодки относительно берега равно перемещению лодки относительно вертикали. А последнее легко определить по перемещению центра тяжести O лодки. В начальный момент точка O находится на расстоянии a_1 слева от вертикали, а после перехода человека на расстояние a_2 справа от неё (см. рисунок 2.6).

Следовательно, искомое перемещение лодки:

$$S = a_1 + a_2. \quad (1)$$

Для определения a_1 и a_2 воспользуемся тем, что относительно центра тяжести системы моменты сил тяжести лодки и человека равны.

Для точки C_1 получим:

$$Mga_1 = mg(l - a_1), a_1 = \left(\frac{m}{M} + m\right) \cdot l.$$

Для точки C_2:

$$Mga_2 = mg(L - a_2 - l), a_2 = \frac{m}{M+m}(L - l).$$

Подставляем значения a_1 и a_2 в формулу (1), получим

$$S = \frac{m}{M+m}L = \frac{60}{240+60} \cdot 3 = 0{,}6 \text{ м}.$$

Ответ: $S = 0{,}6$ м.

Пример №4. Из пружинного пистолета выстрелили пулькой, масса которой $m = 5$ г. Жёсткость пружины $k = 1{,}4$ кг/м, пружина была сжата на $\Delta l = 8$ см. Определить скорость пульки, вылетевшей из пистолета.

Дано:
$m = 5$ г,
$k = 1{,}4$ кг/м,
$\Delta l = 8$ см.
Найти: $v = ?$

Решение. Воспользуемся законом сохранения энергии в механике. При зарядке пистолета сжимается пружина и совершается работа A_1. При выстреле потенциальная энергия пружины переходит в кинетическую энергию T_2 пули

$$A_1 = T_2. \qquad (1)$$

Найдём A_1. Сила, F сжимающая пружину, является переменной: в каждый момент она по направлению противоположна силе упругости F_y и численно равна ей. Сила упругости, возникающая в пружине при её деформации, определяется по закону Гука:

$$F_y = k \cdot x,$$

где x – абсолютная деформация пружины

Работу переменной силы вычисляем как сумму элементарных работ. Элементарная работа при сжатии пружины на dx выражается формулой

$$dA_1 = Fdx, \text{ или } dA_1 = kx \cdot dx.$$

Интегрируя от 0 до x, получим:

$$A_1 = k\int_0^x xdx = \frac{1}{2}kx^2. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия пули определяется по формуле:

$$T_2 = \frac{mv^2}{2}, \qquad (3)$$

$$x = \Delta l. \qquad (4)$$

Подставим в формулу (1) выражение A_1 из (2) и T_2 из (3), найдем

$$\frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{mv^2}{2},$$

откуда $v = \Delta l\sqrt{\frac{k}{m}} = 8\cdot10^{-2}$ м$\sqrt{\frac{1{,}25\cdot10^{3}\frac{\text{Н}}{\text{м}}}{5\cdot10^{-3}\text{ кг}}} = 8\cdot10^{-2}\cdot0.5\cdot10^{3}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right) = 40\text{м/с}$.
Ответ: $v = 40$ м/с.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте первый закон Ньютона.
2. Какие системы отсчета называют инерциальными и какие неинерциальными?
3. Сформулируйте второй закон Ньютона.
4. Сформулируйте третий закон Ньютона.
5. В чем состоит закон всемирного тяготения?
6. В чем состоит закон Гука? Что называют жесткостью пружины и от чего она зависит?
7. Какое трение называют сухим, и какое – жидким?
8. Что называют импульсом тела и импульсом силы? В каких единицах они измеряются?
9. Сформулируйте закон сохранения импульса системы материальных точек.
10. Как подсчитывается работа постоянной силы и работа переменной силы?
11. Что называют мощностью?
12. Что такое энергия? Какие виды механической энергии вы знаете?
13. Что называют кинетической и потенциальной энергией тела?
14. По какому признаку делятся удары тел на абсолютно упругие и абсолютно неупругие?

3. МЕХАНИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА

При изучении динамики вращательного движения материальных тел необходимо ввести новые динамические характеристики, такие как:

– момент силы M;

–момент инерции J;

– момент импульса L.

Действительно, сравнивая поступательное движение с вращательным, нетрудно заметить, что не всякая сила, приложенная к телу, вызовет его вращение. Например, открыть дверь не удается, если прикладывать силу на ось вращения или вдоль оси. Следовательно, результат действия силы будет определяться местом приложения силы на тело относительно оси вращения.

3.1. Момент силы

Определим понятие *момента силы*. Под моментом силы относительно точки O (рисунок 3.1) в механике понимают векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O в точку приложения силы, на силу $\vec{F}$:

$$\vec{M} = \left|\vec{r} \cdot \vec{F}\right|. \quad (3.1)$$

Численное значение момента силы может быть определено как произведение силы $\vec{F}$ на плечо l. Плечо l – это кратчайшее расстояние от оси вращения до направления действующей силы, т.е. это длина перпендикуляра, опущенного от оси вращения на линию действия силы. Если линия действия силы не перпендикулярна радиусу-вектору $\vec{r}$, то плечо может быть выражено как $l = r \cdot sina$.

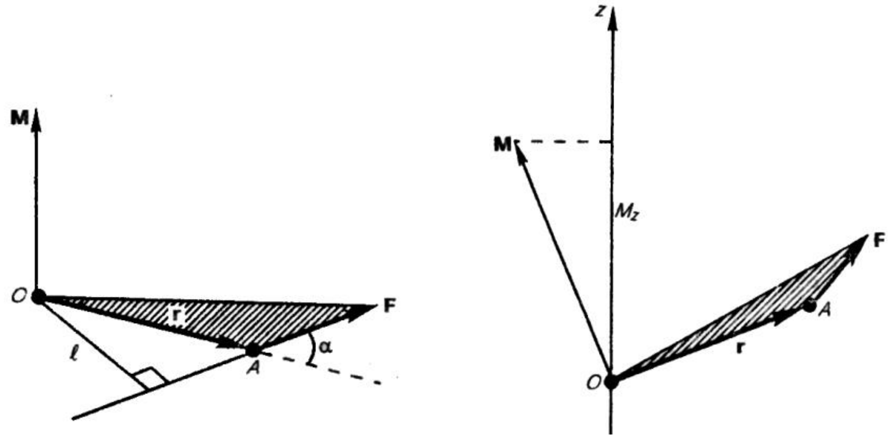

Рисунок 3.1 – Направление момента силы

3.2. Момент инерции

Мерой инертности (инерции) вращающегося тела является момент инерции, равный сумме произведений элементарных масс m_i на квадрат их расстояний r_i^2 от оси вращения

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \quad (3.2)$$

Как следует из уравнения (3.2), момент инерции тела зависит от его массы и от распределения этой массы относительно оси вращения.

Момент инерции сплошного тела может быть определен по формуле

$$I = \int_V r_i^2 \cdot dm, \quad (3.3)$$

где интегрирование осуществляется по всему объему V тела.

Применение уравнения (3.3) к некоторым однородным телам правильной геометрической формы позволяет получить уравнения для вычисления их моментов инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести (масс).

Для материальной точки (шарика), вращающейся вокруг оси, и тонкого обруча (кольца) относительно оси, совпадающей с его геометрической осью:

$$I = m \cdot R^2. \quad (3.4)$$

Для сплошного цилиндра (диска, платформы) радиусом R относительно оси, совпадающей с его геометрической осью:

$$I = \frac{1}{2} m \cdot R^2. \quad (3.5)$$

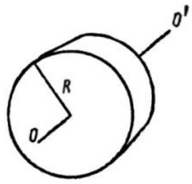

Рисунок 3.2 – Сплошной цилиндр радиусом R относительно оси OO'

Для шара относительно оси, проходящей через его центр:

$$I = \frac{2}{5} m \cdot R^2. \qquad (3.6)$$

Для стержня длиной l относительной оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину:

$$I = \frac{1}{12} m \cdot l^2. \qquad (3.7)$$

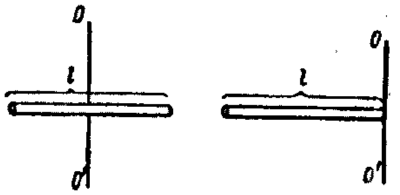

Рисунок 3.3 – Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню, проходящей через его середину и конец

Теорема Штейнера. Если необходимо определить момент инерции тела относительно произвольной оси, применяют теорему Штейнера – *момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции-* I_0 *относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния* a *между осями:*

$$I = I_0 + ma^2. \qquad (3.8)$$

В качестве примера получим формулу для вычисления момента инерции стержня l относительно оси, перпендикулярной и проходящей через один из его концов (рисунок 3.3б). Расстояние $a = \frac{l}{2}$, момент инерции стержня относительно оси OO', проходящей через центр инерции $I_0 = \frac{1}{12} m \cdot l^2$, а момент инерции стержня относительно оси OO_1:

$$I = I_0 + ma^2 = \frac{1}{12} m \cdot l^2 + m\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{3} m \cdot l^2. \qquad (3.9)$$

Момент инерции любых тел можно определить экспериментально, представляя им возможность вращаться или совершать свободные колебания в результате действия известного момента сил и измеряя приобретенное ими ускорение или оценивая период их колебаний.

3.3. Основной закон динамики вращательного движения

С введением понятия момента силы и момента инерции второй закон Ньютона для вращательного движения можно записать в такой форме:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}. \qquad (3.10)$$

Данное уравнение носит *название основного закона (уравнения) динамики вращательного движения абсолютно твердого тела.*

Вектор $\vec{M}$– аксиальный вектор, расположенный на оси вращения. Направление вектора $\vec{M}$ определяется по правилу «правого винта», при этом вращение ручки по часовой стрелке должно совпадать с направлением действия силы.

3.4. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Моментом импульса материальной точки относительно оси называют векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$ на импульс $m\vec{v}$:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot m \cdot \vec{v}]. \tag{3.11}$$

Вектор $\vec{L}$ направлен по оси вращения и образует с векторами $\vec{r_i}$ и $m\vec{v}$ правовинтовую систему (рисунок 3.4).

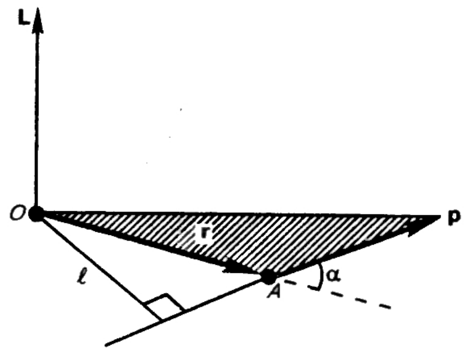

Рисунок 3.4 – Направление момента силы

Величина (модуль) $\vec{L}$ равна произведению импульса материальной точки на длину перпендикуляра, опущенного из точки, лежащей на оси, в плоскости вращения, на направление вектора скорости, то есть $L = mvr,$ но $v = \omega \cdot r,$ поэтому $L = m\omega r^2$. Момент импульса тела равен сумме моментов и импульсов составляющих его точек:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \omega \cdot r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = I_z \omega. \tag{3.12}$$

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения абсолютно твердого тела (3.10), произведя замену $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$:

$$M = I \cdot \varepsilon = I \frac{d\omega}{dt}.$$

Момент инерции I при вращении абсолютно твердого тела не изменяется $(I = const)$, поэтому I можно ввести под знак дифференциала и записать:

$$M = \frac{d}{dt}(I \cdot \omega) \text{ или } M \cdot dt = d(I \cdot \omega). \tag{3.13}$$

Импульс момента силы равен изменению момента импульса вращающегося тела.

Для замкнутой системы тел суммарный момент внешних сил равен нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(I_i \omega_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} (I_i \omega_i) = 0.$$

Очевидно, что при этом

$$\sum_{i=1}^{n} I_i\omega_i \ = \ const. \qquad (3.14)$$

Момент импульса замкнутой системы не изменяется – закон сохранения момента импульса. Существуют аналоги между формулировками уравнений законов сохранения импульса и момента импульса.

3.5. Кинетическая энергия

Определим работу, совершаемую моментом сил M при поворачивании тела на определенный угол φ вокруг неподвижной оси $OO^{'}$ (рис.3.5). Пусть к твердому телу приложена сила F, касательная к траектории точки приложения, момент которой относительно оси $OO^{'}$ равен $M = F \cdot r$.

Полная кинетическая энергия вращающегося тела равна сумме кинетических энергий составляющих его материальных точек:

$$W_k \ = \ \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Скорости v_i различных точек тела при вращении различны, но угловая скоростьω одинакова для всех точек. Из кинематики известно, что $v_i = \omega r_i$, следовательно: $W_k^{\text{вр}} \ = \ \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2 \vec{r}_i^2}{2} = \ \frac{\vec{\omega}^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i^2.$

Поскольку $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 \ = I$– момент инерции тела, тогда

$$W_k^{\text{вр}} \ = \ \frac{I \cdot \vec{\omega}^2}{2}. \qquad (3.15)$$

Если абсолютно твердое тело совершает сложное движение, которое можно представить как результат сложения двух движений: поступательного и вращательного движений центра масс, то его полная кинематическая энергия будет равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений:

$$W_k \ = \ W_k^{\text{вр}} + W_k^{\text{пост}} \ = \ \frac{I_c \cdot \vec{\omega}^2}{2} + \frac{m\vec{v}_c^2}{2}. \qquad (3.16)$$

В качестве примера сложного движения рассмотрим качание однородного диска (сложного цилиндра) массой m (см. рисунок 3.5).

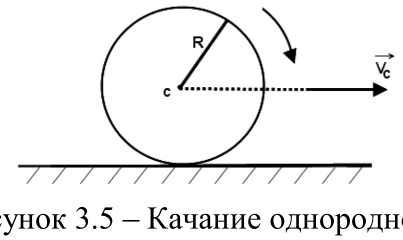

Рисунок 3.5 – Качание однородного диска

Момент инерции этого диска относительно оси O равен $I = \frac{1}{12} m \cdot R^2$, тогда $W_k \ = \ \frac{I_c \cdot \vec{\omega}^2}{2} + \frac{m\vec{v}_c^2}{2} \ = \ \frac{mR^2\vec{\omega}^2}{4} + \frac{m\vec{V}_c^2}{2}$, заменяя $\vec{\omega} \ = \ \frac{\vec{v}_c}{R}$, получим

$$W_k \ = \ \frac{m\vec{v}^2}{4} + \frac{m\vec{v}^2}{2} \ = \ \frac{3}{4} m\vec{v}_c^2. \qquad (3.17)$$

3.6. Работа и мощность

При вращении абсолютно твердого тела под действием силы F, касательной к траектории движения, материальная точка A проходит за малый промежуток времени dt элементарный путь dS (рисунок 3.6), и при этом совершается элементарная работа $dA = F \cdot dS$.

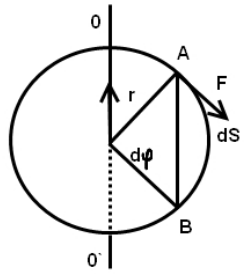

Рисунок 3.6 – Вращение твердого тела под действием силы $\vec{F}$ за промежуток времени dt

Но $ds = r \cdot d\varphi$, где r– радиус окружности, по которой движется точка A, а $dA = F \cdot r d\varphi = M \cdot d\varphi$.

Полная работа, совершаемая при повороте от углаφ_1 до углаφ_2, равна:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dA = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi, \quad (3.18)$$

при $M = const$ $A = M \cdot \Delta\varphi$.

Мощность, развиваемая при вращении твердого тела, определяется по формуле:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{M d\varphi}{dt} = M\omega. \quad (3.19)$$

Аналогии между характеристиками и формулами поступательного и вращательного движений

Поступательное движение	Вращательное движение
Масса m	Момент инерции I
Сила $\vec{F}$	Момент силы $M = F \cdot l$
Импульс тела $P = m \cdot v$	Момент импульса $L = I \cdot \omega$
Второй закон Ньютона $F = ma$ или $F = \frac{d(mv)}{dt}$	***Второй закон Ньютона*** $M = I \cdot \varepsilon$ $M = \frac{d}{dt}(I \cdot \omega)$
Кинетическая энергия $W_k = \frac{mv^2}{2}$	***Кинетическая энергия*** $W_k = \frac{I\,\omega^2}{2}$
Работа	***Работа***

$A = \int_0^r FdS$ **_Мощность_** $N_{\text{мг}} = F \cdot v$ **_Закон сохранения импульса_** $\sum_{t=1}^{n} m_i v_i = const$	$A = \int_0^{\varphi} Md\varphi$ **_Мощность_** $N_{\text{мг}} = M \cdot \omega$ **_Закон сохранения момента импульса_** $\sum_{i=1}^{n} L_i = const$

Пример №1. Через блок, выполненный в виде колеса, перекинута нить, к которой привязаны грузы массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 300$ г. Массу колеса $M = 200$ г считать равномерно распределённой по ободу, массой спиц пренебречь. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы.

Дано:
$m_1 = 100$ г,
$m_2 = 300$ г,
$M = 200$ г.
Найти: $a = ?$

Решение. Воспользуемся основными уравнениями динамики поступательного и вращательного движений. Для этого рассмотрим силы, действовавшие на каждый груз в отдельности и на блок (рисунок 3.7).

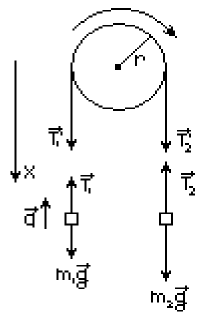

Рисунок 3.7 – Силы, действующие на каждый груз в отдельности и на блок

На первый груз действуют две силы: сила тяжести m_1g и сила упругости T_1. Спроектируем эти силы на ось x, которую направим вертикально вниз (рисунок 3.7).

Напишем уравнение движения (второй закон Ньютона) в координатной системе:

$$m_1\mathrm{g} - T_1 = m_1 a. \qquad (1)$$

Уравнение движения для второго груза запишем аналогично:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a. \quad (2)$$

Под действием двух моментов $T_1 r$ и $T_2 r$ относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа, блок приобретает угловое ускорение $\beta = \frac{a}{r}$. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения:

$$T_1 r - T_2 r = I\beta, \quad (3)$$

где $I = \frac{1}{2} M r^2$– момент инерции блока (диска) относительно оси z.

Сила T_2 согласно третьему закону Ньютона по абсолютному значению равна силе T_2.

Соответственно сила T_1 по абсолютному значению равна силе T_2. Воспользовавшись этим, подставим в уравнение (3) вместо T_1 и T_2 выражения T_1 и T_2, получив их предварительно из уравнений (1) и (2):

$$(m_1 g - m_2 a)r - (m_1 g + m_2 a)r = \frac{1}{2} M r^2 \left(\frac{a}{r}\right).$$

После сокращений на r и перегруппировки членов найдём a:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M} \cdot g = \frac{300 - 100}{300 + 100 + \frac{1}{2} 200} \cdot 9{,}8 = 3{,}92 \text{ м}/c^2.$$

Ответ: $a = 3{,}92 \text{ м}/c^2$.

Пример №2. Маховое колесо, момент инерции которого $I = 245$ кг $\cdot$ м^2, раскручен до частоты вращения $n = 20$ об/с и затем представлен самому себе. Через время $t = 1$ мин вследствие трения колесо остановилось. Найти момент сил трения $М_{тр}$, считая его постоянным, и число оборотов N, которое сделало колесо до полной остановки.

Дано:
$I = 245$ кг $\cdot$ м^2,
$n = 20$ об/с,
$t = 1$ мин
Найти: $М_{тр} = ?\ N = ?$

Решение. Для решения задачи воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения в виде:

$$dL_z = M_{тр} dt, \quad (1)$$

где dL_z– изменение момента импульса маховика, вращающегося относительно оси z, совпадающей с геометрической осью маховика, за интервал времени $dt; M_{тр}$ – момент внешних сил (в нашем случае момент сил трения), действующих на маховик относительно той же оси.

Так как момент сил трения постоянный, то интегрирование уравнения (1) приводит к выражению:

$$\Delta L_z = M_{тр} \Delta t. \quad (2)$$

При вращении твёрдого тела относительно неподвижной оси изменяется момент импульса

$$\Delta L_z = I_z \Delta\omega, \quad (3)$$

где I_z – момент инерции маховика относительно оси z;

$\Delta\omega$ – изменение угловой скорости маховика.

Приравняв правые части равенства (2) и (3), получим:

$$\mathrm{M}_{\text{тр}}\Delta t = I_z\Delta\omega,$$

отсюда:

$$M_{\text{тр}} = \frac{I_z\Delta\omega}{\Delta t}. \qquad (4)$$

Изменение угловой скорости $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ выразим через конечную n_2 и начальную n_1 частоты вращения, пользуясь соотношением $\omega = 2\pi n$:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi(n_2 - n_1).$$

Подставив в одну формулу (4) найденные выражения I_z и $\Delta\omega$, получим:

$$\Delta M_z = \frac{2\pi I_z(n_2 - n_1)}{\Delta t}, \qquad (5)$$

$$M_z = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 245\ \text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot(0 - 20\ \text{об/с})}{60\ c} = -256{,}44\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Знак минус показывает, что силы трения оказывают на маховик тормозящее действие.

Для определения числа оборотов до полной остановки колеса запишем уравнение кинематики в виде

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad (6)$$

где $\varphi = 2\pi N -$ угол поворота; $\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} -$ угловое ускорение.

Тогда, подставляя известные величины в выражение (6), имеем

$$2\pi N = \frac{2\pi n t^2}{2t}.$$

Отсюда следует

$$N = \frac{nt}{2} = \frac{20}{2}\cdot 60 = 600\ \text{об}.$$

Пример №3. Платформа (горизонтальная) массой $m = 80$ кг и радиусом $r = 1$ м вращается с частотой $n = 20$ об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой n будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от $I_1 = 2{,}94$ до $I_2 = 0{,}98\cdot\text{кг}\cdot\text{м}^2$?

Считать платформу однородным диском.

Решение. Платформа вращается по инерции. Следовательно, момент внешних сил относительно оси вращения z, совпадающей с геометрической осью платформы, равен нулю.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому:

$$I_z = I_1 + I_2,$$

где I_1 – момент инерции человека с поднятыми руками;

I_2– момент инерции человека с опушенными руками;

I_z– момент инерции платформы.

Момент инерции платформы $I = \frac{1}{2}mr^2$.

Момент импульса L_z системы платформа – человек остаётся постоянным:

$$L_z = I_z \cdot \omega = const. \tag{1}$$

С учётом этого равенство (1) примет вид:

$$(I + I_2) \cdot \omega = const \text{ или } (I_1 + I_2) \cdot \omega = (I + I_2)\omega. \tag{2}$$

Подставим в формулу (2) найденные выражения моментов инерции, а также выразим начальную угловую скорость вращения платформы с человеком с вытянутыми руками через частоту вращения $n_1 (\omega_1 = 2\pi n_1)$ и с опущенными руками через частоту вращения n_2 $(\omega_2 = 2\pi n_2)$:

$$\left(\frac{1}{2}mr^2 + I_1\right) \cdot 2\pi n_1 = \left(\frac{1}{2}mr^2 + I_2\right) 2\pi n_2.$$

После сокращений на 2π и простых преобразований получим:

$$n_2 = \frac{\left(\frac{1}{2}mr^2 + J_1\right)n_1}{\frac{1}{2}mr^2 + J_2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot 80 \cdot 1^2 \cdot 2{,}94\right)}{\frac{1}{2}\cdot 80 \cdot 1^2 + 0{,}98} \frac{\text{об}}{\text{с}} = 0{,}35 \text{ об/с},$$

$$n_1 = 20 \frac{\text{об}}{\text{мин}} = \frac{1}{3} \text{ об/с}.$$

Вопросы для самопроверки

1.Что называют моментом силы относительно оси?

2.Выведите основной закон динамики вращательного движения твердого тела около неподвижной оси.

3.Что называется моментом инерции тела относительно оси?

4.Сформулируйте теорему Штейнера.

5.Что называется моментом импульса тела относительно оси?

6.Выведите формулу для кинетической энергии тела, вращающегося около неподвижной оси.

7.Покажите, что полная кинетическая энергия движущегося шара состоит из кинетической энергии его поступательного движения и кинетической энергии вращения около оси, проходящей через центр масс.

8.Сформулируйте закон сохранения момента импульса тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

4. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ (ГИДРОАЭРОМЕХАНИКА)

4.1. Элементы механики жидкостей и газов

Раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействия между собой и обтекаемыми ими твёрдыми телами, называется гидроаэромеханикой.

Жидкость и газ по своим свойствам отличаются от твердого тела. Если твёрдое тело обладает определённым объёмом, формой (при неизменных внутренних условиях), то жидкость обладает лишь определённым объёмом, не имея собственной формы, а газ не имеет ни собственного объёма, ни собственной формы. Твёрдое тело обладает упругостью и малой деформацией любого вида. Жидкость упруга лишь к деформации всестороннего сжатия и растяжения, а газ– только к деформации всестороннего сжатия. Жидкость и газ не проявляют упругих свойств к деформации сдвига (модуль сдвига равен нулю). То есть при параллельном смещении одного слоя жидкости (газа) относительно другого не возникают силы упругости, пропорциональные относительному смещению слоёв, которые вернули бы сдвинутый слой в первоначальное положение. Отсутствие таких сил обусловливает особую подвижность слоёв (частиц) жидкости, именуемой текучестью. Внутреннее трение между слоями в той или иной степени уменьшает текучесть жидкости, но не уничтожает её совсем.

Любой объём, выделенный внутри жидкости, взаимодействует с остальной жидкостью (или со стенками сосуда) через ограничивающую его поверхность. Силы взаимодействия всегда перпендикулярны к этой поверхности (или стенкам сосуда).

Реальные жидкости и газы обладают сжимаемостью и внутренним трением (вязкостью). При изучении движения жидкости и газов одновременный учёт этих свойств сильно усложняет задачу. Поэтому для установления общей картины движения жидкости используют модель,называемую идеальной жидкостью. *Идеальная жидкость не имеет вязкости и несжимаема.*

4.2. Давление в жидкости и газе. Законы Паскаля и Архимеда

Свойства жидкостей и газов во многом отличаются, но в ряде механических явлений их поведение определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями.

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади, называется *давлением*

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \tag{4.1}$$

Единица давления – *Паскаль*. $[1\text{Па}] = \left[1\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right]$.

Давление при равновесии жидкостей (газов) подчиняется закону Паскаля: *давление в любом месте, внутри покоящейся жидкости или газа одинаково по всем направлениям; внешнее давление передаётся жидкостью (или газом) одинаково по всему объёму.*

Если жидкость несжимаема (идеальная жидкость), то её плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении S столба жидкости, его высоте h и плотности ρ сила тяжести жидкости определяется как

$$F_T = \rho g S h,$$

а давление на нижнее основание

$$\text{p} = \frac{F_T}{S} = \frac{\rho \text{g} S h}{S} = \rho \text{g} h. \tag{4.2}$$

$\text{p} = \rho \text{g} h$ называют гидростатическим давлением.

На тело, погруженное в жидкость, действует сила, определяемая законом Архимеда.

На всякое тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости выталкивающая сила, направленная вверх, равная весу вытесненной телом жидкости (газа):

$$F_A = \rho_ж g V, \tag{4.3}$$

где $\rho_ж$ – плотность жидкости;

V– объём вытесненной жидкости погружённым в нее телом.

Архимедова сила есть результат неодинакового давления жидкости на равные участки поверхности погружённого тела: давление, которое жидкость оказывает на нижние части тела, больше давления на верхние части. При этом весьма существенной является замкнутость поверхности соприкосновения тела с жидкостью.

4.3. Кинематика стационарного движения жидкости

Движение жидкостей называется течением, а совокупность частиц движущейсяжидкости – *потоком.*

Графически движение жидкостей изображается *линиями потока,* которые совпадают по направлению с вектором скорости жидкости (рисунок 4 .1).

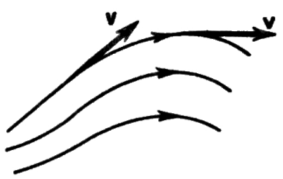

Рисунок.4.1 – Линии тока

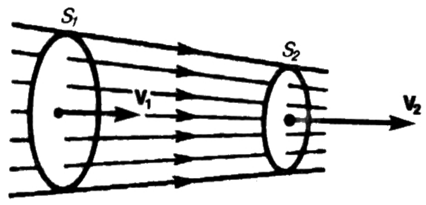

Рисунок 4.2 – Трубка тока

Движение жидкости, при котором картина линии тока и значения скоростей в каждой её точке не изменяются, называется *установившимся, или стационарным.*В противном случае движение называется неустановившимся или нестационарным.При установившемся движении линии тока являются в то же время траекториями движения частиц жидкости.

Для изучения стационарного движения всего потока жидкости целесообразно мысленно разбить его на так называемые трубки тока и изучить движение в каждой такой трубке. Трубкой тока называют объём жидкости, ограниченный линиями тока (рисунок 4.2).Рассмотрим какую-либо трубку тока идеальной жидкости с сечениями S_1и S_2.

За время Δt через любое сечение S проходит объём жидкости, равный $V = Sv\Delta t.$ Значит за 1 секунду через сечение S_1 пройдёт объём жидкости $S_1 v_1$, где v_1– скорость течения жидкости в сечении S_1. Через сечение S_2 за 1 секунду пройдёт объём жидкости $S_2\ v_2$, где v_2– скорость течения жидкости в сечении S_2.

Если жидкость *несжимаемая* – идеальная жидкость, то через сечение S_2 пройдёт такой же объём жидкости, как и через сечение, S_1 т.е. имеет место равенство

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = const. \tag{4.4}$$

Произведение скорости течения несжимаемой, идеальной жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока.

Соотношение (4.4) называется *уравнением неразрывности* для несжимаемой жидкости. Из уравнения неразрывности (4.4) следует, что скорость движения жидкости больше в тех местах, где меньше его сечение.

Уравнение неразрывности на практике применяют строители плотин. Перед окончательным перекрытием плотины в узком месте поток воды настолько сильный, что свободно сносит многотонные глыбы.

4.4. Уравнение Бернулли

Рассмотрим в стационарно текущей идеальной жидкости наклонную трубку тока (рисунок 4.3), ограниченную сечениями S_1 и S_2, по которым движется жидкость в направлении слева направо, соответственно со скоростью v_1 и v_2. Обозначим давление жидкости в сечениях соответственно через p_1 и p_2, а высоту сечений, как h_1 и h_2.

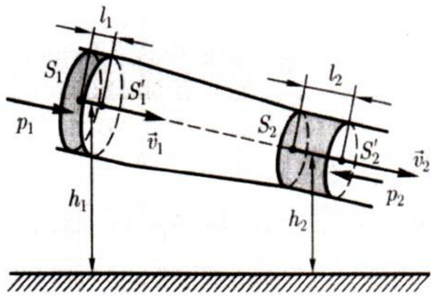

Рисунок 4.3 – Трубка тока

За малый промежуток времени Δt жидкость перемещается от сечения S_1 к сечению $S_1^/$, от S_2 к сечению $S_2^/$. Изменение полной механической энергии $\Delta W = W_2 - W_1$, согласно закону сохранения энергии, равно работе A внешних сил по перемещению массы m жидкости:

$$\Delta W = A, \tag{4.5}$$

где W_1 и W_2 – полные энергии жидкости массой m в местах сечений S_1 и S_2 соответственно.

Полные энергии складываются из кинетической и потенциальной энергий массы m жидкости:

$$W_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1, \tag{4.6}$$

$$W_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2. \tag{4.7}$$

Работа внешних сил по перемещению массы m жидкости

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2, \tag{4.8}$$

где $F_1 = p_1 S_1$ и $F_2 = -p_2 S_2$ (сила отрицательна, так как направлена в сторону, противоположную течению жидкости; см. рисунок 4.4); $l_1 = v_1 \Delta t$ и $l_2 = v_2 \Delta t$ – соответственно расстояния по перемещению сечений от S_1 до $S_1^/$ и S_2 до $S_2^/$.

Подставляя (4.6) – (4.8) в (4.5), получим

$$\frac{mv_1^2}{2}+mgh_1+p_1S_1v_1\Delta t=\frac{mv_2^2}{2}+mgh_2+p_2S_2v_2\Delta t. \qquad (4.9)$$

Согласно уравнению неразрывности для идеальной жидкости (4.4) ее объем остается постоянным, тогда разделив выражение (4.9) на $\Delta V=S_1v_1\Delta t=S_2v_2\Delta t$, получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2}+\rho gh_1+p_1=\frac{\rho v_2^2}{2}+\rho gh_2+p_2, \qquad (4.10)$$

где $\rho=m/V$ – плотность жидкости.

Так как сечения выбирались произвольно, то можно записать

$$\frac{\rho v^2}{2}+\rho gh+p=const. \qquad (4.11)$$

Выражение (4.11) называется ***уравнением Бернулли***.

Слагаемые в этом выражении называют соответственно: $\rho v^2/2$ – ***динамическим давлением***; ρgh – ***гидростатическим давлением***; ρ – ***статическим давлением***.

Для горизонтальной трубки тока $(h_1=h_2)$ выражение (4.11) принимает вид

$$\frac{\rho v^2}{2}+p=const, \qquad (4.12)$$

где $p_0=\dfrac{\rho v^2}{2}+p$ называется полным давлением.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется идеальной жидкостью?
2. Что такое давление в жидкости? Давление – величина векторная или скалярная? Какова единица давления в СИ?
3. Сформулируйте и поясните законы Паскаля и Архимеда.
4. Что называют линией тока? Трубкой тока?
5. Что характерно для установившегося течения жидкости?
6. Каков физический смысл уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости и как его вывести?
7. Выведите уравнение Бернулли.
8. Какое течение жидкости называется ламинарным? Турбулентным? Что характеризует число Рейнольдса?
9. Поясните практическое применение методов Стокса и Пуазейля.

5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

По физической природе колебания различают механические, электромеханические, электромагнитные, биологические и другие.

Главный признак колебания – *повторяемость движения.*

Колебательное движение – всякое движение или изменение состояния, характеризуемое той или иной степенью повторяемости во времени значений физических величин, которые определяют это движение или состояние.

5.1. Колебательное движение. Гармонические колебания

Механические колебания – пример особого вида механического движения, отличающегося периодичностью и ограниченностью в пространстве.

Для совершения механического колебательного движения необходимы два условия: наличие упругой или квазиупругой силы $\left(\vec{F}_{\text{упр}} \text{ или } \vec{F}_{\text{квази}}\right)$, направленной к положению равновесия, и система должна обладать инерцией.

Наиболее простой вид колебания – гармонический. При этом виде колебаний *характеристики колебания изменяются по закону синуса или косинуса.* Любая физическая система, совершающая гармонические колебания, называется *гармоническим осциллятором*.

В зависимости от силового воздействия колебания подразделяются на свободные, затухающие и вынужденные.

Колебания называются свободными (или собственными), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.

5.2. Кинематика и динамика гармонического колебательного движения

Кинематику колебательного гармонического движения можно проследить по изменению положения проекции (y, x) вращающегося шарика по окружности относительно точки O на оси Oy и Ox (рисунок 5.1). Положение проекции относительно оси Oy определяется по формуле

$$y = y_{max} \cdot \sin\varphi, \tag{5.1}$$

а на ось Ox – соотношением

$$x = x_{max} \cdot \cos\varphi. \tag{5.2}$$

Эти уравнения описывают гармоническое, колебательное движение проекций вращающегося шарика с частотой ω_0.

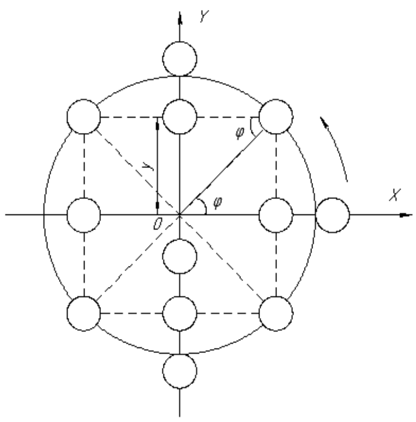

Рисунок 5.1 – Вращение шарика по окружности

К такому виду уравнений можно подойти, изучая динамику колебательного движения груза, подвешенного к упругой пружине (рисунок 5.2).

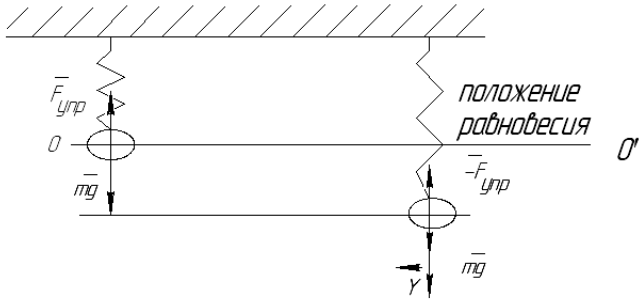

Рисунок 5.2 – Пружинный маятник

Колебания совершаются под действием $F_{упр.}$Согласно закону Гука

$$F_{упр} = -ky, \tag{5.3}$$

где –коэффициент упругости (жесткости) пружины; y – смещение (деформация) относительно положения равновесия.

По второму закону Ньютона:

$$F = ma. \tag{5.4}$$

Следовательно, приравнивая правые части уравнений (5.3) и (5.4), получим

$$ma = -ky, \text{ или } a = -\frac{ky}{m} \tag{5.5}$$

– уравнение динамики колебательного гармонического движения.

Если учесть, что $a = \frac{d^2y}{dt^2}$, то уравнение (5.5) можно представить в таком виде:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0. \tag{5.6}$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка гармонических колебаний.

Поскольку k и m– величины положительные и постоянные, их отношение $\left(\frac{k}{m}\right)$ обозначим через ω_0^2:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{5.7}$$

где ω_0– собственная (круговая) частота маятника.

Решение уравнения (5.1) для смещения yдает следующую функцию по времени:

$$y = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{5.8}$$

Выражение (5.8*) – уравнение гармонического,колебательного движения (уравнение кинематики). Кинематические характеристики:*

y – смещение – это линейное (или угловое) отклонение точки от положения равновесия;

$A = y_{max}$– максимальное значение смещения, называемое *амплитудой* колебания;

ω_0–*собственная круговая* (циклическая) частота.

Круговая частота ω_0 связана с линейной частотой ν соотношением

$$\omega_0 = 2\pi \cdot \nu = \frac{2\pi}{T}, \tag{5.9}$$

где ν – число полных колебаний, совершаемых в единицу времени,

T– период – время одного полного колебания, $T = \frac{1}{\nu}$;

φ_0–начальная фаза колебаний в момент времени $t = 0$;

$(\omega_0 t + \varphi_0) = \varphi$ – фаза колебаний (угловой путь к моменту времени t).

*Скорость колебания точки – это первая производная смещения (*5.8*) по времени.*

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (5.10)$$

Ускорение колебания точки – это первая производная скорости по времени, либо вторая производная смещения по времени.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi). \qquad (5.11)$$

На рисунке 5.3 представлены графики изменения кинематических характеристик (y, v, a) гармонического колебания со временем.

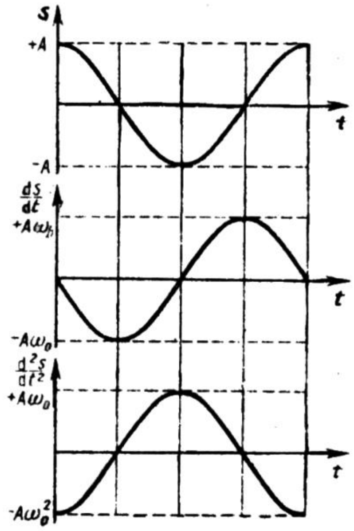

Рисунок 5.3 – Графики изменения кинематических характеристик (y, v, a) гармонического колебания со временем

5.3. Колебания пружинного, математического и физического маятников–примеры свободных гармонических колебаний

Пружинный маятник – система, состоящая из груза массой m, подвешенного на абсолютно упругой пружине и совершающего гармонические колебания под действием упругой силы $F_{упр}$ (рисунок 5.2).

Согласно закону Гука, $F_{упр} = -k \cdot y$, второму закону Ньютона $F = ma$, дифференциальное уравнение кинематики колебательного движения пружинного маятника может быть выражено как

$$m = \frac{d^2y}{dt^2} = -k \cdot y \to \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0,$$

где $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная циклическая (круговая) частота пружинного маятника.

Поскольку $\omega_0 = 2\pi \cdot \nu = \frac{2\pi}{T}$, то период пружинного маятника определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (5.12)$$

Физический маятник– система, состоящая из твердого тела, которое может колебаться около горизонтальной оси, не проходящей через центр масс, под действием момента силы тяжести (рисунок 5.4).

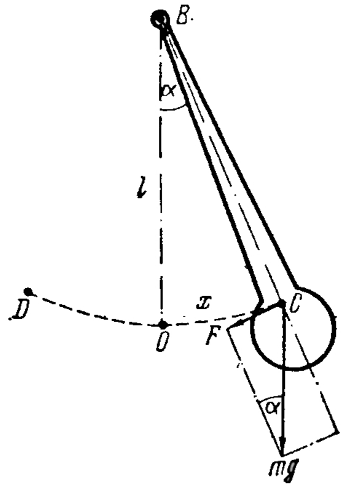

Рисунок 5.4 – Физический маятник

Физический маятник, отклоненный от положения равновесия на малый угол$\varphi = 5 - 7°$, под действием момента силы тяжести F_T возвращается в исходное положение. Роль возвращающей силы выполняет $F_{T,\tau} = -mg \cdot \sin\varphi$. Величина этой составляющей при малых отклонениях пропорциональна смещению тела от положения равновесия, т.е. она выполняет роль упругой силы и по этой причине такую силу называют *квазиупругой* (квази– псевдоложно). Несложные выводы позволяют определить вид уравнения движения физического маятника и период его колебания. Выразим $F_{T,\tau} = -mg\sin\varphi = -mg\varphi = -mg\frac{S}{l}$, при малых φ можно $\sin\varphi \approx \varphi = \frac{S}{l}$.

В соответствии с основным законом динамики вращательного движения момент возвращающей силы $F_{T,\tau}$ будет равен:

$M = I \cdot \varepsilon$ (по закону динамики);

$M = F_{T,\tau} \cdot l$ (по определению),

где l – плечо; ε– угловое ускорение; *I*– момент инерции тела.

Учитывая, что $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ и $S \approx \varphi \cdot l$, получим $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mg}{J}\varphi = 0$ или

$$\frac{d^2S}{dt} + \frac{mg \cdot l}{J}\varphi = 0. \quad (5.13)$$

Это дифференциальное уравнение гармонического колебания физического маятника.

Здесь $\frac{mg \cdot l}{J} = \omega_0^2 \to \omega_0 = \sqrt{\frac{mg \cdot l}{J}}$, откуда$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg \cdot l}{J}}$, (5.14) где ω_0– собственная частота физического маятника. Выражение для периода колебаний будет:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\cdot l}}. \tag{5.15}$$

Математический маятник представляет собой материальную точку (с точечной массой), колеблющуюся на невесомой и нерастяжимой нити (рисунок 5.5).

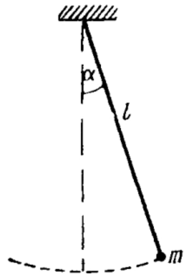

Рисунок 5.5 – Математический маятник

В данном случае колебание материальной точки совершается под действием силы $F_{T,\tau} = -mg\sin\varphi = -mg\frac{S}{l}$, которая является квазиупругой. Дифференциальное уравнение движения будет представлено в виде

$$\frac{d^2S}{dt} + \frac{g}{l}S = 0, \tag{5.16}$$

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2 \to \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{5.17}$$

где ω_0 – собственная частота колебания математического мятника, а период колебаний определится как

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{5.18}$$

Выражение (5.18) может быть получено из представления, что математический маятник является частным случаем физического маятника; предполагая, что вся масса сосредоточена в центре масс. В этом случае момент инерции математического маятника равен

$$I = m\cdot l^2. \tag{5.19}$$

Подставив это выражение в выражение (5.19), получим формулу для периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\,l^2}{m\,g\,l}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

На практике маятниками являются самые различные части зданий и даже целые сооружения (мосты, трубы, башни и т.п.). Останкинская телебашня (г. Москва) высотой 387 м совершает колебания, при которых её вершина отклоняется от оси на $4 - 5$ м. При вычислении периодов таких колебаний, естественно, учитываются особенности этих конструкций.

5.4. Энергия гармонических колебаний системы

Полная энергия колеблющейся системы (рисунок 5.2) складывается из энергии кинетической и потенциальной. В процессе колебаний величина каждой из них периодически меняется.

Кинетическая энергия колеблющего тела равна $W_k = \frac{mv^2}{2}$, где v– скорость тела в момент времени t.Она равна $v = \frac{d^2y}{dt^2} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Поэтому кинетическая энергия тела в произвольный момент времени равна

$$W_k = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (5.20)$$

Потенциальная энергия тела, совершающего гармонические колебания под действием упругой силы $F_{\text{упр.}} = -k \cdot y$, равна

$$W_n = \frac{k \cdot y^2}{2} = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (5.21)$$

где $k = m \cdot \omega^2$.

Таким образом, полная энергия колеблющейся системы есть сумма энергий

$$W = W_k + W_n = \frac{1}{2} m\, \omega_0^2 A^2 [cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{2} k\, A^2,$$

где $cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = 1$.

Тогда

$$W = \frac{1}{2} kA^2. \qquad (5.22)$$

Формула (5.22), полученная при рассмотрении частного случая колебания грузика на пружине, имеет универсальный характер и выражает закон сохранения механической энергии. Она показывает, что с течением времени энергия переходит из одной формы в другую, но полная энергия системы при этом сохраняется неизменной. Амплитуда таких колебаний остается постоянной, а сами колебания называют *незатухающими.*

Это консервативная система. В крайних положениях (максимальное отклонение от положения равновесия) полная энергия равна $W = W_{n.}$, а в момент прохождения равновесия полная энергия колеблющейся системы на $W = W_k$.

Из формулы (5.22) можно оценить соотношения амплитуд и частот колеблющихся систем.

Например: $W_1 = \frac{k_1 A_1^2}{2} = \frac{m_1 \omega_{01}^2 A_1^2}{2}$ и $W_2 = \frac{k_2 A_2^2}{2} = \frac{m_2 \omega_{02}^2 A_2^2}{2}$.
При условии $m = m_1 = m_2$ и $W = W_1 = W_2$ получим

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}. \qquad (5.23)$$

Таким образом, соотношение амплитуд обратно пропорционально отношению собственных частот колеблющихся систем.

5.5. Сложение гармонических колебаний

На практике часто можно встретиться с таким движением, при котором тело участвует одновременно в двух колебаниях. Например, груз на пружине подвешен к потолку вагона. В этом случае груз совершает колебания относительно точки подвеса, которая, в свою очередь, совершает колебания на рессорах вагона. Таким образом, груз будет совершать движение, складывающееся из двух колебаний *одного направления*. Может быть ситуация, когда тело участвует одновременно в двух колебаниях, направления которых *взаимно перпендикулярны.* Рассмотрим сложение таких колебаний.

5.5.1. Сложение колебаний одинакового направления и одинаковой частоты

Для сложения этих колебаний

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_{01}),$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_{02})$$

(при условии $T = T_1 = T_2$ или $\omega_0 = \omega_{01} = \omega_{02}$) воспользуемся геометрическим способом представления гармонических колебаний в виде вращающегося вектора амплитуды (метод векторных диаграмм) (рисунок 5.7).

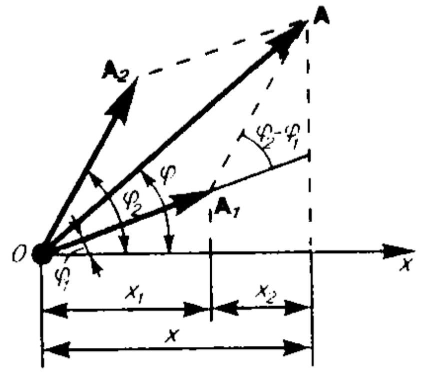

Рисунок 5.7 – Векторное сложение колебаний одинакового направления и одинаковой частоты

Отложим из точки O под углом φ_{01} вектор амплитуды $\vec{A}_1$ и под углом φ_{02} вектор амплитуды $\vec{A}_2$. Оба вектора вращаются с одинаковой частотой ω, поэтому разность начальных фаз $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01}$ все время остается неизменной. Результирующее колебание$x_1 + x_2 = x$ будет иметь тот же вид гармонического колебания $x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$,
где A – результирующая амплитуда, равная $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$; φ_0 –начальная фаза.

Численное значение результирующей амплитуды может быть определено по теореме косинусов из векторной диаграммы (рисунок 5.7)

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}, \qquad (5.24)$$

а для начальной фазы φ_0 имеем

$$tg\varphi_0 = \frac{A_1 \sin\varphi_{01} + A_2 sin\,\varphi_{02}}{A_1 \cos\varphi_{01} + A_2 cos\varphi_{02}}. \qquad (5.25)$$

Удобство метода векторных диаграмм особенно проявляется при сложении трех и более колебаний одного направления. При этом после сложения первых двух векторов и получения результирующего вектора к нему добавляется вектор, соответствующий третьему колебанию, и т.д. Из выражения (5.24) следует, что влияние на величину амплитуды результирующего колебания оказывает разность начальных фаз складываемых колебаний $(\varphi_{02} - \varphi_{01})$.

Если $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = 2\pi n$, где n = 0, 1, 2… (целые числа), то $A = A_1 + A_2$, т.е. происходит сложение амплитуд колебаний (max).

Если же $\Delta\varphi = (2\pi + 1)\pi$, то $A = A_1 - A_2$, т.е. амплитуды вычитаются, колебания гасят друг друга (min).

Если $\Delta\varphi = const$ со временем, то такие колебания называются *когерентными.*

5.5.2. Сложение гармонических колебаний, происходящих во взаимно-перпендикулярных направлениях

В качестве модели рассмотрим шарик, растянутый четырьмя пружинами с одинаковыми коэффициентами упругости. Предполагаем, что $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$, амплитуды и разности фаз различны. Уравнение движения по *OX* и *OY* запишем в виде

$$x = A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_{01}), \tag{5.26}$$

$$y = A_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_{02}). \tag{5.27}$$

Определим уравнение траектории движения шарика при различной разности фаз $\Delta\varphi$.

Случай 1. $\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi\ldots$

Например,

$$x = A_1 \sin \omega_0 t, \tag{5.28}$$

$$y = A_2 \sin \omega_0 t. \tag{5.29}$$

В этом случае, если поделить уравнение (5.28) на (5.29), получим $\frac{x}{y} = \frac{A_1}{A_2}$ или

$$y = \frac{A_1}{A_2} x. \tag{5.30}$$

Это уравнение прямой, проходящей через первый и третий квадранты в системе *OX-OY* (рисунок 5.8), т.е. шарик колеблется вдоль этой прямой со смещением *S*, определяемым как

$$S = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_1^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + A_2^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)} =$$

$$= \left(\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\right) \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\,. \tag{5.31}$$

Таким образом, уравнение (5.31) результирующего колебания при данных условиях ($\Delta\varphi$ = 0,2π, 4π…) является гармоническим с частотой ω_0 и амплитудой. $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$.

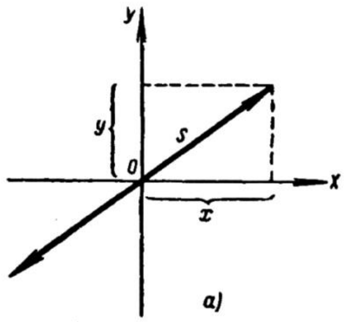

Рисунок 5.8 – Уравнение прямой, проходящей через
первый и третий квадранты

Случай 2. $\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi\ldots$

Например: $$x = A_1 \sin\omega_0 t, \quad (5.32)$$

$$y = A_2 \sin(\omega_0 t + \pi) = -A_2 \sin\omega_0 t. \quad (5.33)$$

Выполним ту же операцию, поделив (5.32) на (5.33):

$$\frac{x}{y} = -\frac{A_1}{A_2} \text{ или } y = -\frac{A_1}{A_2}x. \quad (5.34)$$

Это тоже уравнение прямой, но она расположена во втором и четвертом квадрантах (рисунок 5.9).

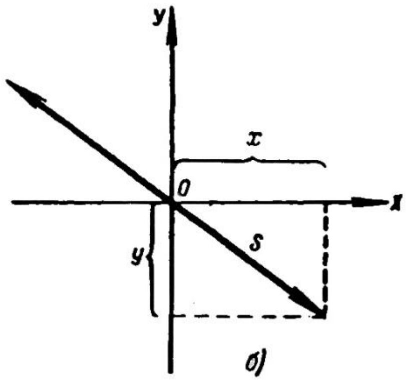

Рисунок 5.9 – Уравнение прямой, проходящей через второй и
четвертый квадранты

Смещение S шарика по этой прямой относительно центра O будет осуществляться по уравнению (5.31). Колебания, совершаемые в случаях 1 и 2, называютсялинейно-*поляризованными.*

Случай 3. $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, или $\frac{3}{2}\pi$ ...

Например: $$x = A_1 \sin\omega_0 t, \quad (5.35)$$

$$y = A_2 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = A_2 \cos\omega_0 t. \quad (5.36)$$

Выразим формулы (5.35) и (5.36) как

$$\frac{X}{A_1} = \sin\omega_0 t, \quad (5.37)$$

$$\frac{Y}{A_2} = \cos\omega_0 t. \quad (5.38)$$

Возведем полученные выражения в квадрат и сложим:

$$\frac{X^2}{A_1^2}+\frac{Y^2}{A_2^2} = sin^2\omega_0 t + cos^2\omega_0 t = 1, \text{ т. е.} \frac{X^2}{A_1^2}+\frac{Y^2}{A_2^2} = 1. \qquad (5.39)$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам A_1 и A_2 (рисунок 5.10).

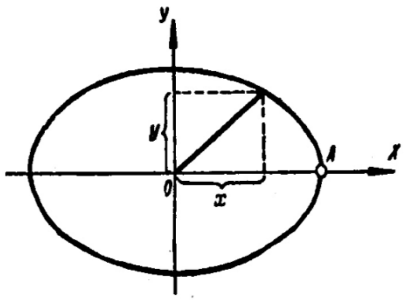

Рисунок 5.10 – Эллипс

Если $A_1 = A_2$, то эллипс выражается в окружность. Шарик движется по эллипсу или по окружности, при этом, если $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, то движение по часовой стрелке, а при условии $\Delta\varphi = \frac{3}{2}\pi$– движение против часовой стрелки. Такие колебания называются *циркуляционно-поляризованными*.

В общих случаях сложения взаимно-перпендикулярных колебаний колеблющаяся точка (тело) движется по кривым, называемым фигурами Лиссажу (рисунок 5.11).

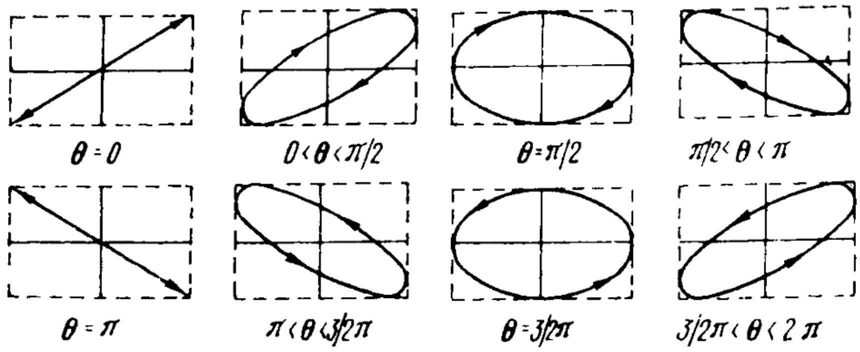

Рисунок 5.11 – Фигуры Лиссажу

Форма кривой зависит от соотношения амплитуд, частот и начальных фаз складываемых колебаний. По виду фигур можно определить отношение частот складываемых колебаний или определить неизвестную частоту по известной частоте. Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигуры Лиссажу с прямыми *MN* и *KL*, параллельными осям координат. Аналогично $\left[\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{N_y}{N_x}\right]$.

На рисунке 5.11 представлена такая фигура при $\omega_y = 2\omega_x$ и $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Пример №1. Точка совершает гармонические колебания. В начальный момент времени смещение точки $x = 5$ см, скорость её $v = 20$ м/с и ускорение $a = -80$ м/с^2. Найти циклическую частоту и период колебаний.

Дано:
$x = 5\,см$,
$v = 20$ м/с,
$a = -80$ см/с^2.
Найти: $\omega -?, T -?$

Решение. Уравнение колебания точки можно записать в виде:

$$x = Asin(\omega t + \varphi_1) \quad (1)$$

или

$$x = Acos(\omega t + \varphi_2), \quad (2)$$

где A – амплитуда колебания;
φ – циклическая частота;
t – время;
φ_1 и φ_2 –начальные фазы соответствий записи(1) или (2).

По условию задачи $x = 5$ см $= 0{,}05$ м; $v = 20$ м/с; $a = -80\,\frac{см}{с^2} = -0{,}8$ м/с^2.

По определению амплитуда колебаний: $x_{max} = A$.

По условию задачи:

$$x = Asin(\omega t + \varphi_1) = 0{,}05 \text{ м}. \quad (3)$$

Скорость колебаний точки равна производной смещения (1) по времени:

$$v\frac{dx}{dt} = \omega Acos\omega t = \omega Asin\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right) = 20 \text{ м/с}. \quad (4)$$

Ускорение колебаний точки равно производной скорости по времени:

$$a = \frac{dV}{dt} = \omega A\cos\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right) = \omega^2 A\sin(\omega t + \pi) = 0{,}8 \text{ м/с}^2. \quad (5)$$

Решая совместно (4) и (5), находим:

$$\omega = \frac{0{,}8}{0{,}05} = 16\,c^{-2}; \omega = 4\,c^{-2};$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \cdot \frac{3{,}14}{4} = 1{,}57\,c.$$

Ответ: $\omega = 4\,c^{-1}, T = 1{,}57\,c$.

Пример №2. Частица массой $m = 0{,}03$ кг. Совершает гармонические колебания с периодом $T = 4\,c$. Полная энергия колеблющейся частицы $E = 0{,}3$ МДж. Определить амплитуду A колебаний и наибольшее значение силы F_{max}, действующей на частицу.

Дано:
$m = 0{,}03$ кг,
$T = 4\,c$,
$E = 0{,}3$ МДж.
Найти: $A -?\ F_{max} -?$

Решение. Для определения амплитуды колебаний воспользуемся выражением полной энергии частицы:

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2.$$

Подставив сюда выражение $\omega = 2\pi/T$ и выразив амплитуду, получим:

$$A = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (1)$$

Подставим числовые значения величины и произведём вычисления:

$$A = \frac{4}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{2\cdot 3\cdot 10^{-4}}{3\cdot 10^{-2}}} = 0{,}090 \text{ м} = 90 \text{ мм}.$$

Так как частица совершает гармонические колебания, то сила, действующая на неё, является квазиупругой и, следовательно, может быть выражена соотношением $F = -kx$, где k– коэффициент квазиупругой силы; x– смещение колеблющейся точки. Максимальное значение сила приобретает при максимальном смещении x_{max}, равном амплитуде, то есть:

$$F_{max} = kA. \quad (2)$$

Коэффициент выразим через период колебаний:

$$k = m\omega^2 = m\frac{4\pi^2}{T^2}. \quad (3)$$

Подставим в уравнение (2) выражение для k из формулы (3) и из формулы (1), после сокращений получим:

$$F_{max} = \frac{2\pi}{T}\cdot\sqrt{2mE}.$$

Подставим числовые значения величины и производим вычисления:

$$F_{max} = \frac{2\cdot 3{,}14}{4}\cdot\sqrt{2\cdot 3\cdot 10^{-2}\cdot 3\cdot 10^{-4}}\text{ Н} = 6{,}66\cdot 10^{-3}\text{Н}.$$

Ответ: $A = 99$ мм; $F_{max} = 6{,}66\cdot 10^{-3}$Н.

Пример №3. Найти амплитуду A и начальную фазу φ гармонического колебания, полученного при сложении одинаково направленных колебаний, данных уравнениями:

$$x_1 = 0{,}02\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ ми} x_2 = 0{,}03\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ м}$$

*Решение.*По определению гармонического колебания

$$\sigma = A\sin(\omega t) + \varphi).$$

Начальные фазыφ_1 иφ_2–первого и второго колебаний соответственно – равны

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}; \varphi_2 = \frac{\pi}{4}. \quad (1)$$

При вычислении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода с амплитудой:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} =$$

$$= \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}03^2 + 2\cdot 0{,}02\cdot 0{,}03\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} = 4{,}64 \text{ м}.$$

Начальную форму результирующего колебания можно также определить непосредственно как

$$\varphi = arctg\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = arctg\frac{0{,}02\sin\varphi_1 + 0{,}03\sin\varphi_2}{0{,}02\cos\varphi_1 + 0{,}03\cos\varphi_2} =$$

$$arctg\frac{0{,}02\cdot 1 + 0{,}03\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{0{,}02\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}03\cdot 0} = arctg 2{,}922 \approx 62{,}46°.$$

Ответ: $A = 4{,}64$ см; $\varphi = 62{,}46^{\circ}$.

Пример №4. Точка участвует в двух взаимно-перпендикулярных колебаниях: $x = \cos\pi t$ и $y = \cos\frac{\pi}{2}t$. Найти траекторию результирующего движения точки.

Дано:
$x = \cos\pi t$,
$y = \cos\frac{\pi}{2}t$.
Найти: траекторию движения.

Решение. Чтобы определить траекторию движения точки, исключим время из уравнений:

$$x = \cos\pi,\ y = \cos\frac{\pi}{2}.$$

Заметив, что $y = \cos\frac{\pi}{2}$, применим формулу косинуса половинного угла:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Используя это соотношение и отбросив размерности *x* и *y*, можно написать:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$
$$x = \cos\pi t,$$

отсюда

$$y = \pm\sqrt{\frac{1+x}{2}}, \text{ или}$$

$$2y^2 - 1 = \cos\pi t, \text{ или}$$

$$2y^2 - 1 = \cos\pi t,$$

отсюда

$$2y^2 - x = 1 \text{– уравнение параболы.}$$

Ответ: $2y^2 - x = 1$– уравнение параболы.

Вопросы для самопроверки

1. Какие движения называются колебательными? Какие колебания называются гармоническими?

2. Что такое фаза колебаний и что она определяет? Что определяет начальная фаза? Что такое частота колебаний ν и что такое циклическая частота ω? Как связаны между собой величины ν и ω?
3. Чему равны амплитуда, период и начальная фаза следующего колебния:
$$x = 0{,}6cos\left(\frac{2\pi}{12}t + \frac{\pi}{3}\right).$$
4. Каковы амплитуда, скорость и ускорение материальной точки, совершающей гармоническое колебание по следующему закону:
$$x = 8cos\left(\frac{2\pi}{0{,}2}t + \frac{\pi}{6}\right).$$
5. Даны два колебания:
$$x_1 = 3cos\left(\frac{\pi}{0{,}1}t + \frac{\pi}{3}\right),$$
$$x_2 = 5cos\left(\frac{2\pi}{0{,}1}t + \frac{\pi}{3}\right).$$
Чем отличаются эти колебания? Какова разность фаз между ними? Чему равна амплитуда результирующего колебания, если эти два колебания сложить?
6. Какие колебанияназываются биениями?
7. Какое движение совершает точка, если она одновременно участвует в двухвзаимно-перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковыми частотами? При каких условиях траекторией движения будет прямая и при каких – окружность?
8. Что называют фигурами Лиссажу и как их можно получить на опыте?
9. Какие колебательные системы называются математическими и физическими? Выведите формулы для периода колебаний маятников. Зависит ли период колебаний от амплитуды?
10. Чему равна кинетическая и потенциальная энергии колебательной системы? Чему равна полная энергия системы?

5.6. Затухающие колебания

В реальных условиях энергия колеблющейся системы постепенно рассеивается, расходуясь на работу по преодолению сил трения и сопротивления как в самой системе, так и в окружающей среде.

Рассмотрим подробнее динамику и кинематику свободных затухающих колебаний. Это означает что система, выведенная из положения равновесия, находится под действием силы упругости $F_{max} = ky$ (или квазиупругой) и силы сопротивления среды. Ограничимся малыми колебаниями. В этом случае сила сопротивления пропорциональна скорости колебания, т.е.

$$F_{\text{сопр}} = -rv, \qquad (5.40)$$

где r – коэффициент сопротивления, знак $(-)$ указывает, что $F_{\text{сопр}}$ всегда направлена в сторону, противоположную направлению движения. Результирующая сила, действующая на систему, будет равна

$$\vec{F} = \vec{F}_{упр} + \vec{F}_{сопр}.$$

По второму закону Ньютона имеем $F = ma$, или $F_{упр} + F_{сопр} = ma$, или $-ky - ry = ma$. Учитывая, что $a = \frac{d^2y}{dt^2}$; $v = \frac{dy}{dt}$, получим

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{r}{m} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0. \qquad (5.41)$$

Это дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний. При обозначении $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ и $\frac{r}{m} = 2\delta$, где δ – коэффициент затухания, уравнение (5.41) может быть записано в таком виде:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\delta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0. \qquad (5.42)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$y = A sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (5.43)$$

но в отличие от незатухающего колебания в этом уравнении амплитуда не является постоянной, а убывает по экспоненциальному закону:

$$A = A_0 e^{-\delta \cdot t}, \qquad (5.44)$$

и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания – δ (рисунок 5.12). Следовательно, уравнение (5.43) может быть записано как

$$y = A_0 e^{-\delta \cdot t} sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (5.45)$$

где A_0– амплитуда в начальный момент времени.

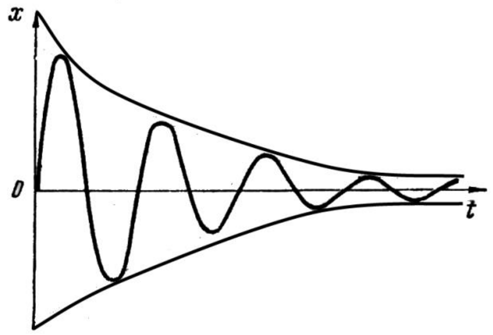

Рисунок 5.12 – График затухающего колебания

Коэффициент затухания – δ характеризует быстроту затухания колебаний во времени. Выражение$A = A_0 e^{-\delta \cdot t}$ можно представить в виде $\frac{A_0}{A} = e^{\delta \cdot t}$. Из этого следует, что если $\frac{A_0}{A} = e = 2{,}72$, то $\delta \cdot t = 1$ или

$$\delta = \frac{1}{t}. \qquad (5.46)$$

Уравнение (5.46) выражает физический смысл коэффициента затухания – $\underline{\delta}$. Коэффициент затухания есть физическая величина, численно равная обратному промежутку времени t, по истечении которого амплитуда уменьшается в e раз. Следует заметить, что частота затухающих колебаний определяется по выражению

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}. \qquad (5.47)$$

Понятие циклической частоты $\underline{\omega}$ в этом случае условное, т.к. колебания, строго говоря, не являются периодическими и не повторяются, по крайней мере, по значению параметров, а только по направлению. По этой причине величину

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}} \quad (5.48)$$

правильнее называть *условным периодом* затухающих колебаний. При относительно небольших силах трения частота таких колебаний мало отличается от частоты собственных незатухающих колебаний ω_0той же системы, в которых коэффициент затуханияδлинейно связан с величиной сил сопротивления.

Наряду с коэффициентом затухания δ имеется еще один показатель затухания, называемый *логарифмическим декрементом* затухания χ. Этот показатель затухания позволяет произвести оценку затухания в течение одного периода. По определению χ *есть натуральный логарифм отношения двух последовательных значений амплитуд, отстоящих друг от друга на время, равное периоду*

$$\chi = lg\frac{A_0 e^{-\delta \cdot t}}{A_0 e^{-\delta(t+T)}} = \delta T. \quad (5.49)$$

Физический смысл χ можно установить из следующих рассуждений. Если за время t амплитуда колебаний уменьшается в e раз и она совершила $N_e = \frac{\tau}{T}$ колебаний, то, согласно выражениям (5.49) $\chi = \delta T$ и (5.45) $\delta = \frac{1}{\tau}$, получим

$$\chi = \frac{1}{t} \cdot \frac{\tau}{N} = \frac{1}{N}. \quad (5.50)$$

Логарифмический декремент затухания есть физическая величина, обратная числу колебаний (N), по истечении которых амплитуда уменьшается в e раз. Если коэффициент затухания δ велик и равен соответствующей частоте ω_0 $(\delta = \omega_0)$, то, как видно из уравнения (5.47), циклическая частота затухающих колебаний обращается в ноль, т.е. колебания прекращаются, и система, выведенная внешними силами из равновесия, после прекращения действия этих сил возвращается в положение равновесия *апериодически*. При этом вся механическая энергия колеблющейся системы к моменту ее возвращения в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление трения.

5.7. Вынужденные колебания

В практике часто встречаются такие колебания системы, когда внешние силы не тормозят ее движение, а, наоборот, усиливают. Это происходит, когда на систему действует периодическая раскачивающая (вынужденная) сила. При этом амплитуда и энергия системы возрастают. Возрастание амплитуды может быть таким, что возникает реальная опасность для устойчивого существования самой системы. Такие колебания называют вынужденными (рисунок 5.13).

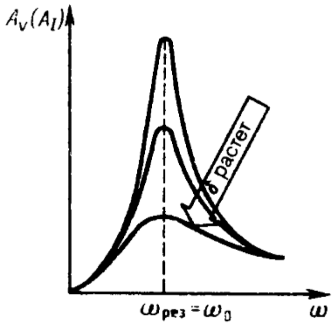

Рисунок 5.13 – Вынужденное колебание

Обычно наличие вынуждающей силы существует наряду с действием сил трения и сопротивления. Поэтому реальный характер колебаний системы определяется совокупностью и соотношением всех видов сил, в частности, если приток энергии со стороны вынуждающих сил и рассеяние энергии за это время становятся равными, то колебания приобретают стационарный характер с постоянной амплитудой и внешне напоминают обычные затухающие колебания. Однако происходят они не с собственной частотой $-\omega_0$, а с частотой вынуждающей силы $F = F_0\, sin\omega \cdot t$. Амплитуда таких вынужденных колебаний представляет собой сложную функцию от ряда параметров: амплитуды вынуждающей силы F_0, массы системы m, степени затухания колебаний δ и соотношения частот собственной ω_0 и вынужденной ω. Эта функция имеет вид

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}. \qquad (5.51)$$

Рассмотрим, как изменяется амплитуда вынужденных колебаний при различных значениях ω внешнего воздействия, т.е. близких и далеких от ω_0.

Случай 1. Условия: $\omega << \omega_0$, т.е. $\omega \to 0$.

В уравнении (5.51) в этом случае основную роль будет играть ω_0^2.

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}. \qquad (5.52)$$

Амплитуда равна величине статического смещения, вызванного постоянной силой F_0, т.е. колебания не зависят от ω.

Случай 2. Условия: $\omega >> \omega_0$ $(\omega \to \infty)$.

$$A = \frac{F_0}{m\omega^2}, \qquad (5.53)$$

при $\omega \to \infty$, $A \to 0$.

При возрастании $\omega \to 0$ асимптотически стремятся к нулю, т.к. при большой частоте вынуждающая сила так быстро меняет свое направление, что система не успевает заметно сместиться из положения равновесия.

Случай 3. Условия: $\omega = \omega_0$и $\delta = 0$.

В этом случае

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{0}} \to \infty, \qquad (5.54)$$

амплитуда становится бесконечно большой, но это модельный случай, а не реальный.

Случай4. Это наиболее реальная ситуация, когда существуют причины для затухания ($\delta \neq 0$) и с помощью вынуждающей силы достигают максимального эффекта, т.е. максимальной амплитуды колебания системы.

Для установления оптимального соотношения между параметрами колеблющейся системы (ω, ω_0 и δ) следует проанализировать уравнение (5.50) и решить его относительно максимального значения амплитуды. Для чего подкоренное выражение знаменателя следует продифференцировать по переменной ω и приравнять к нулю.

$$(\omega_0^2 - \omega_2)^2 + 4\delta^2 + \omega^2 = (\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + \omega^4 + 4\delta^2\omega^2)^1 \text{ или}$$

$$-4\omega_0^2\omega + 4\omega^3 + 8\delta^2\omega = 0.$$

Полученное уравнение имеет три решения:

$\omega = 0$ – это соответствует максимальному знаменателю в уравнении (5.50) и амплитуда не будет максимальной;

$\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$– это выражение со знаком минус не имеет физического смысла, поэтому интерес представляет уравнение

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \qquad (5.55)$$

Анализ уравнения (5.51) показывает, что по мере приближения частоты (ω) действия вынуждающей силы к частоте собственных колебаний (ω_0) системы амплитуда вынужденных колебаний возрастает, а при достижении частоты ω, определенной по уравнению (5.55), амплитуда достигает максимального значения. Эта частота $\omega_{рез}$ называется *резонансной*, а явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты ω к $\omega_{рез}$ есть *явление резонанса.*

На рисунке 5.14 представлены резонансные кривые, соответствующие различным значениям коэффициента затухания – δ.

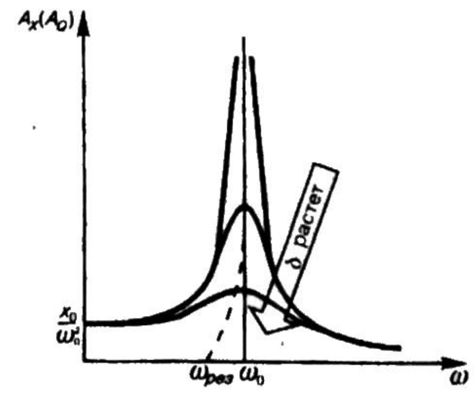

Рис.5.14. – Резонансные кривые

Чем меньше коэффициент затухания (δ), тем сильнее изменяется с частотой (ω)амплитуда вблизи резонанса, тем выше и правее лежит максимум кривой. С увеличениемδ явление резонанса проявляется всё слабее и, наконец, исчезает при

$$\delta \geq \frac{\omega_0}{2}.$$

Амплитуда при резонансе определяется по выражению (5.56), полученному из уравнений (5.51) и (5.55):

$$A_{\text{рез}} = \frac{F}{m(\omega_0^2 - 2\delta^2)}. \qquad (5.56)$$

Явление резонанса широко проявляется в природе и технике, как с положительной стороны, так и с отрицательным эффектом. Основу радиотехники составляют резонансные явления, резонанс используется в механизмах при забивании свай и во многих других областях техники.

С другой стороны, при совпадении собственной частоты механизма с частотой действия вынуждающей силы может произойти авария. Например, рассматривая надежность колеблющейся системы – межэтажное перекрытие, на котором работает какой-либо станок с периодическими толчками на покрытие, необходимо усилить перекрытие (увеличить его массу), ограничить силу толчков F_1, добиться того, чтобы значительная часть энергии, передаваемой на перекрытие, рассеивалась (т.е. увеличить δ). Главное, обеспечить работу станка с такой частотой, которая значительно отличается от собственной частоты колебаний самого перекрытия.

Вопросыдля самопроверки

1. Какие колебания называют затухающими? Что понимают под периодом затухающих колебаний?
2. Какие колебания системы называются собственными и какие вынужденными? Какие колебания называются свободными?
3. Что называют декрементом и логарифмическим декрементом затухания и как они связаны с коэффициентом затухания?
4. Что называют добротностью колебательной системы?
5. Какие колебания называются вынужденными? Составьте дифференциальные уравнения затухающих и вынужденных колебаний.
6. Что называют резонансом?

5.8. Волновое движение (волновой процесс). Понятие волнового движения. Виды волн

Колебания, возбуждённые в какой-либо точке среды (твёрдой, жидкой или газообразной), распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной частицы среды к другой.

Процесс распространения колебаний в упругой среде называется волновым движением, а распространяющееся в среде периодическое возмущение – волной.

Наиболее простой пример–шнур, закреплённый одним концом к стене. Если другой (свободный) конец шнура (точка O на рисунке 5.15) совершает гармонические колебания вдоль оси Y, происходящие по закону
$y = A\sin\omega t$, то колебания этой точки последовательно передаются упруго связанным с ней другим точкам шнура. Таким образом, постепенно в колеба-

тельный процесс вовлекается весь шнур – вдоль шнура распространяется волна.

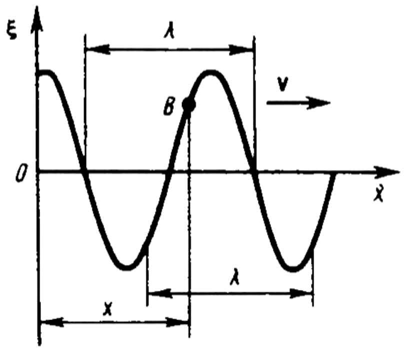

Рисунок 5.15

При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Направление, вдоль которого распространяются колебания, называется *лучом распространения*, или *направление волны.*

Волны классифицируются по многим признакам: по геометрии (одномерная, двухмерная, трехмерная волны); по физической природе (стоячие, звуковые и т.д.); по соотношению направления колебаний отдельных частиц среды с направлением их распространения (продольные и поперечные волны).

В продольных волнах частицы среды колеблются в направлении распространения волны, а в поперечных плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны, поперечная волна может распространяться только в средах, которым присуще свойство упругой деформации сдвига (твердые тела, поверхностный слой жидкости, который находится в состоянии поверхностного натяжения).Продольная волна распространяется в любой среде (газ, жидкость, твердое тело). Понятие продольной и поперечной волны– есть частные случаи (крайние), часто бывает так, что волна обладает двумя составляющими (продольная и поперечная).

5.9. Уравнение волны. Характеристика волны

Найти уравнение волны – это значит определить аналитическое выражение, определяющее смещение любой колеблющейся точки (частицы) шнура (или среды) как функцию ее координаты(l)и времени(t), т.е. $y = f(l,t)$.

Рассмотрим, например, волны, бегущие вдоль шнура (см. рисунок 5.15), один конец которого (0) поддерживается в состоянии колебания. Пусть колебания системы, вызывающие волновое движение, происходят по ну$y = A\sin\omega t$. Точка M шнура будет совершать такие же колебания, с той же частотой и с той же амплитудой (если пренебречь незначительным затуханием), что и точка 0 (источник возмущения). Однако колебания ее будут запаздывать по отношению к колебаниям точки 0 на некоторое время

$\tau = \frac{l}{v}$, необходимое для того, чтобы волна со скоростью v прошла расстояние l. Таким образом, смещение произвольной точки шнура в момент времени t равно

$$y = A\sin\omega(t-\tau).$$

Уравнение волны примет следующий вид:

$$\boldsymbol{y = A\sin\omega\left(t-\frac{l}{v}\right)}. \tag{5.57}$$

Это выражение можно записать, учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$, а $v \cdot T = \lambda$, в таком виде:

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}l\right). \tag{5.58}$$

Из уравнений (5.57) и (5.58) видно, что смещение y в волновом движении представляет собой функцию двух переменных t и l и позволяет определить положение любой точки (частицы) в любой момент времени.

Характеристики волн: все время, пока существует волна, частицы среды совершают колебания около своих положений равновесия, при этом различные частицы колеблются со сдвигом фаз.

1. *Расстояние между ближайшими частицами среды, колеблющимися в одинаковой фазе, называется длиной волны* λ (см. рисунок 5.15). Длину волны можно также представить как расстояние, которое волна проходит за время, равное периоду

$$\lambda = vT. \tag{5.59}$$

Волна полностью повторяет себя через промежутки времени, равные периоду T и через расстояния по оси X, равные λ.

2. *Геометрическое место точек, до которого доходят колебания к моменту времени t, называется фронтом волны (или волновым фронтом), а геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью.* Волновых поверхностей существует бесконечное множество в пространстве, охваченном волновым процессом, в то время как волновой фронт в каждый момент времени только один. Волновой фронт все время перемещается.

3. *Скорость волны*. Принципиально важно отметить, что характер волны и ее скорость распространения не зависят от свойств источника колебаний, а полностью зависят от плотности ρ и упругих характеристик среды, а именно, от ее модуля упругости G по отношению к деформации сдвига или от модуля Юнга E по отношению к деформации растяжения и сжатия.

Скорость распространения поперечных волн определяется соотношением

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \tag{5.60}$$

скорость продольных волн

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{5.61}$$

Скорость продольных волн в газообразной среде определяется соотношением

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot P}{\rho}} \qquad (5.62),$$

$$\text{или} \quad v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T}{\mu}} \qquad (5.63)$$

где γ –показатель адиабаты; P– давление; T– температура; μ– масса одного моля; R– универсальная газовая постоянная.

Из всех видов продольных волн наибольшее практическое значение имеют звуковые волны, которые с большой скоростью и весьма малым затуханием могут распространяться во всех конструкционных и строительных материалах.

5.10. Стоячие волны

При распространении волн в закрытых помещениях часто встречаются случаи, когда отраженная волна имеет достаточно большую амплитуду и поэтому сильно взаимодействует с падающей волной, особенно когда волна падает перпендикулярно к отражающей поверхности. Примером такого явления может служить отражение звуковых волн от таких твердых ограждающих поверхностей, как мраморные или гранитные полы, стены, что делает звуковое поле неоднородным. Когда две волны с равными амплитудами и частотами распространяются навстречу друг другу, при наложении этих волн возникают стоячие волны(рисунок 5.16).

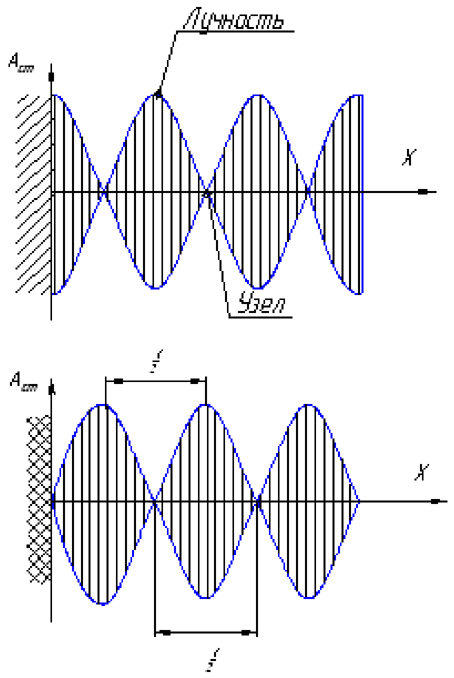

Рисунок 5.16 – Стоячие волны

Смещение точки, которая участвует в двух колебаниях, равно алгебраической сумме y_1 и y_2. На основании формулы преобразования синуса суммы $y = y_1 + y_2$ получим формулу стоячей волны:

$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda} l \sin\omega t. \qquad (5.64)$$

В отличие от бегущей волны точки стоячей волны колеблются в одинаковой фазе. Из уравнения (5.53) следует, что в каждой точке этой волны происходят колебания с той же частотой ω и амплитудой

$$A_{\text{стояч}} = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}l\,, \qquad (5.65)$$

зависящей от координаты l рассматриваемой точки. Те точки волны, которые удовлетворяют условию $\cos\frac{2\pi}{\lambda}\cdot l = 1$ или $\frac{2\pi}{\lambda}l_{max} = \pm n\pi\,(n = 1, 2, 3\,\ldots)$ и $l_{max} = \pm n\frac{\lambda}{2}$, колеблются с максимальной амплитудой, равной удвоенной амплитуде падающей волны. Эти точки называются *кучностями*.

Другие точки, для которых выполняется условие, $\cos\frac{2\pi}{\lambda}\cdot l = 0$ или $\frac{2\pi}{\lambda}l_{max} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ и $l = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$, не колеблются вовсе. Их называют *узлами.* Для помещений, в которых распространяются звуковые волны, узлы представляют собой так называемые «акустические ямы»– провалы звука. В этих местах слышимость значительно ниже, чем в соседних местах. Для того чтобы избежать образования таких ям, рекомендуется противоположные стены не делать строго параллельными. Стоячие волны могут возбуждаться в натянутой струне, в трубах, пластинах, плитах перекрытия и т.п. Частоты возбуждаемых в них колебаний определяются свойствами материала, геометрическими размерами, формой конструкции и т.д.

Пример №5. Плоская волна распространяется вдоль прямой со стью$v = 25$ м/с. Обе точки, находящиеся на этой прямой, на нии$x_1 = 10$ м, $x_2 = 12$ мот источника волн, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 0{,}75\pi$. Найти длину волны λ, написать уравнение волны и найти смещения указанных точек в момент $t = 1{,}5\,c$, если амплитуда колебанийА $= 0{,}2$ м.

Дано:

$v = 25\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$,

$x_1 = 10$ м,

$x_2 = 12$ м,

$\Delta\varphi = 0{,}75\pi$,

$t = 1{,}5\,c$,

А $= 0{,}2$ м.

Найти: $\lambda = ?\,;\ y(t) = ?\,;\ x = ?$

Решение. Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волныx, колеблются с равностью фаз

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\lambda}2\pi = \frac{x_1 - x_2}{\lambda}2\pi.$$

Решая это равенство относительно λ, получим:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}(x_2 - x_1).$$

Подставив числовые значения величин, входящих в выражение для λ, и выполнив арифметические действия, получим:

$$\lambda = \frac{2\pi}{0{,}75} \cdot (12 - 10)\ \text{м} = 5{,}714\ \text{м} \approx 6\ \text{м}.$$

Для того чтобы написать уравнение плоской волны, надо ещё найти циклическую частоту ω. Так как $\omega = \frac{2\pi}{\text{T}}$ (Т–период колебаний) и

$$\text{T} = \frac{\lambda}{v}, \text{ то } \omega = 2\pi\frac{v}{\lambda},$$

$$\omega = 2\pi\frac{25\ \text{м/с}}{6\ \text{м}} = 8{,}3\pi\ \text{с}^{-1}.$$

Зная значение амплитуды A колебаний, циклической частоты ω и скорость v распространения волны, можно написать уравнение плоской волны для заданного случая:

$$\text{y} = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

$$y_1 = 0{,}2\cos 8{,}3\pi\left(1{,}5 - \frac{10}{25}\right) = -0{,}2\ \text{м} = 20\ \text{см},$$

$$y_2 = 0{,}2\cos 8{,}3\pi\left(1{,}5 - \frac{12}{25}\right) = 0{,}17\ \text{м} = 17\ \text{см}.$$

Ответ: $\lambda = 6$ м; $y_1 = 20$ м; $y_2 = 17$ м.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют механической волной?
2. Какие волны называются продольными, какие поперечными?
3. Что называют скоростью волны?
4. Что называют длиной волны?
5. Что такое фронт волны? Волновая поверхность? Луч?
6. Какие волны называются плоскими, сферическими?
7. Выведите уравнение плоской волны.

6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант 1

1. Два одинаковых шара подвешены на нитях по $0{,}98$ м каждая и касаются друг друга. Один из шаров отклоняется на угол $10°$ и отпускается. Определить максимальнуюскорость второго шара после соударения, если удар абсолютно упругий.

2. Тело начало вращаться из состояния покоя и через 3 с имело линейную скорость 10 м/с. Определить, сколько оборотов сделает тело после этого к моменту времени 5 с, если радиус вращения 0,5 м.

3. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 10 - 4t + t^3$. В какой момент времени угловая скорость вращения будет равна 12 с$^{-1}$? Тангенциальное ускорение при радиусе кривизны 0,1 м.

4. Из одной точки одновременно брошены два тела с одинаковой скоростью под разными углами к горизонту. Определить расстояние между телами спустя 2 с после начала движения по вертикали и горизонтали, если начальная скорость равнялась 25 м/с, а углы 30 и $60°$.

5. Машина спускается с горы высотой 100 м с выключенным мотором. Какую скорость она будет иметь у основания наклонной плоскости, если путь, пройденный ею, равен 1000 м, а коэффициент трения колес о землю равен $0{,}1$.

6. Столб высотой 10 м и массой 500 кг упал из вертикального положения на склон, имеющий угол наклона $20°$. Какую линейную скорость будет в момент падения иметь вершина столба?

7. Молот массой 5 кг ударяет кусок железа, лежащий на наковальне массой 100 кг (массой железа пренебречь). Удар неупругий. Определить к.п.д. молота, если полезной считать энергию, пошедшую на деформацию.

8. На концах тонкого однородного стержня длиной 1 м и массой 300 г прикреплены маленькие шарики массами 100 и 200 г. Определить момент инерции относительно оси, проходящей через его середину.

9. Из колодца с помощью ворота поднимается ведро с водой массой 10 кг. В момент, когда ведро находилось на высоте 5м от поверхности воды, рукоятка освободилась, и ведро стало двигаться вниз. Определить линейную скорость рукоятки в момент удара ведра о поверхность воды, если радиус рукоятки 30 см, радиус вала 10 сми его масса 20 кг.

10. На общей вертикальной оси насажены два диска массами 2 и 4 кг и радиусами 0,5 и 0,3 м соответственно. Вращения дисков задаются уравнениями $\varphi_1 = 2t$ и $\varphi_2 = -1{,}5t$. Верхний диск падает на нижний и сцепляется с ним. Как будут вращаться диски?

11. Диск массой 1 кг скатывается с наклонной плоскости высотой h практически без трения и, не упруго сталкиваясь у основания с неподвижным телом массой 2 кг, скользит далее вместе с ним до полной остановки по горизонтальной поверхности с коэффициентом трения равным 0,1, пройдя при этом путь 5 м. Определить высоту наклонной плоскости.

12. Шпиндель станка (сплошной цилиндр массой 20 кг и диаметром 20 см) начинает вращаться из состояния покоя ускоренно. Определить, какую среднюю мощность затратили на его «раскрутку» до частоты 10 об/с за время 10 с.

Вариант 2

1. Площадка подъёмника с грузом стоит на нижней отметке. После включения площадка с грузом ускоряется в течение времени 5 с, затем поднимается равномерно в течение 10 с и перед остановкой замедляется в течение 5 с. Диаметр барабана лебёдки подъёмника равен 0,4, а угловое ускорение при старте и остановке –1 $с^{-2}$. Найти высоту, на которую поднимется площадка подъёмника.

2. Пуля выпущена из винтовки с начальной скоростью 600 м/с под углом 30° к горизонту. Найти радиус траектории пули в верхней ее точке, высоту подъёма и дальность полета, если не учитывать сопротивление воздуха.

3. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону, выражаемому формулой $\varphi = 10 + 20t - 25t^2$. Для момента времени 1 снайти величину и направление полного ускорения точки, находящейся на расстоянии 0,1 м от оси вращения.

4. Два шара массами 1 и 3 кг подвешены на нитях 0,98 ми касаются друг друга. Первый шар отклонили на угол 30° и отпустили. Определить скорости шаров после удара, если он идеально упругий.

5. Тело массой 100 кгподнимается по наклонной плоскости с углом наклона 20° под действием силы, направленной параллельно плоскости и равной

1000 Н. Коэффициент трения тела о плоскость равен 0,1. С каким ускорением будет двигаться тело?

6. Из орудия, установленного на платформе массой $10\ \text{т}$, производится выстрел снарядом массой $100\ \text{кг}$, который получает скорость $500\ \text{м/с}$ под углом $30°$ к горизонту. Сколько времени будет двигаться платформа, если коэффициент трения 0,2?

7. Определить массу бадьи с бетоном, поднимаемую краном на высоту 15 мускоренно за 10 с, если затраченная на это работа равна 10 кДж.

8. Определить момент инерции булавы – старинного оружия, состоящего (упрощенно) из ядра – шара диаметром $5\ \text{см}$ ($\rho = 7800\ \text{кг/кг}^3$) и рукоятки массой $2\ \text{кг}$ и длиной $0{,}5\ \text{м}$. Момент инерции определить относительно оси вращения, перпендикулярной оси рукоятки и проходящей через её конец.

9. Определить момент силы, который необходимо приложить к блоку массой $1{,}5\ \text{кг}$, вращающемуся с частотой $12\ \text{об/с}$, чтобы он остановился в течение 8с. Диаметр блока 34 см. Массу блока считать распределенной по ободу.

10. Человек стоит в центре круглой сплошной платформы массой 50 кг и радиусом 1 м, которая может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, и держит в руках шест массой 12 кг и длиной 3 м за его середину. Вся система приводится во вращение с угловой скоростью $2\ \text{рад/с}$. Определить, как изменится угловая скорость, если человек вначале держал шест вертикально, а затем горизонтально. Моментом инерции человека пренебречь.

11. Однородный цилиндр радиусом $10\ \text{см}$ скатывается без скольжения с наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $30°$. Угловая скорость в начальный момент равна $2\ \text{рад/с}$. Найти время, за которое угловая скорость цилиндра возрастёт вдвое. Трением пренебречь.

12. Найти работу, которую совершит сила в 10 Н, приложенная касательно к ободу колеса радиусом $0{,}5\ \text{м}$. Колесо вращалось из состояния покоя с постоянным угловым ускорением, и через 10 с частота вращения достигла $110\ \text{об/с}$.

Вариант 3

1. Парашютист, выбросившись из самолета, первые $50\ \text{м}$ падает, не испытывая сопротивления воздуха. Затем он раскрывает парашют и падает с замедлением в $2\ \text{м/с}^2$. Земли он достигает при скорости 3 с. Сколько времени парашютист пробыл в воздухе? С какой высоты он выбросился?

2. Тело начало вращаться из состояния покоя и через 3 с имело линейную скорость 10 м/с. Определить, сколько оборотов сделает тело после этого к моменту времени 5 с, если радиус вращения 0,5 м.

3. При выполнении одной из фигур высшего пилотажа мертвая петля уравнение движения самолета имеет вид $x = Bt + Ct^2$. Определить величину тангенциального ускорения и радиус траектории в верхней точке петли, если с момента начала выполнения фигуры прошло 5 с, $B = 50$ м/с, $C = 5$ м/с^2.

4. Тангенциальное ускорение точки, вращающейся по круговой траектории радиусом 10см, равно 3м/с^2. Определить, сколько оборотов сделала точка с начала вращения, если скорость в этот момент равна 5м/с.

5. Тело массой 3 кг движется со скоростью 2 м/с и сталкивается с покоящимся телом массой 5 кг не упруго, и затем оба сталкиваются с третьим телом массой 2 кг, движущимся им навстречу со скоростью 2 м/с. Какова будет скорость после столкновения?

6. Тело скользит вниз по наклонной плоскости (угол наклона 30°) с постоянной скоростью. Затем оно получает толчок вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью 4 м/с. На какое расстояние тело поднимется вверх перед тем как остановится? Начнёт ли оно скользить назад?

7. Два тела, двигаясь навстречу друг другу, столкнулись не упруго, так что скорость их после этого стала равной 3 м/с. Определить массы тел, если скорость перед ударом была: у первого тела $v_1 = 6$ м/c, у второго $v_2 = 2$ м/с. Энергия, растраченная на деформацию тел, $Q = 30$Дж.

8. Определить момент инерции махового колеса в виде однородного диска радиусом 20 см и начальной массой 10 кг, в котором просверлены четыре сквозных отверстия радиусом 5 см, центры которых находятся на расстоянии 8 см от центра диска и их размещение симметричное.

9.Определить момент силы, который необходимо приложить к блоку массой 1,5 кг, вращающемуся с частотой 12 об/с, чтобы он остановился в течение 8 с. Диаметр блока 34 см. Массу блока считать распределенной по ободу.

10. Человек стоит в центре круглой сплошной платформы массой 50 кг и радиусом 1 м, она может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, и держит в руках шест массой 12 кг и длиной 3 м за его середину. Вся система приводится во вращение с угловой скоростью 12 рад/с. Определить, как изменится угловая скорость, если человек вначале держал шест вертикально, а затем горизонтально. Моментом инерции человека пренебречь.

11. Однородный цилиндр радиусом $10\ \text{см}$ скатывается без скольжения с наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $30°$. Угловая скорость в начальный момент равна $2\ \text{рад/с}$. Найти время, за которое угловая скорость цилиндра возрастёт вдвое. Трением пренебречь.

12. Найти работу, которую совершит сила в 10 Н, приложенная касательно к ободу колеса радиусом $0{,}5$ м. Колесо вращалось из состояния покоя с постоянным угловым ускорением, и через 10 с частота вращения достигла $10\ \text{об/с}$.

Вариант 4

1. С вершины утёса высотой 65 м брошен вертикально вверх камень со скоростью $10\ \text{м/с}$. Определить: 1) через какое время он достигнет основания утеса; 2) какова скорость перед ударом его о землю?

2. Мяч, брошенный горизонтально, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии 5 м от места бросания. Высота места удара мяча о стенку на 1 м ниже высоты, с которой брошен мяч. С какой скоростью брошен мяч и под каким углом он подлетел к стенке?

3. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $2\ \text{с}^{-2}$. Через $0{,}5$ с после начала вращения полное ускорение колеса равно $1{,}36\ \text{м/с}^2$. Чему равен радиус колеса?

4. Точка движется по окружности по уравнению $\varphi = 3t + 0{,}5t^2$. К моменту времени 1 с скорость равнялась $10\ \text{м/с}$. Определить нормальное и тангенциальное ускорения через 2 сот начала.

5. Вагон массой 20 т скатывается с уклона высотой 4 м. Навстречу ему по горизонтальному участку пути движется другой вагон массой 15 т со скоростью $2{,}5\ \text{м/с}$ перед сцепкой. Определить скорости вагонов после сцепки. Трением пренебречь.

6. К условию предыдущей задачи добавляется трение (коэффициент трения $0{,}2$). Определить, какой путь пройдут вагоны до полной остановки после сцепки, если она произошлау основания уклона и угол уклона $30°$.

7. Определить момент инерции тонкого однородного стержня длиной 60 см и массой 100 г относительно оси, проходящей через точку стержня, удаленную на расстояние 20 см от одного из его концов.

8. На столе лежит тело массой 20 кг, к телу привязана нить, перекинутая через неподвижный блок. К другому концу нити прикреплено тело массой 10 кг. С каким ускорением будут двигаться оба тела? Коэффициент трения тела о поверхность стола равен 0,2. Каково будет натяжение нити при движении?

9.Вентилятор вращался с частотой 15 об/с. После выключения сделал до остановки 75 оборотов. Работа торможения оказалась равной 4,44 Дж. Найти момент инерции и момент сил торможения.

10. На общей вертикальной оси насажены два диска массами 2 и 6 кг и радиусами 0,5 и 0,3 м. Вращения дисков задаются уравнениями $\varphi_1 = 3 + 8t; \varphi_2 = 2 + 5t$. Верхний диск падает и сцепляется с нижним. С какой скоростью будут вращаться диски?

11.Шпиндель станка (сплошной цилиндр: $m = 20$ кг и $R = 10\ см$) начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно. Определить, какую среднюю мощность затратили на его «раскрутку» до частоты 10 об/с за время 4 с. Какой момент сил действует при этом?

12.Под каким углом к горизонту вылетел снаряд из орудия, если считать дальность полёта равной 87 км при начальной скорости 1000 м/с? Трением снаряда о воздух пренебречь.

Вариант 5

1. Из зависшего над землёй вертолета выбросили сначала один груз, а потом через 2 с второй. Какое расстояние будет между грузами, когда скорость второго станет равна 29,4 м/с?

2.На какой высоте вектор скорости тела, брошенного под углом 45° к горизонту с начальной скоростью 20 м/с, будет составлять с горизонтом угол 30°?

3. Найти угол между вектором полного ускорения и радиусом колеса к концу первой секунды после начала движения, если колесо вращается с постоянным угловым ускорением равным 3,14 $с^{-2}$.

4. Точка движется по окружности радиусом 5 м. Закон ее движения выражается уравнением $S = 4 + 2t + t^2$. В какой момент времени нормальное ускорение точки будет равно тангенциальному? Какой угловой путь опишет радиус вектор за это время?

5. На столе лежит тело массой 20 кг. К телу привязана нить, перекинутая через неподвижный блок. К другому концу нити привязано тело массой m. Какова масса этого тела, если тела перемещаются с ускорением 1,96 $м/с^2$ и коэффициент трения тела о поверхность стола 0,2.

6. Человек находится на движущейся со скоростью $1{,}5\ \text{м}/\text{с}^2$ тележке массой 40 кг. Чему будет равна скорость тележки, если человек прыгнул вперед по ходу движения тележки, имея скорость $3\ \text{м}/\text{с}$ относительно земли под углом $30°$ к ней? Масса человека 60кг.

7. Велосипедист массой 100 кг скатывается с горки высотой 10 м, развивая дополнительную силу тяги 100 Н. После уклона он прекращает крутить педали и начинает подниматься на вторую горку по инерции. На какую высоту он сумеет подняться, если у первой горки угол уклона был равен $30°$, а у второй $20°$ и коэффициент трения равен $0{,}1$?

8. Определить момент инерции медного диска радиусом 5 см и толщиной 1 мм, в котором вырезаны два круглых отверстия радиусами по 2 см, центры которых удалены на $2{,}5$ смот центра. Момент инерции определить относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр ($\rho = 8{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$).

9. Из колодца с помощью ворота поднималось ведро с водой массой 10 кг. В момент, когда ведро находилось на высоте 5 м от поверхности воды, рукоятка освободилась, и ведро стало двигаться вниз. Определить линейную скорость рукоятки в момент удара ведра о поверхность воды, если радиус рукоятки 30 см, радиус вала ворота 10 см и его масса 20 кг.

10. Человек стоит в центре круглой сплошной платформы массой 50 кг и радиусом 1 м, которая может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, и держит в руках шест массой 12 кг и длиной 3 м за его середину. Вся система приводится во вращение с угловой скоростью $2\ \text{рад}/\text{с}$. Определить, как изменится угловая скорость, если человек вначале держал шест вертикально, а затем горизонтально. Моментом инерции человека пренебречь.

11. Диаметр диска 20 см, масса 800 г. Определить момент инерции диска относительно оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно к плоскости диска.

12. Маховик вращается по закону, выражаемому уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $B = 1\text{рад}/\text{с}$, $C = 1\text{рад}/\text{с}^2$. Момент инерции маховика равен $50\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$. Чему равна мощность в конце третьей секунды?

Вариант 6

1. Две материальные точки движутся согласно уравнениям $x_1 = 4t + 8t^2 - 16t^3$ и $x_2 = 2t - 4t^2 + t^3$. В какой момент времени ускорения этих точек будут одинаковы? Найти скорости точек в этот момент.

2. Тело брошено со стола горизонтально. При падении на пол его скорость равна 7,8 м/с. Высота стола 1м. Чему равна начальная скорость тела?

3. Точка обращается по окружности радиусом 1,2 м. Уравнение движения точки $\varphi = At + Bt^3$, где $A = 0{,}5$ рад/с; $B = 0{,}2$ рад/с^2. Определить тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки в момент времени 4 с.

4. Маховик, вращающийся с постоянной частотой 10 об/с, при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, вращение маховика сделалось равномерным, но уже с частотой 6 об/с. Определить угловое ускорение маховика и продолжительность торможения, если за время равнозамедленного движения маховик сделал 50 оборотов.

5. Две гири весом 19,6 и 9,8 Нсоединены нитью и перекинуты через невесомый блок. Найти: 1) ускорение, с которым движутся гири; 2) натяжение нити. Трением в блоке пренебречь.

6. Стальной шарик массой 20 г, падая с высоты 1м на стальную плиту, отскакивает от нее на высоту 81 см. Найти: 1) импульс силы, полученный плитой за время удара; 2) количество тепла, выделившегося при ударе.

7. Конькобежец, стоя на льду, бросил вперед гирю массой 5кг и вследствие отдачи покатился со скоростью v. Определить эту скорость, если конькобежец совершил при бросании работу 390 Дж. Масса человека 60кг.

8. Определить ускорение тела, соскальзывающего с наклонной плоскости, если угол наклона плоскости 30°, а коэффициент трения на всем пути движения равен 0,3. Какова была скорость в конце наклонной плоскости, если путь, пройденный телом на горизонтальном участке, 10 м.

9.Маховик в виде диска массой 50 кг и радиусом 20 см раскручен до частоты 480 об/мин и затем предоставлен самому себе. Под влиянием трения маховик остановился. Найти момент сил трения, если маховик остановился через 50 с.

10. Два маленьких шарика массами 10 и 15 г каждый скреплены тонким стержнем длиной 20 см и массой 20 г. Определить момент инерции системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр тяжести системы.

11. Сплошной однородный диск катится по горизонтальной плоскости со скоростью 10 м/с. Какое расстояние пройдет диск до остановки, если его предоставить самому себе? Коэффициент трения при движении диска 0,02.

12. Человек стоит на скамейке Жуковского и ловит рукой мяч массой $20\ \text{г}$, летящий в горизонтальном направлении со скоростью $20\ \text{м/с}$.Траектория мяча проходит на расстоянии $0{,}8$ м от вертикальной оси вращения скамейки. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамейка с человеком, поймавшим мяч? Считать, что суммарный момент инерции человека и скамейки $I = 6\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Вариант 7

1. Тело движется прямолинейно. Зависимость пройденного пути от времени определяется уравнением $S = (0{,}5t + t^2)$ м. Определить зависимость скорости и ускорения от времени; среднюю скорость тела за вторую секунду; путь, пройденный телом за пятую секунду.

2. Камень брошен с горы по горизонтальному направлению со скоростью $15\ \text{м/с}$. Через сколько времени его скорость будетнаправлена под углом $45°$ к горизонту?

3. Диск радиусом 10 см, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением, равным $0{,}5\ \text{рад/с}$. Каковы были тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения? Сколько оборотов сделает диск за 2 секунды?

4. Маховик из состояния покоя начал вращаться равноускоренно, сделав 40 оборотов, продолжал вращаться с постоянной угловой скоростью $8\ \text{рад/с}$. Определить угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного вращения.

5. По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $30°$, движется тело массой 5 кг . К этому телу с помощью нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок, привязано другое тело такой же массы, движущееся в вертикальной плоскости. Коэффициент трения скольжения между телом и наклонной плоскостью $0{,}05$. Определить ускорение тел и силу, действующую на ось блока.

6. Орудие, жестко закрепленное на железнодорожной платформе, производит выстрел вдоль полотна железной дороги под углом $30°$ к линии горизонта. Определить скорость отката платформы, если снаряд вылетает со скоростью $480\ \text{м/с}$. Масса платформы с орудием и снарядами 18 т, масса снаряда 60 кг.

7. Пуля массой 10 г, летевшая со скоростью 600 м/с, попала в баллистический маятник массой 5 кг и застряла в нем. На какую высоту, откачнувшись после удара, поднялся маятник?

8. Цилиндр, расположенный горизонтально, может вращаться около оси, совпадающей с осью цилиндра. Масса цилиндра 12 кг. На цилиндр намотали шнур, к которому привязали гирю массой 1 кг. С каким ускорением будет опускаться гиря? Какова сила натяжения шнура во время движения гири?

9. Длина прямого стержня 60 см, масса 100 г. Определить момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной к его длине и проходящей через точку стержня, удаленную на 20 см от одного из его концов.

10.Кинетическая энергия вала, вращающегося с постоянной частотой 500 об/с, равна 60 Дж. Найти момент импульса этого вала. Каков будет момент силы трения, если частота вращения уменьшится до 20 об/с за 10 с?

11. На верхней поверхности горизонтального диска, который может вращаться вокруг вертикальной оси, проложены по окружности радиуса 50 см рельсы игрушечной железной дороги. Масса диска 10 кг, его радиус 60 см. На рельсы неподвижного диска был поставлен заводной паровозик массой 1кг и выпущен из рук. Он начал двигаться относительно рельсов со скоростью 0,8 м/с. С какой угловой скоростью будет вращаться диск?

12. Мощность, затраченная на подъем груза массой 10 кг на высоту 12 м, равна 64 Вт. Веревка, к которой привязан груз, переброшена через блок радиусом 10см, и момент сил трения равен 3 Н · м. Сколько времени поднимали груз, если подъём равномерный?

Вариант 8

1. Уравнение движения материальной точки по прямой имеет вид $x = A + Bt + Ct^2$, где $A = 5$м, $B = 4$ м/с, $C = -1$ м/с . Определить среднюю скорость движения за интервал времени от 1 до 6 с.

2. Диск радиусом 10 см, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением, равным 0,5 рад/с. Каковы были тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения?

3.Дальность полета тела, брошенного горизонтально со скоростью 4,9 м/с, равна высоте, с которой его бросили. Чему равна эта высота и под каким углом к горизонту тело упало на землю ?

4. Груз, подвешенный на динамометре, поднимается сначала ускоренно, затем равномерно и, наконец, замедленно. Масса груза равна 1 кг. Абсолютная величина ускорения во всех случаях постоянна и равна 0,5 м/с. Что показывает динамометр в различные моменты движения?

5. Пуля массой 10 г, двигавшаяся со скоростью 200 м/с, врезалась в доску и углубилась в нее на расстояние 4 см. Определить среднюю силу сопротивления доски и время движения пули в доске, считая движение пули внутри доски равномерно замедленным.

6. Молот массой 10 кг ударяет по небольшому куску мягкого железа, лежащему на наковальне. Масса наковальни 400 кг. Определить к.п.д. удара молота при данных условиях. Удар считать неупругим. Полезной считать энергию, пошедшую на деформацию куска железа.

7. Аэросани массой 100 кг, движущиеся по горизонтальному участку пути со скоростью 30 км/ч, развивают мощность, равную 22 к$Вт$. Какую мощность должны они развивать при движении в гору с уклоном 10° с той же скоростью?

8. Сплошной цилиндр диаметром 12 см, имеющий массу 3 кг, лежит боковой поверхностью на горизонтальной плоскости. Определить момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей по линии его контакта с плоскостью.

9. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязали грузы массами 100 и 110 г. С каким ускорением будут двигаться грузы, если масса блока 400 г? Трением пренебречь.

10. С какой скоростью должен въехать велосипедист в нижнюю точку мертвой петли радиусом 6 м, чтобы не сорваться вниз? Масса велосипедиста равна 90 кг, масса обоих колес равна 6 кг. Трением пренебречь, массу колес считать сосредоточенной в ободах.

11. На краю платформы в виде диска, вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси с частотой 8 об/мин, стоит человек массой 70 кг. Когда человек перешел в центр платформы, она стала вращаться с частотой 10 об/мин. Определить массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

12. Платформа в виде диска радиусом 1 м вращается по инерции, делая 0,1 об/с. На краю платформы стоит человек, масса которого 80 кг. Сколько оборотов в секунду будет делать платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции платформы равен $120 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Вариант 9

1. Зависимость перемещения от времени выражается уравнением $S = S_0 + At^2 - Bt^3$, где A и B– постоянные. Определить зависимости скорости и ускорения от времени; перемещение тела через 3 с, если наибольшая скорость тела через 2 с после начала движения равна 3 м/с.

2.Тело брошено под углом к горизонту с начальной скорость 10 м/с. Определить скорость тела в тот момент, когда оно оказалось на высоте 3 м.

3. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ рад, $B = 20$ рад/с, $C = -2$ рад/с^2. Для момента времени 4 с найти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии 0,1 м от оси вращения.

4. Для определения скорости полета пули на горизонтальную ось мотора, вращающегося с частотой 24 об/с, жестко насаживают два диска из тонкой бумаги на расстоянии 80 см друг от друга. Пуля, пущенная горизонтально, пробивает оба диска, причём вторая пробоина смещена относительно первой на угол 54°. Определить скорость пули.

5. На столе лежит тело массой 2 кг. К телу привязана нить, перекинутая через неподвижный блок. К другому концу нити прикреплено тело массой 1 кг. С каким ускорением будут двигаться оба тела? Коэффициент трения тела о поверхность стола равен 0,2. Каково будет натяжение нити при движении?

6. Тело массой 200 г движется со скоростью $B = 10$ м/с, ударяет неподвижное тело массой 800 г. Удар прямой, центральный, абсолютно упругий. Определить скорости тел после удара.

7. Молот массой 15 кг ударил со скоростью 5 м/с наковальню массой 150 кг. Рассматривая удар как абсолютно неупругий, найти энергию, которая идет на деформацию и потом превращается в теплоту.

8. Гиря, положенная на верхний конец спиральной пружины, сжимает ее на 2 мм. Насколько сожмёт пружину та же гиря, упавшая на конец пружины с высоты 5 мм?

9. Маховик в виде однородного диска массой 50 кг и радиусом 20 см был раскручен до частоты 480 об/мин и затем предоставлен самому себе. Под влиянием трения маховик остановился. Найти момент сил трения, если маховик до полной остановки сделал 200 об.

10. Шар катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Полная кинетическая энергия шара 14 Дж. Определить кинетическую энергию поступательного и вращательного движения шара.

11. Два маленьких шарика массой100 и 200 г соединены легким стержнем. Расстояние между центрами масс шариков 0,9 м. Система начинает вращаться с постоянным угловым ускорением 0,5 рад/с^2 относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через центр масс. Определить момент импульса и момент силы через 10 с после начала движения; работу, совершенную за это время.

12. Платформа в виде сплошного диска радиусом 1,5 м и массой 180 кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой 10 об/мин. В центре платформы стоит человек массой 50 кг. Какую линейную скорость относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Вариант 10

1. В последнюю секунду свободного падения тело прошло пятую часть своего пути. С какой высоты оно упало?

2. Камень брошен с башни под углом 30° к горизонту со скоростью 10 м/с. Каково кратчайшее расстояние между местом бросания и местом нахождения камня спустя 4 с после бросания?

3. Точка движется по окружности радиусом 4 м. Закон ее движения выражается уравнением $S = 8 - 2t^2$, где S– в метрах, t – в секундах. Найти: 1) в какой момент времени нормальное ускорение точки $a_n = 9$ м/с^2; 2) чему равны скорость, тангенциальное и полное ускорения точки в этот момент времени?

4. На цилиндр, который может вращаться около горизонтальной оси, намотана нить. К концу нити привязали груз и предоставили ему опускаться. Двигаясь равноускоренно, груз за 3 с опустился на 1,5 м. Определить угловое ускорение цилиндра, если его радиус равен 4 см.

5. С какой минимальной силой, направленной горизонтально, нужно прижать плоский брусок к стене, чтобы он не соскользнул вниз? Масса бруска 5 кг, коэффициент трения между стенкой и бруском равен 0,1.

6. Шар массой $10\,\text{кг}$ сталкивается с шаром массой $4\,\text{кг}$. Скорость первого шара $4\,\text{м/с}$, второго $12\,\text{м/с}$. Найти общую скорость шаров после удара в двух случаях: 1) когда малый шар догоняет большой шар, движущийся в том же направлении; 2) когда шары движутся навстречу дуг другу. Удар считать прямым, центральным, неупругим.

7. С вершины идеально гладкой сферы соскальзывает небольшой груз. С какой высоты h, считая от вершины, груз сорвется со сферы? Радиус сферы $90\,\text{см}$.

8. Найти работу подъёма груза по наклонной плоскости, если масса груза$100\,\text{кг}$, длина наклонной плоскости $2\,\text{м}$, угол наклона $30°$, коэффициент трения $0{,}1$ и груз движется с ускорением $1\,\text{м/с}^2$.

9. Двум одинаковым маховикам, находящимся в покое, сообщили одинаковую угловую скорость $63\,\text{рад/с}$ и предоставили их самим себе. Под действием сил трения первый маховик остановился через одну минуту, а второй сделал до полной остановки $360\,\text{об}$. У какого маховика тормозящий момент был больше и во сколько раз?

10. Вертикальный столб высотой $5\,\text{м}$ подпиливается у основания и падает на землю. Определить линейную скорость его верхнего конца в момент удара о землю. Какая точка столба будет в любой момент падения столба иметь ту же скорость, какую имело бы тело, падая с такой же высоты, как и данная точка?

11. Диаметр диска $20\,\text{см}$, масса $800\,\text{г}$. Определить момент инерции диска относительно оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно к плоскости диска.

12. Платформа в виде диска радиусом $1\,\text{м}$вращается по инерции, делая $0{,}1\,\text{об/с}$. На краю платформы стоит человек, масса которого $80\,\text{кг}$. Сколько оборотов в секунду будет делать платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции платформы равен $120\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Вариант 11

1. Материальная точка движется прямолинейно. Уравнение движения материальной точки $x = 3t + 0{,}06t^3$. Найти скорость и ускорение точки в моменты времени $t_1 = 0$, $t_2 = 3с$. Каковы средние значения скорости и ускорения за первые 3 с движения?

2. Камень, брошенный горизонтально с крыши дома со скоростью $15\,\text{м/с}$, упал на землю под углом $60°$ к горизонту. Какова высота дома?

3. Колесо, вращаясь равнозамедленно, при торможении уменьшило свою скорость за 1 минуту с 240 до 180 об/мин. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов, сделанных им за это время.

4. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = At^3$, где $A = 210$ рад/с^3. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол 60° с ее вектором скорости?

5. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинута нить, к концам которой привязали грузы массой 1,5 и 3 кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Весом блока и нити пренебречь.

6. Орудие, имеющее массу ствола 500 кг, стреляет в горизонтальном направлении. Масса снаряда 5 кг, его начальная скорость 460 м/с.При выстреле ствол откатывается на расстояние 40 см. Определить среднее значение силы торможения, возникающей в механизме, тормозящем ствол.

7. Автомобиль, имеющий массу 1 т, трогается с места в гору с углом $\alpha = 30°$ и, двигаясь по ней равноускоренно, проходит путь 20 м за время 2 с. Какую мощность должен развить мотор этого автомобиля? Коэффициент трения 0,1.

8. Сплошной шар массой 1 кг и радиусом 0,05 м вращается вокруг оси, проходящей через его центр. В точке, наиболее удаленной от оси вращения, на шар действует сила, касательная к поверхности. Угол поворота шара меняется по закону $\varphi = 2 + 2t - t^2$. Определить величину действующей силы; тормозящий момент; время равнозамедленного движения.

9.Определить момент инерции диска радиусом 30 см и массой 20 кг относительно оси, перпендикулярной диску и проходящей через: 1) середину одного из радиусов; 2) касательную к поверхности диска.

10. Однородный тонкий тяжелый стержень, длина которого 1 м, висит на горизонтальной оси, проходящей через один из концов. Стержень отклонили от положения равновесия на угол 60° и отпустили. Определить линейные скорости конца стержня и центра массы при прохождении через положение равновесия.

11. Шар скатывается с наклонной плоскости высотой 90 см.Какую линейную скорость будет иметь центр шара в тот момент, когда шар скатится с наклонной плоскости?

12. Платформа в виде диска вращается по инерции около вертикальной оси с частотой 15 об/мин. На краю платформы стоит человек. Когда человек перешел в центр платформы, частота возросла до 25 об/мин. Масса человека 70 кг. Определить массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Вариант 12

1. Движение точки по прямой задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 2\text{ м/с}$; $B = -0{,}5\text{ м/с}^2$. Определить среднюю скорость движения точки в интервале времени от 1 до 3 с.

2. Пуля выпущена со скоростью 800 м/с под утлом $30°$ к горизонту. Найти: 1) время полета пули до падения на землю; 2) наибольшую высоту, на которую поднимается пуля при полете. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Определить скорость и полное ускорение точки в момент времени $t = 2\ c$, если она движется по окружности радиусом 1мсогласно уравнению $\varphi = At + Bt^3$, где $A = 8\text{ м/с}$; $B = -1\text{м/с}^3$; φ - криволинейная координата, отсчитанная от некоторой точки, принятой за начальное, вдоль окружности.

4. Маховик из состояния покоя начал вращаться равноускоренно и, сделав 40 об., продолжал вращаться с постоянной угловой скоростью 8 рад/с. Определить угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного вращения.

5. Тело массой $0{,}2\text{ кг}$движется с постоянной скоростью $0{,}5\text{ м/с}$ по окружности. Определить изменение импульса тела за время прохождения им четверти окружности.

6. Санки скатываются с ледяной горы высотой 3 м и останавливаются на ледяном поле на расстоянии 15 м по горизонтальному направлению от вершины наклонной плоскости. Определить коэффициент трения.

7. С какой наименьшей высоты должен скатиться акробат на велосипеде (не работая ногами), чтобы проехать по дорожке, имеющей форму мертвой петли, радиусом 4ми не оторваться от дорожки в верхней точке петли? Трением пренебречь.

8. Определить момент инерции стержня длиной 30 см и массой 100 г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: 1) его конец; 2) точку, отстоящую от конца стержня на одну треть его длины.

9. Тонкостенный цилиндр, масса которого 12 кг, а диаметр 30 см, вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 4$ рад; $B = -2$ рад/с; $C = 0{,}2$ рад/с^3. Определить действующий на цилиндр момент сил в момент времени $t = 3\ c$.

10. Через блок, выполненный в виде колеса, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массами 100 и 300 г. Массу колеса 200 г считать равномерно распределенной по ободу, массой спиц пренебречь. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы, и силы натяжения нити по обе стороны блока.

11. По горизонтальной плоской поверхности катится диск со скоростью 8 м/с. Определить коэффициент сопротивления, если диск, будучи предоставленным самому себе, остановился, пройдя путь 18 м.

12. На краю неподвижной скамьи Жуковского диаметром 0,8 м и массой 6кгстоит человек массой 60 кг. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья, если человек поймает летящий на него мяч массой 0,5 кг? Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии 0,4 м от оси скамьи. Скорость мяча 5 м/с.

Вариант 13

1.Движение двух материальных точек выражается уравнениями: $x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$, где $A_1 = 20$ м, $B_1 = 2$ м/с; $C_1 = -4$ м/с^2; $x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, где $A_2 = 2$ м; $B_2 = 2$ м/с; $C_2 = 0{,}5$ м/с^2. В какой момент времени скорости этих точек будут одинаковыми? Чему равны скорости и ускорения точек в этот момент?

2. Пуля выпущена со скоростью 800 м/с под углом 30° к горизонту. Найти: 1) горизонтальную дальность полёта; 2) радиус кривизны траектории в её верхней точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Диск радиусом 0,2м вращается согласно уравнению $\varphi = 3 - t + 0{,}1t^3$. Определить тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска для момента времени $t = 10\ c$.

4. Шар радиусом 16 см насажен на горизонтальную ось и катится по плоской поверхности со скоростью 60 см/с, описывая окружность радиусом 30 см. Определить полную угловуюскорость шара и её наклон к горизонту.

5. С какой силой кувалда действует на наковальню массой 50 кг, если вес кувалды 80 Н, высота поднятия 1 м и продолжительность удара 0,005 с? Считать, что кувалда падает только под действием собственного веса, удар неупругий. Найти к.п.д. кувалды, если полезной считать энергию, пошедшую на деформацию наковальни.

6. Тележка с песком катится со скоростью 2 м/с по горизонтальному пути без трения. Навстречу тележке летит шар массой 2 кг с горизонтальной скоростью 7 м/с. Удар абсолютно неупругий. В какую сторону, и с какой скоростью покатится тележка после встречи с шаром? Масса тележки равна 10 кг.

7. Как велика работа, совершаемая при равноускоренном подъёме груза массой 100 кг на высоту 4 м за 2 с?

8. На горизонтальную ось насажен маховик и легкий шкив радиусом 5 см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой 0,4 кг. Опускаясь равноускоренно, груз прошел путь 1,8 м за 3 с. Определить момент инерции маховика. Массой шкива пренебречь.

9. На концах стержня массой 200 г и длиной 30 см укреплены одинаковые грузики по 20 г на каждом конце. Определить момент инерции стержня с грузиками относительно оси, проходящей через точку, удаленную на 10 см от одного из концов стержня, расположенную перпендикулярно стержню.

10. Шар катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Полная кинетическая энергия шара 14 Дж. Определить кинетическую энергию поступательного и вращательного движений шара.

11. На какой угол надо отклонить однородный стержень, подвешенный на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня, чтобы нижний конец стержня при прохождении им положения равновесия имел скорость 5 м/с?Длина стержня 1 м.

12. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек. На какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя его, вернется в исходную точку? Масса платформы 240 кг, масса человека 60 кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Вариант 14

1.По прямой линии движутся две материальные точки согласно уравнениям: $x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$ и $x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, где $A_1 = 10$ м, $B_1 = 1$ м/с; $C_1 = 2$ м/с^2; $A_2 = 3$ м; $B_2 = 2$ м/с; $C_2 = 0{,}2$ м/с^2. В какой момент времени t скорости этих точек будут одинаковы? Найти ускорение этих точек в момент $t = 3\ c$.

2. Камень, брошенный горизонтально на высоте 2 м над землей, упал на расстоянии 7 м от места бросания (считая по горизонтали). Найти его начальную и конечную скорости.

3. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 6t - 2t^3$. Найти: 1) средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от $t = 0$ до остановки; 2) угловое ускорение в момент остановки тела.

4. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости 20 рад/с через 10 оборотов после начала вращения. Найти угловое ускорение колеса; через сколько времени от начала вращения угловая скорость станет 40 рад/с?

5. На наклонной плоскости находится груз массой $m_1 = 5$ кг, связанный нитью, перекинутой через блок, с другим грузом $m_2 = 2$ кг. Коэффициент трения между первым грузом и плоскостью 0,1; угол наклона плоскости к горизонту 37° . Определить ускорение грузов. При каких значениях m_2 система будет находиться в равновесии?

6. Пуля массой $9 \cdot 10^{-3}$ кг, двигаясь со скоростью 500 м/с, попадает в доску и углубляется в нее на $6 \cdot 10^{-2}$ м. Определить время движения пули внутри доски и силу сопротивления доски движению пули.

7. Деревянный шар массой 10 кг подвешен на нити длиной 2 м. В шар попадает горизонтально летящая пуля массой 5 ги застревает в нем. Определить скорость пули, если нить с шаром отклонилась от вертикали на угол 30°.

8. На однородном стержне длиной 30 см и массой 300 г укреплены два маленьких шарика массами 300 и 600 г: первый на конце стержня, второй – в середине. Определить момент инерции системы относительно оси, проходящей через свободный конец стержня и перпендикулярной стержню. Грузики рассматривать как материальные точки.

9. Вал массой 1 кг и радиусом 5 см вращался с частотой 8 об/с. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой 40 Н, под действием которой вал остановился через 10 с. Определить коэффициент трения.

10. К ободу сплошного однородного диска массой 5 кг приложена постоянная касательная сила 19,8 Н. Какую кинетическую энергию будет иметь диск через 5 с после начала действия силы?

11. Определить линейную скорость центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой 1 м.

12. Шарик массой 0,1 кг, привязанный к концу нити длиной 1 м, вращается, опираясь на горизонтальную плоскость, с частотой 1 об/с. Нить укорачивается, приближая шарик к оси вращения до расстояния 0,5 м. С какой частотой будет вращаться при этом шарик? Трением шарика о плоскость пренебречь. Определить работу, которую совершает внешняя сила, укорачивая нить.

Вариант 15

1. Материальная точка движется прямолинейно. Уравнение движения имеет вид: $x = 3t - 0{,}06t^3$ (длина – в метрах, время –в секундах). Найти скорость и ускорение точки в моменты времени $t = 0$ и $t_2 = 3$ с. Каковы средние значения скорости и ускорения за первые 3 с движения?

2. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении со скоростью 30 м/с. Определить скорость, тангенциальное и нормальное ускорения камня в конце второй секунды после начала движения.

3. Материальная точка движется по окружности радиуса 2 м согласно уравнению $S = 8t - 0{,}2t^3$ (длина в метрах, время в секундах). Найти скорость, тангенциальное и полное ускорения в момент времени $t = 3$ с.

4. По дуге окружности радиуса 10 м вращается точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки равно 4,9 м/с, вектор полного ускорения образует в этот момент с вектором нормального ускорения угол 60°. Найти скорость и тангенциальное ускорение точки.

5. Из точки с координатами (0,0) брошено тело массой 1 кг под углом 30° к горизонту с начальной скоростью 20 м/с. Найти кинетическую и потенциальную энергии тела через 1,5 с после начала движения и в наивысшей точке траектории.

6. На рельсах стоит платформа, на которой в горизонтальном положении закреплено орудие без противооткатного устройства. Из орудия производят выстрел вдоль железнодорожного пути. Масса снаряда 10 кг, скорость снаряда при вылете из орудия 1 км/с. Масса платформы с орудием 20 т. На какое расстояние откатится платформа после выстрела, если коэффициент трения равен 0,002?

7. Найти работу подъема груза на наклонной плоскости, если масса груза 100 кг, длина наклонной плоскости 2 м, угол наклона 30° , коэффициент трения 0,1 и груз движется с ускорением 1 м/с^2.

8. С вершины горки скатывается тело и останавливается в точке, из которой вершину видно под углом $6°$. Определить коэффициент трения, если он на всех участках одинаков.

9. Нить с привязанными к ее концам грузами массой 50 и 60 г перекинута через блок диаметром 4 см. Определить момент инерции блока, если под действием силы тяжести грузов он получил угловое ускорение $1{,}5$ рад/с^2.

10. Два маленьких шарика массами $0{,}04$ и $0{,}12$ кг соединены стержнем длиной $0{,}2$ м, масса которого ничтожно мала. Определить момент инерции этой системы относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через центр тяжести системы.

11. Пуля массой 10 г летит со скоростью 800 м/с, вращаясь около продольной оси с частотой 3000 об/с. Принимая пулю за цилиндрик диаметром 8 мм, определить полную кинетическую энергию.

12. Человек стоит на вращающемся столике (скамье Жуковского). Столик вращается, делая $0{,}5$ об/с. Момент инерции столика относительно оси вращения $1{,}6$ кг $\cdot$ м^2. В вытянутых в стороны руках человек держит гири массой 2 кг каждая. Расстояние между гирями $1{,}6$ м. Сколько оборотов в секунду будет делать столик с человеком, если он опустит руки и расстояние между гирями станет $0{,}4$ м? Моментом инерции человека пренебречь.

Вариант 16

1.Движение материальной точки, перемещающейся по прямой, задано уравнением $S = 1 + 2t + 4t^3$. Найти в интервале времени от 1 до 2 с мгновенные скорости в начале и в конце интервала; среднюю скорость движения; мгновенное ускорение в начале и в конце заданного интервала времени.

2. С башни высотой 49 м в горизонтальном направлении брошено тяжелое тело со скоростью 5 м/с. Определить тангенциальное и нормальное ускорение тела в точке, соответствующей половине всего времени падения тела. Установить, на каком расстоянии от башни оно упало. Сопротивление воздуха не учитывать.

3. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса от времени определяется уравнением $\varphi = 1 + 2t - 2t^3$. Нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, к концу второй секунды движения равно 200 м/с. Определить зависимость от времени угловой и линейной скоростей, углового ускорения для точек, лежащих на ободе колеса; радиус колеса.

4. Чтобы остановить вращающийся маховик, к нему прижали тормозящую колодку. С этого времени он стал вращаться равнозамедленно с ускорением 20 рад/с. Сколько времени потребуется для остановки его, если он вращался со скоростью 360 об/мин? Сколько сделает оборотов?

5. На железнодорожной платформе установлено орудие. Масса платформы с орудием 15 т. Орудие стреляет вверх под углом 60° к горизонту в направлении пути. С какой скоростью покатится платформа вследствие отдачи, если масса снаряда 20 кг и он вылетает со скоростью 600 м/с?

6. Тело, имеющее постоянную массу, до торможения двигалось равномерно, а в момент остановки тормозящая сила достигала значения 40 Н. Определить тормозящую силу через 3 с после начала торможения, если тормозящий путь в зависимости от времени изменялся по закону $S = kt - bt^3$, где $k = 196$ м/с, $b = 1$ м/с^3.

7. По наклонной плоскости с углом наклона 30° соскальзывает упругое тело, которое в конце спуска упруго ударяется о стенку, перпендикулярную наклонной плоскости и снова поднимается по плоскости? на некоторую высоту $h = 0{,}5$ м. Коэффициент трения между телом и плоскостью 0,4. Найти первоначальную высоту, с которой начало соскальзывать тело.

8. Ось вращения сначала проходила через одну из образующих диска, потом на расстоянии $\frac{R}{2}$ от центра диска, параллельно первой оси и перпендикулярно плоскости диска. Определить отношение их моментов инерции.

9. На обод маховика диаметром 60 см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 2 кг. Определить момент инерции маховика, если он, вращаясь равноускоренно под действием силы тяжести груза, за время 3 с приобрел угловую скорость 9 рад/с.

10. Масса диска 0,5 кг, диаметр его 40 см. Диск вращается, делая 1500 об/мин. При торможении он останавливается в течение 2 с. Определить тормозящий момент.

11. Шар скатывается с наклонной плоскости длиной 7 м и углом наклона 30°. Определить скорость шара в конце наклонной плоскости. Трением пренебречь.

12. На вращающемся столике стоит человек, держащий в вытянутых руках на расстоянии 1,5 м друг от друга 2 гири. Столик вращается, делая 1 об/с. Человек сближает гири до расстояния 0,8 м, и число оборотов увеличивается до 1,5 об/с. Определить работу, произведенную человеком, если масса каждой гири 2 кг.

Вариант 17

1. Движение двух материальных точек выражается уравнениями $x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$ и $x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, где $A_1 = 20\text{м}$; $A_2 = 2\text{м}$; $B_1 = B_2 = 2\text{м/с}$; $\text{C}_1 = -4\text{м/с}^2$; $\text{C}_2 = 0{,}5\text{м/с}^2$. В какой момент времени скорости этих точек будут одинаковыми? Определить ускорения в этот момент времени.

2. Под каким углом к горизонту надо бросить тело со скоростью 20 м/с, чтобы дальность полета была в 4 раза больше наибольшей высоты подъема? Определить радиус кривизны траектории в верхней ее точке.

3. Колесо радиусом $0{,}1$ м вращается ускоренно так, что число оборотов возрастает на $1/2$ оборота за каждую секунду. Найти к концу второй секунды нормальное тангенциальное и полное ускорения точек.

4. Колесо радиусом 10 см вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе колеса, от времени движения дается уравнением $v = At + Bt^2$, где $A = 3\ \text{см}/c^2$ и $B = 1\ \text{см}/\text{с}^3$. Найти угол, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса в моменты времени $t = 1$ с и $t = 2$ с после начала движения.

5. Грузы, массы которых 220 и 270 г, подвешены на невесомой нити, перекинутой через блок. Определить ускорение системы, силу натяжения нитей. Силой трения пренебречь.

6. Тело массой 10 кг брошено с высоты 100 м вертикально вниз со скоростью $14\ \text{м/с}^2$. Определить среднюю силу сопротивления грунта, если тело углубилось в песок на $0{,}2$ м. Сопротивление воздуха не учитывать.

7. По внутренней поверхности полусферической чашки радиусом10 см скатывается без трения шарик радиусом 3 см, начинающий движение на одном краю и заканчивающий на другом. Масса чашки $0{,}9$ кг, масса шарика 100 г. На сколько сантиметров сместится чашка (трение не учитывать)?

8. Ледяная гора составляет с горизонтом угол $30°$. Из некоторой точки по ней снизу вверх движется тело с начальной скоростью 10 м/с. Коэффициент трения скольжения $0{,}1$. Определите скорость тела при его возвращении в ту же точку; высоту поднятия тела.

9. Шар и цилиндр одинаковых масс и радиусов движутся с одинаковой линейной скоростью по горизонтальной плоскости, а потом вкатываются вверх по наклонной плоскости. Определить отношение высот подъема.

10. Через блок, выполненный в виде колеса, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массами 100 и 300 г. Массу колеса 200 г считать равномерно распределенной по ободу, массой спиц пренебречь. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы, и силы натяжения нити по обе стороны блока.

11. Тонкий прямой стержень длиной 1 м прикреплен к горизонтальной оси, проходящей через его конец. Стержень отклонили на угол $60°$ от положения равновесия и отпустили. Определить линейную скорость нижнего конца стержня в момент прохождения через положение равновесия.

12. В центре скамейки Жуковского стоит человек и держит в руках металлический стержень, расположенный вертикально по оси вращения скамейки. При этом скамейка вращается с угловой скоростью 4 рад/с. Момент инерции человека и скамейки 6 кг $\cdot$ м^2. Длина стержня $1{,}5$ м, его масса 8 кг. Определить: число оборотов скамейки в 1с, если ось вращения ее проходит через середину стержня, и человек повернет стержень в горизонтальное положение; работу, совершенную человеком в этом случае.

Вариант 18

1. С какой высоты упало тело, если последний метр своего пути оно прошло за время $0{,}1$ с?

2. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении с начальной скоростью 30 м/с. Определить скорость, тангенциальное и нормальное ускорения камня в конце второй секунды после начала движения.

3.Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A = 1$ рад , $B = 1$рад/с; $C = 1$ рад/с^2 и $D = 1$ рад/с^3. Найти радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды движения нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, равно $a_n = 346$ м/с^2.

4. Маховик, находящийся в покое, начал вращаться равноускоренно и, сделав 150 оборотов, приобрел угловую скорость, соответствующую 10 рад/с. Определить угловое ускорение маховика и продолжительность равноускоренного вращения.

5. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинули шнур, к концам которого привязали грузы массой $1{,}5$ и 3 кг. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

6. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $45°$. Пройдя расстояние $36{,}4$ см, тело приобретает скорость 2 м/с. Чему равен коэффициент трения тела о плоскость?

7. Два груза массами 10 и 15 кг подвешены на нитях длиной $l = 2$ м так, что грузы соприкасаются между собой. Меньший груз отклонен на угол $60°$ и выпущен. На какую высоту поднимутся оба груза после удара? Удар грузов считать неупругим.

8. Массы шариков 1 и $1{,}5$ кг. Шарики соединены невесомым стержнем длиной 40 см. Определить момент инерции этой системы относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через центр тяжести системы.

9. Маховик, вращающийся по закону, выражаемому уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 2$ рад; $B = 16$ рад/с; $C = -2$рад/с^3, имеет момент инерции равный 50 кг $\cdot$ м^2. Чему равны мощность и момент силы через 3 с от начала вращения?

10. Маховик насажен на горизонтальную ось. На обод маховика намотан шнур, к которому привязан груз массой 0,8 кг. Радиус обода 5 см. Опускаясь равноускоренно, груз прошел 1,6 мза 2 с. Определить момент инерции маховика.

11. Диск катится в течение 3 с и останавливается, пройдя расстояние 10 м. Определить коэффициент трения.

12. Человек стоит на неподвижной скамейке Жуковского и ловит мяч массой 0,3 кг, летящий в горизонтальном направлении на расстоянии 60 см от вертикальной оси вращения скамейки. После этого скамейка стала поворачиваться с угловой скоростью, равной 1 рад/с. Момент инерции человека и скамейки равен 6 кг $\cdot$ м^2 . Определить скорость мяча.

Вариант 19

1. Две материальные точки движутся согласно уравнениям $x_1 = A_1t + B_1t^2 + C_1t^3$ и $x_2 = A_2t + B_2t^2 + C_2t^3$, где $A_1 = 4$м/с; $B_1 = 8$м$|c^2$; $C_1 = -16$м/c^3; $A_2 = 2$м/с; $B_2 = 2$м/c^2; $C_2 = 1$м/c^3. В какой момент времени ускорения этих точек будут одинаковы? Найти скорости точек в этот момент.

2.Тело брошено под углом $30°$ к горизонту со скоростью 20 м/с. Найти тангенциальное и нормальное ускорения в начальный момент движения. Через какое время тело будет находиться на высоте 2 м?

3. Определить полное ускорение в момент $t = 3\ c$ точки, находящейся на ободе колеса радиусом $R = 0{,}5$ м, вращающегося согласно уравнению $\varphi = At + Bt^3$, где $A = 2$ рад/с; $B = 0{,}2$ рад/с^3.

4. Точка движется по окружности радиусом 8 м. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки равнялось 4 м/с^2, вектор полного ускорения образует в этот момент с вектором нормального ускорения угол 60°. Найти скорость и тангенциальное ускорение точки.

5. К нити подвешена гиря. Если поднимать эту гирю с ускорением 2 м/с^2, то натяжение T нити будет вдвое меньше того натяжения, при котором нить разрывается. С каким ускорениемa надо поднимать эту гирю, чтобы нить разорвалась?

6. Тело массой 3 кг движется со скоростью 2 м/с и сталкивается с покоящимся телом массой 5 кг. Какая работа будет совершена при деформации тел? Удар считать абсолютно неупругим, прямым и центральным.

7. С ледяной горы высотой 1 ми основанием 5 м съезжают санки, которые останавливаются, пройдя горизонтальный путь 95 м. Найти коэффициент трения.

8.Два маховика, выполненные в виде дисков радиусом 0,4 м и имеющие массу 100 кг каждый, раскручены до скорости вращения 480 об/мин, предоставлены самим себе. Под действием трения валов о подшипники первый маховик остановился через 80 с, второй маховик до полной остановки сделал 240 оборотов. Определить моменты сил трения вала о подшипники у каждого маховика.

9. Цилиндр, расположенный горизонтально, может вращаться около оси, совпадающей с осью цилиндра. Масса цилиндра 12 кг. На цилиндр намотали шнур, к которому привязали гирю массой 1 кг. С каким ускорением будет опускаться гиря? Какова сила натяжения шнура во время движения гири?

10. Найти кинетическую энергию велосипедиста, едущего со скоростью 9 км/ч. Вес велосипедиста вместе с велосипедом 780 Н, причем на колесо приходится 30 Н. Колеса считать обручами.

11. Маховое колесо начинает вращаться с угловым ускорением 0,5 рад/с и через 15 с после начала движения приобретает момент импульса 73,5 кг $\cdot$ м^2. Найти кинетическую энергию колеса через 20 с после начала вращения и работу.

12. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму сплошного диска радиусом 2 м, стоит человек. Масса платформы 200 кг, масса человека 80 кг. Платформа вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Найти, с какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью $2\ \text{м}/\text{с}^2$ относительно платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Вариант 20

1. Движение материальной точки задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 4\ \text{м}/\text{с};\ B = -0{,}05\ \text{м}/\text{с}^2$. Определить момент времени, в который скорость точки равна нулю. Найти координату и ускорение в этот момент. Построить графики зависимостей скорости и ускорения этого движения от времени.

2. Тело брошено под некоторым углом к горизонту. Найти величину этого угла, если горизонтальная дальность полета тела в 4 раза больше максимальной высоты траектории.

3. Точка движется по окружности радиусом 2 м согласно уравнению $S = 8t - 0{,}2Bt^3$ (длина – в метрах, время – в секундах). Найти скорость, тангенциальное нормальное и полное ускорения в момент времени $t = 3$ с.

4. Вал вращается с постоянной скоростью, соответствующей частоте $180\ \text{об}/\text{мин}$. С некоторого момента вал тормозится и вращается равнозамедленно с угловым ускорением $3\ \text{рад}/\text{с}^2$.Через сколько времени вал остановится? Сколько оборотов он сделает до остановки?

5. Найти силу тяги, развиваемую мотором автомобиля, движущегося в гору с ускорением $1\ \text{м}/\text{с}^2$. Уклон горы равен 1м на каждые 25 м пути. Вес автомобиля $9{,}8 \cdot 10^3$ Н. Коэффициент трения равен 0,1. Найти работу, совершенную двигателем на пути 3 км.

6.На железнодорожной платформе установлено орудие. Орудие жестко скреплено с платформой. Масса платформы и орудия 20 т. Орудие производит выстрел под углом 60° к линии горизонта в направлении пути. Какую скорость приобретает платформа с орудием вследствие отдачи, если масса снаряда 50 кг и он вылетает из канала ствола со скоростью $500\ \text{м}/\text{с}^2$?

7. Молот массой 10 кг ударяет по небольшому куску мягкого железа, лежащему на наковальне. Масса наковальни 0,4 т. Определить к.п.д. удара молота при данных условиях. Удар считать неупругим. Полезной в данном случае является энергия, пошедшая на деформацию куска железа.

8. Цилиндр диаметром 12 см, имеющий массу 3 кг, лежит боковой поверхностью на горизонтальной плоскости. Определить момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей по линии контакта с плоскостью.

9. Маховик радиусом 0,5 м и массой 100 кг, которая равномерно распределена по ободу, вращается с угловой скоростью 5 рад/с. В некоторый момент времени к ободу с силой 100 Н прижимается тормозная колодка, причем коэффициент трения между ободом и колодкой равен 0,25. Найти время торможения и число оборотов маховика до остановки.

10. Блок, имеющий форму диска массой 0,4 кг, вращается под действием силы натяжения нити, к концам которой подвешены грузы массами 0,3 и 0,7 кг. Определить силы натяжения нити по обе стороны блока.

11. Шар катится по горизонтальной плоскости. Какую часть составляет энергия поступательного движения от общей кинетической энергии?

12. На краю платформы в виде диска, вращающегося по инерции вокруг вертикальной оси с частотой 8 об/мин, стоит человек массой 70 кг. Когда человек перешел в центр платформы, она стала вращаться частотой 10 об/мин. Определить массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Вариант 21

1. Движение материальной точки задано уравнением $S = 4t + 0{,}05t^3$ ($S -$ в метрах, $t -$ в секундах). Определить скорость и ускорение точки в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 10$ с, а также средние значения скорости и ускорения точки в промежутке времени от t_1 до t_2..

2.Тело брошено под углом 30° к горизонту со скоростью 30 м/с. Каковы будут нормальное и тангенциальное ускорения тела через 1 с после начала движения?

3. Колесо радиусом 0,1 м вращается с постоянным угловым ускорением 3,14 рад/с^2. Для точек обода колеса найти: 1) угловую скорость; 2)линейную скорость; 3) тангенциальное ускорение; 4) нормальное ускорение; 5) полное ускорение в конце первой секунды после начала движения.

4. Вентилятор вращается с частотой 15 об/с. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения вентилятора до полной остановки?

5. Гиря, положенная на верхний конец спиральной пружины, сжимает ее на 1,0 мм. На сколько сожмет пружину эта же гиря, брошенная вниз с высоты 0,2 м/с начальной скоростью 1,0 м/с?

6. По наклонной плоскости высотой 0,5 ми длиной склона 1 м скользит тело массой 3 кг. Тело приходит к основанию наклонной плоскости со скоростью 2,45 м/с. Найти: 1) коэффициент трения тела о плоскость; 2) количество тепла, выделенного при трении. Начальная скорость тела равна нулю.

7. Два шара подвешены на нитях длиной 1 м и касаются друг друга. Массы их 800 и 200 г. Меньший шар отводят в сторону так, что нить отклоняется на угол 90°, и отпускают. Принимая шары за идеально упругие, определить: 1) на какую высоту они поднимутся после удара; 2) что произойдет, если отклонить большой шар?

8.Вычислить момент инерции обода радиусом 0,5 м и массой 3 кг относительно оси, проходящей через точку, отстоящую на расстоянии радиуса от центра обода.

9. Двум одинаковым маховикам, находящимся в покое, сообщили одинаковую угловую скорость 63 рад/с и предоставили их самим себе. Под действием сил трения один маховик остановился через одну минуту, а второй сделал до полной остановки 360 оборотов. У какого маховика тормозящий момент был больше и во сколько раз?

10. Кинетическая энергия вращающегося маховика равна 1000 Дж. Под действием постоянного тормозящего момента маховик начал вращаться равнозамедленно и, сделав 80 оборотов, остановился. Определить момент сил торможения.

11. Определить скорость поступательного движения сплошного цилиндра, скатившегося с наклонной плоскости высотой 20 см.

12. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек. На какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется в исходную точку? Масса платформы 240 кг, масса человека 60 кг. (Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки).

Вариант 22

1. Уравнение пути S от времени *t* дается уравнением $S = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A = 01$ м; $B = 0{,}1\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $C = 0{,}14$ м/с^2 и $D = 0{,}01$ м/с^3. Через сколько времени после начала движения ускорение тела будет равно $1\ \text{м/с}^2$? Чему равно среднее ускорение тела за этот промежуток времени?

2. Тело падает вертикально с высоты 19,6 м с нулевой начальной скоростью. За какое время тело пройдет: 1) первый метр своего пути; 2) последний метр своего пути ? Сопротивление воздуха не учитывать.

3. Точка движется по окружности радиусом 4 м. Закон ее движения выражается уравнением $S = A + Bt^3$, где $A = 8$ м, $B = -2\ \text{м/с}^3$. Определить момент времени t, когда нормальное ускорение точки равно $9\ \text{м/с}^2$. Найти скорость, тангенциальное и полное ускорения точки в тот же момент времени t.

4. Ротор электродвигателя, вращающийся с частотой 15 об/с, после выключения двигателя остановился через 10 с. Если считать вращение равнозамедленным, определить угловое ускорение ротора. Сколько оборотов сделал ротор до остановки?

5. Тело массой 100 кг поднимают по наклонной плоскости с ускорением $2\ \text{м/с}^2$. Какую силу, параллельную наклонной плоскости, необходимо приложить для подъема тела? Коэффициент трения соприкасающихся поверхностей равен 0,2; угол наклона 30°.

6. На рельсах стоит платформа, на которой в горизонтальном положении закреплено орудие без противооткатного устройства. Из орудия производят выстрел вдоль железнодорожного пути. Масса снаряда 10 кг, скорость снаряда при вылете из орудия 1 км/с. Масса платформы с орудием и прочим грузом 20 т. На какое расстояние откатится платформа после выстрела, если коэффициент трения равен 0,002?

7. Тело массой 1 кг, брошенное с вышки в горизонтальном направлении со скоростью 20 м/с, через 3 с упало на землю. Определить кинетическую энергию, которую имело тело в момент удара о землю.

8. На концах тонкого стержня длиной 1 м и массой 400 г находятся два шарика массами 200 и 300 г. Найти момент инерции системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину.

9. Тело приводится во вращение с помощью груза, соединенного со шнуром, предварительно намотанным на ось. Определить момент инерции вращающегося тела, если груз массой 5 кг в течение 2 с опускается на расстояние 2 м. Диаметр оси, на которую намотан шнур, равен 20 мм. Силой трения пренебречь.

10. Маховик в виде сплошного диска массой 80 кг и радиусом 30 см находится в состоянии покоя. Какую работу нужно совершить, чтобы сообщить маховику частоту 10 об/с? Какую работу пришлось бы совершить, если бы при той же массе диск имел меньшую толщину, но вдвое больший радиус ?

11. Шар скатывается по наклонной плоскости длиной $l = 7$ см с углом наклона $30°$. Определить скорость шара в конце наклонной плоскости. Трением пренебречь.

12. Горизонтальная платформа массой 150 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой 8 об/мин. Человек массой 70 кг стоит при этом на краю платформы. С какой угловой скоростью начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу круглым однородным диском, а человека – материальной точкой.

Вариант 23

1. Закон движения точки по некоторой кривой выражается уравнением $S = 2 - 4t^2 + t^3$. Найти радиус кривизны траектории в том месте, где точка будет находиться в момент времен $t = 4$ с, если нормальное ускорение в этот момент равно 6 м/с^2.

2. Камень, брошенный горизонтально на высоте 2 м над землей, упал на расстоянии 7 м от места бросания (считая по горизонтали). Найти его начальную и конечную скорости.

3. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением 2 рад/с. Через $0{,}5$ с после начала движения полное ускорение колеса стало равно $13{,}6$ см/с. Найти радиус колеса.

4. Тело вращалось равнозамедленно с начальной угловой скоростью 10 рад/с. После того как тело совершило 20 оборотов, скорость его уменьшилась до 4 рад/с. Найти угловое ускорение и время, в течение которого изменилась скорость.

5. Сани массой 200 кг движутся равноускоренно в горизонтальном направлении. Действующая сила в 1000 Н приложена под углом $30°$ к горизонту. Коэффициент трения равен $0{,}05$. Определить ускорение.

6. Стальной шарик массой $0{,}02$ кг, падая с высоты 1 м на стальную плиту, отскакивает от нее на высоту 81 см. Найти: 1) импульс силы, полученный плитой за время удара; 2) количество тепла, выделившегося при ударе.

7. Пуля массой 10 г, летевшая со скоростью 500 м/с, попала в шар массой 5 кг, подвешенный на нити, и застряла в нем. На какую высоту, откачнувшись после удара, поднялся шар?

8. Вычислить момент инерции обода радиусом 0,5 м и массой 3 кг относительно оси, проходящей через конец плоскости обода.

9. Маховик приводится во вращение с помощью груза массой 2 кг, укрепленного на конце троса, намотанного на ось маховика. Определить момент инерции маховика, если груз в течение 12 с опускается на расстояние 1 м. Радиус оси 8 мм. Силой трения пренебречь.

10. К ободу диска массой 5 кг приложена касательная сила 19,8 Н. Какую работу надо затратить, раскручивая диск в течение 15 c от начала действия силы?

11. Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью 7,2 км/ч. На какое расстояние может вкатиться обруч на горку за счет его кинетической энергии? Уклон горы равен 10 м на каждые 100 м пути.

12. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек. На какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется в исходную (на платформе) точку? Масса платформы 280 кг, масса человека 80 кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Вариант 24

1. Зависимость пройденного телом пути S от времени t дается уравнением $S = A + Bt + Ct^2$, где $A = 3$ м; $B = 2$м/с и $C = 1$ м/с^2. Найти среднюю скорость и среднее ускорение тела за первую, вторую и третью секунды его движения.

2. Тело брошено под углом $60°$ к горизонту со скоростью 20 м/с.На какой высоте тело будет двигаться под углом $45°$ к горизонту?

3. Тело вращается в соответствии с уравнением $S = 8 + 2t + 4t^2$. Найти; 1) угловую скорость вращения в момент $t = 5$ с; 2) угловую начальную скорость; 3) угловое ускорение.

4. Маховое колесо, спустя 1 минпосле начала вращения, приобретает скорость, соответствующую 720 об/мин. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов колеса за эту минуту. Движение считать равноускоренным.

5. На столе лежит брусок массой 5 кг. К бруску привязан шнур, перекинутый через неподвижный блок. К другому концу шнура привязана гиря массой 2 кг. Коэффициент трения бруска о поверхность стола равен 0,2. С каким ускорением будут двигаться брусок и гиря? Какова сила натяжения шнура?

6. Уклон участка шоссе равен 0,05. Спускаясь под уклон при выключенном двигателе, автомобиль движется равномерно со скоростью 60 км/ч. Какой должна быть мощность двигателя, чтобы он мог подниматься на такой же подъем с той же скоростью? Масса автомобиля 1,5 т.

7. Конькобежец массой 70 кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой 3 кг со скоростью 8 м/с. На какое расстояние откатится при этом конькобежец, если известно, что коэффициент трения коньков о лед 0,02?

8. В ящик с песком 5 кг, подвешенный на нитке длиной 3 м, попадает пуля массой 0,005 кг и отклоняет его на угол 10°. Определить скорость пули.

9. Вычислить момент инерции тонкого обода радиусом 0,5 м и массой 3 кг относительно оси, проходящей через конец диаметра перпендикулярно к плоскости обода.

10. Маховик массой 6 кг, которую можно считать распределенной по ободу радиусом 18 см, вращается на валу со скоростью, соответствующей 600 об/мин. Под действием тормозящего момента 10 Н · м маховик останавливается. Найти, через какой промежуток времени он остановится, и какое число оборотов он совершил за это время.

11. Диск катится в течение 3 с и останавливается, пройдя расстояние 10 м. Определить коэффициент трения качения, если радиус диска 0,1 м.

12. На краю неподвижной скамьи Жуковского диаметром 0,8 ми массой 6 кг стоит человек массой 60 кг. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья, если человек поймает летящий на него мяч массой 0,5 кг? Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии 0,4 м от оси скамьи. Скорость мяча 5 м/с. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Вариант 25

1.Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 4 м/с. Когда оно достигло верхней точки полета, из того же начального пункта, с той же начальной скоростью вертикально вверх брошено второе тело. На каком расстоянии h от начального пункта встретятся тела? Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Уравнение движения материальной точки по прямой имеет вид $x = A + Bt + Ct^2$, где $A = 5$ м, $B = 4$ м/с и $C = -1$ м/с^2. Определить среднюю скорость движения за интервал времени от 1 до 6 с.

3. Диск радиусом 10 м, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением, равным 0,5 рад/с^2. Каковы были тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения?

4. Дальность полета тела, брошенного горизонтально со скоростью 4,9 м/с, равна высоте, с которой его бросили. Чему равна эта высота и под каким углом к горизонту тело упало на землю?

5. Груз, подвешенный на динамометре, поднимается сначала ускоренно, затем равномерно и, наконец, замедленно. Масса груза равна 1 кг. Абсолютная величина ускорения во всех случаях постоянна и равна 0,5 м/с. Что показывает динамометр в различные моменты движения?

6. Пуля массой 10 г, двигавшаяся со скоростью 200 м/с, врезалась в доску и углубилась в нее на расстояние 4 см. Определить среднюю силу сопротивления доски и время движения пули в доске, считая движение пули внутри доски равномерно замедленным.

7. Молот массой 10 кг ударяет по небольшому куску мягкого железа, лежащему на наковальне. Масса наковальни 400 кг. Определить к.п.д. удара молота при данных условиях. Удар считать неупругим. Полезной считать энергию, пошедшую на деформацию куска железа.

8. Аэросани массой 100 кг, движущиеся по горизонтальному участку пути со скоростью 30 км/ч, развивают мощность, равную 22 кВт. Какую мощность должны они развивать при движении в гору с уклоном 10° с той же скоростью?

9. Сплошной цилиндр диаметром 12 см, имеющий массу 3 кг, лежит боковой поверхностью на горизонтальной плоскости. Определить момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей по линии его контакта с плоскостью.

10. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязали грузы массами 100 и 110 г. С каким ускорением будут двигаться грузы, если масса блока 400 г? Трением пренебречь.

11. С какой скоростью должен въехать велосипедист в нижнюю точку мертвой петли радиусом6 м, чтобы не сорваться вниз? Масса велосипедиста равна 90 кг, масса обоих колес равна 6 кг. Трением пренебречь, массу колес считать сосредоточенной в ободах.

12. На краю платформы в виде диска, вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси с частотой 8 об/мин, стоит человек массой 70 кг. Когда человек перешел в центр платформы, она стала вращаться с частотой 10 об/мин. Определить массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Вариант 26

1. По прямой линии движутся две материальные точки согласно уравнениям $x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$ и $x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, где $A_1 = 10$ м, $B_1 = 1$ м/с; $C_1 = 2$ м/с^2; $A_2 = 3$ м; $B_2 = 2$ м/с; $C_2 = 0{,}2$ м/с^2. В какой момент времени t скорости этих точек будут одинаковы? Найти ускорение этих точек в момент $t = 3$ с.

2. Камень, брошенный горизонтально на высоте 2 м над землей, упал на расстоянии 7 м от места бросания (считая по горизонтали). Найти его начальную и конечную скорости.

3. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 6t - 2t^3$. Найти: 1) средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от $t = 0$ до остановки; 2) угловое ускорение в момент остановки тела.

4. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости 20 рад/с через 10 оборотов после начала вращения. Найти угловое ускорение колеса; через сколько времени от начата вращения угловая скорость станет 40 рад/с?

5. Тело массой 0,2 кгдвижется с постоянной скоростью 0,5 м/с по окружности. Определить изменение импульса тела за время прохождения им четверти окружности.

6. Санки скатываются с ледяной горы высотой 3 м и останавливаются на ледяном поле на расстоянии 15 м по горизонтальному направлению от вершины наклонной плоскости. Определить коэффициент трения.

7. Деревянный шар массой 10 кг подвешен на нити длиной 2 м. В шар попадает горизонтально летящая пуля массой 5 ги застревает в нем. Определить скорость пули, если нить с шаром отклонилась от вертикали на угол 30°.

8. На однородном стержне длиной 30 см и массой 300 г укреплены два маленьких шарика массами 300 и 600 г: первый на конце стержня, второй – в середине. Определить момент инерции системы относительно оси, проходящей через свободный конец стержня и перпендикулярной стержню. Грузики рассматривать как материальные точки.

9. Вал массой 100 г и радиусом 5 см вращался с частотой 8 об/с. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой 40 Н, под действием которой вал остановился через 10 с. Определить коэффициент трения.

10. К ободу сплошного однородного диска массой 5 кг приложена постоянная касательная сила 19,8 Н. Какую кинетическую энергию будет иметь диск через 5 с после начала действия силы?

11. Определить линейную скорость центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой 1 м.

12. Шарик массой 0,1 кг, привязанный к концу нити длиной 1 м, вращается, опираясь на горизонтальную плоскость, с частотой 1 об/с. Нить укорачивается, приближая шарик к оси вращения до расстояния 0,5 м. С какой частотой будет вращаться при этом шарик? Трением шарика о плоскость пренебречь. Определить работу, которую совершает внешняя сила, укорачивая нить.

Вариант 27

1. Уравнение движения точки по прямой имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 4$ м; $B = 2$м/с и $C = 0{,}2$ м/с^3. Найти положение точки, ее скорость и ускорение в момент времени 2 с.

2. Струя воды в гидромониторе вылетает из ствола со скоростью 50 м/с под углом 35° к горизонту. Найти дальность полета и наибольшую высоту подъема струи.

3. Колесо радиусом 0,1 м вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $B =$ 2 рад/с и $C = 1$ рад/с^3. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через 2 с после начала движения следующие величины: 1) угловую и линейную скорости; 2) угловое, нормальное и тангенциальное ускорения.

4. Точка движется по окружности радиусом 10 см с постоянным тангенциальным ускорением 10 см/с. Через сколько времени после начала движения нормальное ускорение точки будет равно тангенциальному?

5. Какого веса балласт надо сбросить с равномерно опускающегося аэростата, чтобы он начал равномерно подниматься с той же скоростью? Вес аэростата с балластом 15680 Н, подъемная сила аэростата 11760 Н. Силу сопротивления воздуха считать везде одинаковой.

6. Две гири весом $19{,}6$ и $9{,}8$ Н соединены нитью и перекинуты через невесомый блок. Найти: 1) ускорение, с которым движутся гири; 2) натяжение нити. Трением в блоке пренебречь.

7. Тело массой 2 м/с движется со скоростью 5 м/с навстречу телу массой 3 кг, движущемуся со скоростью 10 м/с. Найти величину и объяснить причину изменения кинетической энергии системы тел после неупругого центрального удара.

8. Колесо, вращаясь равнозамедленно, при торможении уменьшило за 1 мин скорость вращения от 300 до 180 об/мин. Момент инерции колеса равен 2 кг $\cdot$ м^2. Найти: 1)угловое ускорение колеса; 2) тормозящий момент; 3) работу торможения; 4)число оборотов, сделанных колесом за эту минуту.

9. Диск массой 2 кг колеблется около горизонтальной оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска. Момент инерции диска $8{,}64 \cdot 10^{-2}$ кг $\cdot$ м^2. Чему равен диаметр диска?

10. Обруч и диск имеют одинаковую массу и катятся без скольжения с одинаковой линейной скоростью. Кинетическая энергия диска равна $29{,}4$ Дж. Найти кинетическую энергию обруча.

11. Маховик вращается по закону, выражаемому уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где$A = 2$ рад; $B = 32$ рад/с и $C = -4$ рад/с^2. Найти среднюю мощность, развиваемую силами, действующими на маховик при его вращении, до остановки, если его момент инерции равен 100 кг $\cdot$ м^2.

12. Горизонтальная платформа массой 80 кг и радиусом 1 мвращается с угловой скоростью, соответствующей 20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. Во сколько раз увеличится кинетическая энергия платформы с человеком, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от $2{,}94$ до $0{,}98$ кг $\cdot$ м^2? Считать платформу круглым однородным диском.

Вариант 28

1. Уравнение движения материальной точки имеет вид: $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 4$ м; $B = 2\text{м/с}$ и $C = -0{,}2\ \text{м/с}^3$. Найти среднюю скорость и среднее ускорение за интервал времени между 2 и 5 секундами.

2. На каком расстоянии от места выстрела упадет снаряд, вылетевший из орудия со скоростью $800\ \text{м/с}$, если ствол орудия установлен под углом к горизонту $30°$? Сопротивление воздуха уменьшает дальность полета в 3,5 раза.

3. Диск радиусом 10 см, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным ускорением $0{,}5\ \text{рад/с}$. Каковы тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения?

4. Ось с двумя дисками, расположенными на расстоянии $0{,}5$ м друг от друга, вращается с угловой скоростью, соответствующей частоте $1600\ \text{об/мин}$. Пуля, летящая вдоль оси, пробивает оба диска; при этом отверстие от пули во втором диске смещено относительно отверстия в первом диске на угол,равный $12°$. Найти скорость пули.

5. Человек везёт двое саней массой по 15 кг каждые, связанные между собой веревкой, прикладывая силу 120 Н под углом $45°$ к горизонту. Найти ускорение саней и силу натяжения веревки, связывающей сани, если коэффициент трения полозьев о снег 0,02.

6. При вертикальном подъеме груза весом $12{,}6$ Н на высоту 1 м постоянной силой была совершена работа $18{,}4$ Дж. С каким ускорением поднимали груз?

7. Автомобиль, двигаясь равноускоренно, на участке пути 100 м набрал скорость $72\ \text{км/ч}$. Определить работу двигателя автомобиля на этом участке, если масса автомобиля с грузом 1800 кг, а коэффициент трения $0{,}05$.

8. Вентилятор вращается со скоростью, соответствующей $900\ \text{об/мин}$. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 оборотов. Работа сил торможения равна $44{,}4$ Дж. Найти: 1) момент инерции вентилятора; 2) момент силы торможения.

9. Три маленьких шарика одинаковой массой расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 20 см и скреплены между собой. Момент инерции этой системы относительно оси, перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через центр треугольника, равен $4 \cdot 10^{-4}$ кг $\cdot$ м^2. Найти массу каждого шарика.

10. Мальчик катит диск по горизонтальной дороге со скоростью 7,2 км/ч. На какое расстояние может вкатиться диск на горку за счет его кинетической энергии? Уклон горки равен 1 м на каждые 25 м пути.

11. Маховик вращается по закону, выражаемому уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 2$ рад; $B = 16$ рад/с и $C = -2$ рад/с^2. Момент инерции колеса равен 50 кг $\cdot$ м^2. Чему равна мощность в момент времени $t = 3$?

12. На скамье Жуковского сидит человек и держит в вытянутых руках гири по 10 кг каждая. Расстояние от каждой до оси вращения скамьи 50 см. Скамья вращается с частотой 1 об/с. Как изменится частота вращения скамьи и какую работу произведёт человек, если он сожмет руки так, что расстояние от каждой гири до оси уменьшится до 20 см? Суммарный момент инерции человека и скамьи относительно оси вращения 2,5 кг $\cdot$ м^2. Ось вращения проходит через центр масс человека и скамьи.

ВАРИАНТ 29

1. Автомобиль движется по закруглению шоссе, имеющему радиус кривизны 50 м. Уравнение движения автомобиля $S = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ м; $B = 10$ м/с и $C = -0{,}5$ м/с^2. Найти скорость автомобиля, его тангенциальное, нормальное и полное ускорения в момент времени $t = 5$ с.

2. При каком угле наклона к горизонту достигается наибольшая дальность полета? Доказать.

3. На цилиндр, который может вращаться около горизонтальной оси, намотана нить. К концу нити привязали грузик и предоставили ему возможность опускаться. Двигаясь равноускоренно, грузик за 3 с опустился на 1,5 м. Определить угловое ускорение цилиндра, если его радиус 4 см.

4. Колесо радиусом 10 *см* вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $D = 2$ рад/с^3. Найти для точек на ободеколеса изменение тангенциального ускорения за каждую секунду.

5. Два тела, связанные нитью, движутся по горизонтальной плоскости под действием силы $F = 100$ Н, направленной горизонтально. Если силу приложить к правому телу массой 7 кг, то сила натяжения нити равна 30 Н. Определить силу натяжения нити, если силу F приложить к левому грузу массой 3 кг. Считать, что в обоих случаях тела движутся в направлении приложенной силы с одним и тем же ускорением. Трением пренебречь.

6. Тело массой $M = 1$кг соскальзывает без трения с наклонной плоскости, угол наклона которой равен 21°. После того как тело прошло путь $S = 1$м, с ним не упруго столкнулся летящий горизонтально пластилиновый шар массой 150 г; при этом тело остановилось. Найти скорость шара.

7. Свинцовый шар массой 5 кг закреплен на тонком стержне длиной 1,5 м, массой которого можно пренебречь. Система может качаться около горизонтальной оси, проходящей через конец стержня. В шар нормально к его поверхности ударилась пуля массой 10 г, летевшая горизонтально со скоростью 600 м/с и, пробив шар, уменьшила скорость до 100 м/с. Определить, на какой угол отклонится стержень, если нагреванием шара пренебречь.

8. Маховое колесо, имеющее момент инерции 245 кг $\cdot$ м^2, вращается, делая 20 об/с. После того как на колесо перестал действовать вращающий момент сил, оно остановилось, сделав 1000 оборотов. Найти: 1) момент сил трения; 2) время, прошедшее от момента прекращения действия вращающего момента сил до полной остановки колеса.

9. Диск массой 400 г и радиусом 20 см вращается относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и отстоящей от центра на расстоянии, равном половине радиуса. Вычислить момент инерции диска.

10. Шар массой 5 кг вращается вокруг оси, проходящей через центр шара, в соответствии с уравнением $\varphi = 3 + 9t^2 - t^3$. Через 2 с после начала вращения линейное ускорение точек поверхности шара равно $0{,}6$ м/с^2. Определить изменение мощности в интервале от 1 до 2 с.

11. Сплошной диск весом $12{,}6$ Н катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью 4 м/с. Найти кинетическую энергию диска.

12. В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках стержень вертикально оси скамьи. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью 4 рад/с. С какой скоростью будет вращаться скамья с человеком, если повернуть стержень так, чтобы он занял горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи 5 кг $\cdot$ м^2. Длина стержня 1,8 м, масса 6 кг.

Вариант 30

1.Зависимость пройденного телом пути от времени определяется уравнением $S = At + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 2$ м/c;$B = 3$м/с^2 и $C = 4$ м/с^3. Найти: 1) зависимость скорости и ускорения от времени; 2) расстояние, пройденное телом, скорость и ускорение тела через 2 с после начала движения.

2. Под каким углом нужно бросить тело, чтобы высота подъема равнялась половине дальности полета?

3. Маховое колесо, вращавшееся с частотой 240 об/мин, останавливается в течение 30 с. Считая его движение равнопеременным, найти, сколько оборотов оно сделало до полной остановки.

4. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости, равной 20 рад/с, через 10 оборотов после начала вращения. Найти угловое ускорение колеса.

5. С наклонной плоскости высотой 1 м и длиной склона 10 м скользит тело массой 1 кг. Найти: 1) кинетическую энергию тела у основания плоскости; 2) скорость тела у основания плоскости; 3) расстояние, пройденное телом по горизонтальной части пути до остановки. Коэффициент трения везде постоянный и равен $0{,}05$.

6. К одному концу нити, перекинутой через блок, подвешивают груз массой 500 г, к другому груз массой 300 г. Найти ускорение системы, перемещение каждого груза и скорость, приобретенную через $1{,}2$ с после начала движения. Трение не учитывать, массами блока и нити пренебречь.

7. Вертолет, масса которого с грузом $6 \cdot 10^3$ кг, за $2{,}5$ мин набрал высоту 2250 м. Определить совершенную работу, считая подъем вертолета равноускоренным.

8. По ободу шкива, насаженного на общую ось с маховым колесом, намотана нить, к концу которой подвешен груз в $9{,}8$ Н. На какое расстояние должен опуститься груз, чтобы колесо со шкивом получило скорость, соответствующую 60 об/мин? Момент инерции колеса со шкивом равен $0{,}42$ кг $\cdot$ м^2, радиус шкива10 см.

9. Диск и шар насажены на общую ось, проходящую через центр их масс перпендикулярно плоскости диска. Диаметры диска и шара одинаковы и равны 30 см. Масса диска равна 150 г, шара 450 г. Вычислить момент инерции системы.

10. Шар диаметром 6 см катится без скольжения по горизонтальной плоскости, делая 4 об/с. Масса шара $0{,}25$ кг. Найти кинетическую энергию шара.

11. Маховик в виде диска массой 80 кг и радиусом 30 см находится в состоянии покоя. Какую среднюю мощность надо затратить, чтобы после 100 оборотов у маховика была частота 10 об/с? Какую работу пришлось бы совершить, если бы при той же массе диск имел меньшую толщину, но вдвое больший радиус?

12. На краю неподвижной скамьи Жуковского диаметром 0,8 м и массой 6 кг стоит человек массой 60 кг. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья, если человек поймает летящий на него мяч массой 0,5 кг? Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии 0,4 мот оси скамьи. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки. Скорость мяча 5 м/с.

Вариант 31

1. Зависимость пройденного телом пути от времени дается уравнением $S = A + Bt + Ct^2$, где $A = 6$ м; $B = 3$ м/с и $C = 2$ м/с^2. Найти среднюю скорость и среднее ускорение тела в интервале времени от 1 до 4 с.

2. Из гондолы дирижабля, движущегося горизонтально со скоростью 10 м/с на высоте 450 м, выпало тело. С какой скоростью, и под каким углом к горизонту оно упадет, если пренебречь сопротивлением воздуха?

3.Диск радиусом 20 *см* вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 3$ рад; $B = -1$ рад/с; $C = 0{,}1$ рад/с^3. Определить тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска для момента времени 10 с.

4. Маховое колесо, спустя 1 мин после начала вращения, приобретает скорость, соответствующую 720 об/мин. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов за эту минуту. Движение равноускоренное.

5. Тело скользит сначала по наклонной плоскости, составляющей угол 8° с горизонтом, а затем по горизонтальной поверхности. Найти, чему равен коэффициент трения, если известно, что тело проходит по горизонтали такое же расстояние, как и по наклонной плоскости.

6. На горизонтальной поверхности лежат два связанных нитью груза массой m каждый. На нити, прикрепленной к этим грузам и перекинутой через неподвижный блок, подвешен такой же груз. С каким ускорением движется система грузов и какова сила натяжения нити между грузами, лежащими на поверхности? Трение не учитывать.

7. Клеть с грузом поднимается из шахты глубиной 180 м равноускоренно за 60 с. Определить мощность двигателя, если масса груженой клети $8 \cdot 10^3$кг.

8. Маховое колесо начинает вращаться с постоянным угловым ускорением 0,5 рад/с и через 15 с после начала движения приобретает момент импульса, равный 73,5 кг · м^2. Найти кинетическую энергию колеса через 20 с после начала вращения.

9. На концах тонкого стержня длиной 30 см и массой 400 г укреплены маленькие грузики массой 200 и 300 г. Стержень колеблется около горизонтальной оси, проходящей через его середину. Определить момент инерции системы.

10. Обруч и диск имеют одинаковую массу и катятся без скольжения с одинаковой линейной скоростью. Кинетическая энергия обруча равна 39,2 Дж. Найти кинетическую энергию диска.

11. Кинетическая энергия вращающегося маховика равна 1 Дж, его момент инерции 20 $кг \cdot м^2$. Под действием постоянного тормозящего момента маховик начал вращаться равнозамедленно. Сделав 80об., остановился. Определить момент силы торможения и среднюю мощность.

12. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой 60 кг. На какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя его, вернется в исходную точку на платформе? Масса платформы равна 240 кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Вариант 32

1. Зависимость пройденного телом пути S от времени дается уравнением $S = A + Bt + Ct^2$, где$A = 3$ м; $B = 2$ м/cи $C = 1$ м/с^2. Найти среднюю скорость и среднее ускорение тела в интервале времени 1-3 с его движения.

2. С высоты 10 м брошено тело под углом 30° к горизонту со скоростью 20 м/с. Найти наибольшую высоту подъема и горизонтальное расстояние от точки бросания до места падения тела. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Найти линейную скорость и нормальное ускорение точек на поверхности земного шара: 1) на экваторе; 2) на широте 60°. Средний радиус земного шара $R = 6400$ км.

4. Колесо, вращаясь равнозамедленно, при торможении уменьшило свою скорость за 1 мин с 300 до 180 об/мин. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов, сделанных им за это время.

5. Брусок скользит ускоренно сначала по наклонной плоскости длиной 42 см и высотой 7 см, а потом по горизонтальной плоскости, после чего останавливается. Определить коэффициент трения, считая его везде одинаковым, если по горизонтальной плоскости брусок проходит до остановки расстояние 142 см.

6. Тело массой $m_1 = 10$ кг соскальзывает без трения с наклонной плоскости, укрепленной на тележке массой $m_2 = 20$ кг. Найти скорость тележки относительно земли после соскальзывания тела с наклонной плоскости, если ее высота равна 20 см, а угол наклона$30°$.

7. Полый пластмассовый шарик радиусом 20 мм и массой 5 гбыл погружен в воду на глубину 50 см. После того как его отпустили, он выпрыгнул над поверхностью воды на 30 см. Сколько энергии было потеряно при этом?

8.Маховик вращается с постоянной скоростью, соответствующей частоте, равной 10 об/с; его кинетическая энергия равна 7840 Дж. За сколько времени вращающий момент сил $M = 50$ Н · м, приложенный к этому маховику, увеличит угловую скорость в 2 раза?

9. Однородный диск массой 4 кг колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих поверхности диска, момент инерции диска относительно этой оси равен 0,24 кг · м^2. Найти диаметр диска.

10. Шар массой1 кг катится без скольжения, ударяется о стенку и откатывается от неё. Скорость шара до удара о стенку равна 10 *см/с*, после удара 8 см/с. Найти количество тепла Q, выделившееся при ударе.

11. Маховик, момент инерции которого равен 40 кг · м^2, начал вращаться равноускоренно из состояния покоя под действием момента силы 20 Н · м. Вращение продолжалось в течение 10 с. Определить кинетическую энергию, приобретенную маховиком и среднюю мощность за время вращения.

12. На краю платформы в виде диска, вращающегося по инерции вокруг вертикальной оси с частотой 8 об/мин, стоит человек массой 70 кг. Когда человек перешел в центр платформы, она стала вращаться с частотой 10 об/мин. Определить массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Вариант 33

1. Зависимость пройденного телом пути S от времени t дается уравнением $S = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 0{,}14$ м/с^2 и $D = 0{,}01$ м/с^3. Через сколько времени после начала движения ускорение тела будет равно 1 м/с^2? Чему равно среднее ускорение тела за это время?

2. Мяч бросили горизонтально с высоты 5 м со скоростью 10 м/с. Упав на землю, он отскочил абсолютно упруго. Определить попадет ли мяч в окно первого этажа дома, подоконник которого находится на высоте 3 м над уровнем земли, если здание расположено на расстоянии $S = 3{,}7$ м от точки падения.

3. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 1$ рад/с; $C = 1$ рад/с^2; $D = 1$ рад/с^3. Найти радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды движения нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, равно $346\ \text{м/с}^2$.

4. Вентилятор вращается со скоростью, соответствующей частоте 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения вентилятора до полной его остановки?

5. С какой силой давит на дно шахтной клети груз массой 100 кг, если клеть поднимается вертикально вверх с ускорением $24{,}5\ \text{см/с}^2$?

6. На рельсах стоит платформа массой 10 т. На платформе закреплено орудие массой 5 т, из которого производится выстрел вдоль рельсов. Вес снаряда 980 Н; его начальная скорость относительно орудия 500 м/с. Определить скорость платформы в первый момент после выстрела, если: 1) платформа стояла неподвижно; 2) платформа двигалась со скоростью 18 км/ч, и выстрел был произведен в направлении её движения; 3) платформа двигалась со скоростью 18 км/ч, и выстрел был произведен в направлении, противоположном направлению её движения.

7. Определить работу подъема груза по наклонной плоскости и среднюю мощность подъёмного устройства, если масса груза 100 кг, длина наклонной плоскости 2 м, угол ее наклона к горизонту $30°$, коэффициент трения $0{,}1$, ускорение при подъеме $1\ \text{м/с}^2$. У основания наклонной плоскости груз находился в покое.

8. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязаны грузы массой 110 и 100 г. С каким ускорением будут двигаться грузы, если масса блока равна 400 г?

9. Однородный стержень длиной $0{,}5$ м и массой $0{,}25$ кг совершает колебания в вертикальной плоскости около горизонтальной оси, отстоящей от верхнего конца на 10 см. Определить момент инерции стержня.

10. На какой угол надо отклонить однородный стержень, подвешенный на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня, чтобы нижний конец стержня при прохождении им положения равновесия имел скорость 5 м/с? Длина стержня 1 м.

11. Пуля массой 10 г летит со скоростью 800 м/с, вращаясь около продольной оси с частотой 3000 об/с. Принимая пулю за цилиндрик диаметром 8 мм, определить полную кинетическую энергию пули.

12. Деревянный стержень массой 1000 г и длиной 40 см может вращаться около оси, проходящей через его середину перпендикулярно к стержню. В конец стержня попадает пуля массой 10 г, летящая перпендикулярно к оси и к стержню со скоростью 200 м/с. Определить угловую скорость, которую получит стержень, если пуля застрянет в нем.

Вариант 34

1. При равноускоренном движении из состояния покоя тело проходит за пятую секунду 90 см. Какой путь пройдет тело за седьмую секунду?

2. Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через 0,5 с на расстоянии 5 м по горизонтали от места бросания. Определить: 1) С какой высоты был брошен камень? 2) С какой начальной скоростью он был брошен? 3) С какой скоростью он упал на землю? 4) Какой угол составляет вектор скорости камня с горизонтом в точке его падения на землю? Сопротивление воздуха не учитывать.

3. Точка движется по окружности радиусом 5 см согласно уравнению: $x = Ct^3$, где $C = 2$ см/с^3. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки, когда ее линейная скорость равна 0,3 м/с.

4. Вал начинает вращаться и в первые 10 с совершает 50 оборотов. Считая вращение вала равноускоренным, определить угловое ускорение и конечную угловую скорость.

5. Поезд массой 500 т начинает подниматься с ускорением 0,1м/с по уклону 10 м на 1 км пути. Коэффициент трения равен 0,02. Определить мощность, развиваемую локомотивом в конце пятой секунды движения.

6. Человек весом 588 Н, бегущий со скоростью 8 км/ч, догоняет тележку весом 784 Н, движущуюся со скоростью 2,9 км/ч, и вскакивает на нее. Определить: 1) С какой скоростью станет двигаться тележка? 2) С какой скоростью будет двигаться тележка, если человек бежал ей навстречу?

7. Тело массой 200 г свободно падает вертикально вниз с ускорением 920 см/с^2. Чему равна средняя сила сопротивления воздуха?

8. Однородный стержень длиной 85 см подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую наименьшую скорость надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси?

9. Три маленьких шарика массой 10 г каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника и скреплены между собой. Момент инерции системы относительно оси, лежащей в плоскости треугольника и проходящей через центр треугольника и одну из его вершин, равен $2 \cdot 10^{-4}$ кг $\cdot$ м^2. Найти сторону треугольника.

10. Сплошной цилиндр массой 4 кг катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Линейная скорость оси цилиндра равна 1 м/с. Определить полную кинетическую энергию цилиндра.

11. Вал массой 100 кг и радиусом 5 см вращался с частотой 8 об/с. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой 40 Н, под действием которой вал остановился через $10\ c$. Определить коэффициент трения и среднюю мощность, затраченную на торможение.

12. Деревянный стержень массой 800 г и длиной 50 см может вращаться около оси, проходящей через его середину перпендикулярно к стержню. В конец стержня попадает пуля массой 10 г, летящая перпендикулярно к оси и к стержню со скоростью 600 м/с. Определить угловую скорость, которую получит стержень, если пуля застрянет в нем.

Вариант 35

1. Уравнение движения тела дано в виде $x = 15t + 0{,}4t^2$. Определить начальную скорость и ускорение движения тела, а также скорость тела через $5\ c$.

2. Мяч, брошенный горизонтально, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии 5 м от места бросания. Высота места удара мяча о стенку на 1 м меньше высоты, с которой брошен мяч. Определить: 1) С какой скоростью был брошен мяч? 2) Под каким углом мяч подлетает к поверхности стенки? Сопротивление воздуха не учитывать.

3. Точка движется по окружности радиусом 20 см с постоянным тангенциальным ускорением 5 см/с. Через сколько времени после начала движения нормальное ускорение точки будет равно тангенциальному?

4. Колесо при вращении имеет начальную частоту 5 об/с, после торможения его частота уменьшилась до 3 об/с. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов, сделанных им за 1 минуту.

5. Три груза массой по 2 кг связаны нитью и движутся по горизонтальной плоскости под действием силы 10 Н, направленной под углом 30° к горизонту. Определить ускорение системы и силы натяжения нити, если коэффициент трения 0,1.

6. Снаряд весом 980 Н, летящий горизонтально вдоль железнодорожного пути со скоростью 500 м/с, попадает в вагон с песком весом $9{,}8 \cdot 10^4$ Н и застревает в нем. Какую скорость получит вагон, если: 1) вагон стоял неподвижно; 2) вагон двигался со скоростью 36 км/ч в том же направлении, что и снаряд; 3) вагон двигался со скоростью 36 км/ч навстречу снаряду?

7. Камень, скользящий по горизонтальной поверхности льда, останавливается, пройдя 48 м. Определить начальную скорость камня, если известно, что коэффициент трения 0,06.

8. Карандаш, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую и линейную скорости будет иметь в конце падения: 1) середина карандаша; 2) верхний его конец? Длина карандаша 15 см.

9. Три маленьких шарика массой 10 г каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника и скреплены между собой. Сторона треугольника равна 20 см. Определить момент инерции системы относительно оси, перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности.

10. Шар катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Полная кинетическая энергия шара 14 Дж. Определить кинетическую энергию поступательного и вращательного движения.

11. Шар массой 10 кг и радиусом 20 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид: $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 5$ рад; $B = 4$ рад/с^2 и $C = -1$ рад/с^3. Какова величина момента сил и мощность в конце второй секунды?

I2. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом 2 м, стоит человек массой 80 кг. Масса платформы 240 кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Пренебрегая трением, найти, с какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью 2 м/с относительно платформы.

Вариант 36

1. Посадочная скорость пассажирского самолёта 135 км/ч, а длина его пробега 500 м. Определить время пробега по посадочной полосе и ускорение самолета, считая движение равнозамедленным.

2. Камень брошен в горизонтальном направлении. Через $0{,}5$ с после начала движения численное значение скорости камня стало в $1{,}5$ раза больше его начальной скорости. Найти начальную скорость камня. Сопротивление воздуха не учитывать.

3. Зависимость угла поворота радиуса вращающегося колеса от времени дана уравнением $\varphi = 4 + 5t^2 - t^3$. Найти в конце первой секунды вращения угловую скорость колеса, а также линейную скорость и полное ускорение точки, лежащей на ободе колеса радиусом 20 см.

4. Точка движется по окружности радиусом 10 см с постоянным тангенциальным ускорением. Найти тангенциальное ускорение точки, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения скорость точки стала 79,2 см/с.

5. Брусок массой 2 кг скользит по горизонтальной поверхности под действием груза массой 0,5 кг, прикрепленного к концу нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок. Коэффициент трения бруска о поверхность равен 0,1. Найти ускорение и силу натяжения нити.

6. Граната, летящая со скоростью 10 м/с, разорвалась на два осколка. Большой осколок, масса которого составляла 60% от всей массы гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении, но с увеличенной скоростью, равной 25 м/с. Найти скорость малого осколка.

7. Велосипедист должен проехать по «чёртову колесу», радиус которого 8 м. С какой высоты он должен начать разбег, чтобы не «выпасть» в верхней точке колеса?

8. Кинетическая энергия вала, вращающегося с постоянной частотой 5 об/с, равна 60 Дж. Найти момент импульса и мощность в этот момент времени, если вал остановился за 10 с.

9. Обруч массой $0{,}5$ кг и диаметром 30 см висит на гвозде, вбитом в стену, и совершает колебания в плоскости, параллельной стене. Найти момент инерции обруча.

10. Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью $7{,}2$ км/ч. На какое расстояние может вкатиться обруч на горку за счёт кинетической энергии? Уклон горки равен 10 м на каждые 100 м пути.

11. Через неподвижный блок массой 200 г перекинут шнур, к концам которого подвесили грузы массами 300 и 500 г. Определить силы натяжения шнура по обе стороны блока вовремя движения грузов. Массу блока считать равномерно распределённой по ободу.

I2. Горизонтальная платформа массой 100 кг вращается вокруг кортикальной оси, проходящей через центр платформы, делая 10 об/мин. Человек весом 588 Н стоит при этом на краю платформы. С какой скоростью начнёт вращаться платформа, если человек перейдёт от края к центру платформы. Считать платформу однородным круглым диском, а человека – материальной точкой.

Вариант 37

1. Автомобиль за 22 с увеличил скорость от $32{,}4$ до 72 км/ч. Определить ускорение и путь, пройденный автомобилем за это время, считая движение равноускоренным. Начертить график скорости.

2. Мяч бросили со скоростью 10 м/с под углом $40°$ к горизонту. Найти: 1) на какую высоту поднимется мяч; 2) на каком расстоянии от места бросания мяч упадет на землю; 3) сколько времени он будет в движении. Сопротивление воздуха не учитывать.

3. Тело вращается так, что зависимость угловой скорости от времени дается уравнением $\omega = 2 + 0{,}5t$. Найти полное число оборотов, совершенных телом за 20 с после начала движения.

4. Точка движется по окружности радиусом 10 см с постоянным тангенциальным ускорением. Найти нормальное ускорение точки через $t = 20$с после начала движения, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки равна 10 см/с.

5. Автомобиль массой 1 т поднимается по шоссе с уклоном $30°$ под действием силы тяги 700 Н. Коэффициент трения между шинами автомобиля и поверхностью шоссе $0{,}1$. Найти ускорение автомобиля.

6. Тело весом $9{,}8$ Н, движущееся горизонтально со скоростью 1 м/с, догоняет второе тело весом $4{,}9$ Н и неупруго сталкивается с ним. Какую скорость получат тела, если: 1) второе тело стояло неподвижно; 2) второе тело двигалось со скоростью $0{,}5$ м/с в том же направлении, что и первое; 3) второе тело двигалось со скоростью 0,5 м/с в направлении, противоположном направлению движения первого тела.

7. Пуля, имеющая массу 10 г, подлетает к доске толщиной 4 см со скоростью 600 м/с и, пробив доску, вылетает со скоростью 400 м/с. Найти среднюю силу сопротивления доски.

8. На барабан массой 9 кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 2 кг. Найти ускорение груза. Барабан считать однородным цилиндром.

9. На стержне длиной 50 см закреплены два одинаковых грузика массой 200 г каждый. Один грузик расположен в середине стержня, другой – на одном из его концов. Стержень с грузиками колеблется относительно горизонтальной оси, проходящей через другой конец стержня. Определить момент инерции системы.

10. С какой наименьшей высоты должен съехать велосипедист, чтобы по инерции (без трения) проехать дорожку, имеющую форму мертвой петли радиусом $R = 3$ м, и не оторваться от дорожки в верхней точке петли. Масса велосипедиста вместе с велосипедом 75 кг, причем на массу колес приходится 3 кг. Колеса велосипеда считать обручами.

11. Маховик вращается по закону $\varphi = 10 + 6t + t^2$. Спустя10 c от начала вращения развиваемая мощность равна 400 Вт. Определить радиус маховика, если его масса 50 кг и он однородный.

I2. Горизонтальная платформа массой 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая 10 об/мин. Человек весом 588 Н стоит при этом на краю платформы. Какую работу совершит человек при переходе от края платформы к ее центру? Считать платформу круглым однородным диском, а человека - точечной массой. Радиус платформы равен 1,5 м.

Вариант38

1. Тело, имея начальную скорость 5 м/с, прошло за пятую секунду путь, равный 4,5 м. Определить ускорение и путь, пройденный телом за 10 с.

2. Тело брошено под углом к горизонту. Продолжительность полета составила 2,2 с. Найти наибольшую высоту поднятия этого тела. Сопротивление воздуха не учитывать.

3. Маховик, вращающийся с частотой 2 об/с, останавливается в течение 1,5 мин. Считая движение равнозамедленным, определить, сколько оборотов сделает маховик до полной остановки, а также угловое ускорение маховика.

4. Колесо радиусом 5 см вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $B = 1$ рад/с и $C = 1$ рад/с^3. Найти для точек на ободе колеса угловую и линейную скорости, а также угловое ускорение в конце третьей секунды.

5. Тело массой 0,5 кг движется прямолинейно, причем зависимость пройденного телом пути S от времени t дается уравнением $S = A + Bt + Ct^2 - Dt^3$, где $C = 5$ м/с^2 и $D = 1$м/с^3. Найти величину силы, действующей на тело в конце первой секунды движения.

6. Конькобежец весом 686 Н, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень весом 29,4 Н со скоростью 8 м/с. Найти, на какое расстояние откатится при этом конькобежец, если известно, что коэффициент трения коньков о лед равен 0,02.

7. В тело массой 990 г, лежащее на горизонтальной поверхности, попадает пуля массой 10 г и застревает в нем. Скорость пули 700 м/с и она направлена горизонтально. Какой путь пройдет тело до остановки, если коэффициент трения между телом и поверхностью 0,05?

8. Две гири разной массы соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого 50 кг · м^2 и радиус 20 см. Блок вращается с трением, и момент сил трения равен 98,1 Н · м. Найти разность натяжения нити по обе стороны блока, если известно, что блок вращается с постоянным угловым ускорением 2,36 рад/с^2.

9. Момент инерции диска относительно оси, проходящей через один из его диаметров, равен $2 \cdot 10^{-2}$ кг · м^2. Определить диаметр диска, если его масса 500 г.

10. Обруч и диск имеют одинаковую массу и катятся без скольжения с одинаковой скоростью. Кинетическая энергия обруча равна 39,2 Дж. Найти кинетическую энергию диска.

11. Тонкий прямой стержень длиной 1 м прикреплен к горизонтальной оси, проходящей через его конец. Стержень отклонили на угол 60° от положения равновесия и отпустили. Определить линейную скорость нижнего конца стержня в момент прохождения через положение равновесия.

12. Горизонтальная платформа массой 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая 10 об/мин. Человек массой 60 кг стоит при этом на краю платформы. Радиус платформы равен 1,5 м. Какую работу совершает человек при переходе от края платформы к ее центру? Считать платформу круглым однородным диском, а человека – точечной массой.

Вариант 39

1. Из вертолета, поднимающегося вверх с ускорением $1\ \text{м/с}^2$, на высоте 450 м выпал предмет. Определить скорость тела в момент удара о землю и время падения предмета.

2. Камень, брошенный со скоростью $12\ \text{м/с}$ под углом к горизонту, упал на землю на расстоянии S от места бросания. С какой высоты надо бросить камень в горизонтальном направлении, чтобы при той же начальной скорости он упал на то же место?

3. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости $20\ \text{рад/с}$ через 10 об после начала вращения. Найти угловое ускорение колеса.

4. Колесо радиусом 10 см вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $B = 2\ \text{рад/с}^2$ и $C = 2\ \text{рад/с}^3$. Найти для точек на ободе колеса в конце второй секунды угловое, тангенциальное и нормальное ускорения.

5. Под действием постоянной силы $F = 9{,}8$ Н тело движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом пути от времени задаётся уравнением $S = A + Bt + Ct^2$, где постоянная $C = 1\ \text{м/с}^2$. Найти массу тела.

6. Человек, стоящий на неподвижной тележке, бросает вперед в горизонтальном направлении камень массой 2 кг. Тележка с человеком покатилась назад, и в первый момент после бросания её скорость была равна $0{,}1\ \text{м/с}$. Вес тележки с человеком равен 980 Н. Найти кинетическую энергию брошенного камня через $0{,}5$ с после начала его движения. Сопротивлением воздуха при полете камня пренебречь.

7. Груз массой 45 кг перемещается по наклонной плоскости под действием силы 294 Н, направленной под углом $300°$ к горизонту. Коэффициент трения груза о плоскость $0{,}1$. Определить ускорение движения груза.

8. Вал массой 100 кг и радиусом 5 см вращался с частотой 8 об/с. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой $F = 40$ Н, под действием которой вал остановился через 10 с. Определить коэффициент трения.

9. Обруч диаметром 60 см висит на гвозде, вбитом в стену, и совершает колебания в плоскости, параллельной стене. Момент инерции обруча равен $2{,}25 \cdot 10^{-2}$ кг $\cdot$ м^2. Найти массу обруча.

10. Определить линейную скорость центра шара, скатившегося с наклонной поверхности высотой 1 м.

11. Карандаш длиной 15 см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую и линейную скорости будет иметь в конце падения: 1) середина карандаша; 2) верхний его конец?

12. Человек весом 588 Н находится на неподвижной платформе массой 100 кг. Какое число оборотов в минуту будет делать платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом 5 м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы равна 4 км/ч, радиус платформы 10 м. Считать платформу однородным диском, а человека – материальной точкой.

Вариант 40

1. Свободно падающее тело в последнюю секунду своего падения проходит половину всего пути. Найти: 1) с какой высоты падает тело; 2) продолжительность его падения.

2. С вышки бросили камень в горизонтальном направлении. Через 2 с камень упал на землю на расстоянии 40 м от основания вышки. Определить начальную и конечную скорости камня.

3. Материальная точка, начав двигаться равноускоренно по окружности радиусом 1 м, прошла за время 10 с путь 50 м. С каким нормальным ускорением двигалась точка спустя5 с после начала движения?

4. Точка движется по окружности радиусом 2 см. Зависимость пути от времени дается уравнением $x = Ct^3$, где $C = 0{,}1$ см/с^3 . Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки в момент, когда линейная скорость точки равна 0,3 м/с.

5. Автомобиль массой 1,5 т поднимается по шоссе с уклоном 20° под действием силы тяги 9000 Н. Коэффициент трения между шинами автомобиля и поверхностью шоссе принять равным 0,15. Найти ускорение автомобиля.

6. Из орудия массой $5 \cdot 10^3$ вылетает снаряд весом 960 Н. Кинетическая энергия снаряда при вылете равна $7{,}5 \cdot 10^6$ Дж. Какую кинетическую энергию получает орудие вследствие отдачи?

7. Молотком, масса которого 1 кг, забивают в стену гвоздь массой 50 г. Определить к.п.д. удара молотка при данных условиях. Полезной считать энергию, пошедшую на деформацию, удар считать неупругим.

8. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязали грузики массой 100 г и 110 г. С каким ускорением будут двигаться грузики, если масса блока составляет 400 г?

9. Три маленьких шарика массами по 10 г каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника и скреплены между собой. Сторона треугольника 20 см. Определить момент инерции системы относительно оси, лежащей в плоскости треугольника и проходящей через центр треугольника и одну из его вершин.

10. Цилиндр диаметром 10 см катится без скольжения по горизонтальной плоскости, делая 6 об/с. Масса цилиндра 0,5 кг. Найти кинетическую энергию цилиндра.

11. Диск массой 3 кг и радиусом 20 см сидит на одном валу со шкивом радиусом 2 см. К шкиву по касательной приложена постоянная сила 10 Н. Найти, какую мощность имеет диск через 3 c после начала вращения.

12. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой 0,4 кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью 20 м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии 0,8 м от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья с человеком, если суммарный момент инерции человека и скамьи равен 6 $кг \cdot м^2$?

Вариант 41

1. Тело A брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_1. Тело B падает с высоты h с начальной скоростью $v_2 = 0$. Найти зависимость расстояния x между телами A и B от времени t, если известно, что тела начали двигаться одновременно.

2. Тело, брошенное с башни в горизонтальном направлении со скоростью 20 м/с, упало на землю на расстоянии вдвое большем, чем высота башни. Найти высоту башни.

3. Линейная скорость точек окружности вращающегося диска равна 3 м/с, а точек, находящихся на 10 см ближе к оси вращения, 2 м/с. Сколько оборотов в минуту делает диск?

4. Точка движется по окружности так, что зависимость пути времени даётся уравнением $S = A + Bt + Ct^2$, где $B = -2$ м/с и $C = 1$ м/с^2. Найти линейную скорость точки, ее тангенциальное, нормальное и полное ускорение через 3 с после начала движения, если известно, что нормальное ускорение точки при 2 с равно 0,5 м/с^2.

5. Определить работу подъема груза по наклонной плоскости и среднюю мощность подъёмного устройства, если масса груза 50 кг, длина наклонной плоскости 2 м, угол ее наклона к горизонту равен 45°, коэффициент трения скольжения 0,15, ускорение при подъеме равно 0,5 м/с^2. У основания наклонной плоскости груз находился в покое.

6. Тело весом 19,6 Н движется со скоростью 3 м/с и нагоняет второе тело весом 29,4 Н, движущееся со скоростью 1 м/с. Найти скорости тел после столкновения, если: 1) удар был неупругий; 2) удар был упругий. Тела движутся по одной прямой. Удар – центральный.

7. Молот массой 5 кг ударяет небольшой кусок железа, лежащий на наковальне. Масса наковальни 100 кг. Массой куска железа пренебречь. Удар неупругий. Определить к.п.д. удара молотка при данных условиях. Полезной считать энергию, пошедшую на деформацию, а удар считать неупругим.

8. На барабан радиусом 20 см, момент инерции которого равен 0,1 кг · м^2 , намотан шнур, к которому привязали груз весом 4,9 Н. До начала вращения барабана высота груза над полом равна 1 м. Найти: 1) через сколько времени груз опустится до пола; 2) кинетическую энергию груза в момент удара о пол; 3) натяжение нити. Трением пренебречь.

9. Тонкий стержень длиной 30 см и массой 100 г вращается относительно оси, перпендикулярной к стержню. Момент инерции стержня относительно указанной оси равен 10^{-3} кг · м^2. Найти кратчайшее расстояние от оси вращения до центра масс стержня.

10. Шар скатывается по наклонной плоскости без трения и сразу же на горизонтальном участке резко тормозится (коэффициент трения равен 0,3), пройдя путь по горизонтали 5 м. Определить высоту наклонной плоскости и скорость шара у основания, если на горизонтальном участке он скользит.

11. Однородный стержень длиной 100 см подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую наименьшую скорость надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси?

12. Человек стоит на скамейке Жуковского и ловит рукой мяч массой 0,4 кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью $20\ \text{м/с}$. Траектория мяча проходит на расстоянии 0,8 м от вертикальной оси вращения скамейки. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамейка с человеком, поймавшим мяч? Считать, что суммарный момент инерции человека и скамейки равен 6 кг·м^2.

Вариант 42

1. Камень падает с высоты $1200\ \text{м}$. Какой путь S пройдет камень за последнюю секунду своего падения?

2. Самолет, летевший на высоте $2940\ \text{м}$ со скоростью $360\ \text{км/ч}$, сбросил бомбу. За какое время до прохождения над целью, и на каком расстоянии от нее самолет должен сбросить бомбу, чтобы попасть в цель?

3. Колесо радиусом 5 см вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $D = 1\ \text{рад/с}^3$. Найти для точек, лежащих на ободе колеса, изменение тангенциального ускорения за каждую секунду движения.

4. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $2\ \text{рад/с}^2$. Через 0,5 с после начала движения полное ускорение колеса стало равно $13{,}6\ \text{см/с}^2$. Найти радиус колеса.

5. Найти силу тяги, развиваемую мотором автомобиля, движущегося в гору с ускорением $1\ \text{м/с}$. Уклон горы равен $1\ \text{м}$ на каждые $25\ \text{м}$ пути. Вес автомобиля $9{,}8 \cdot 10^3 H$. Коэффициент трения равен 0,1.

6. Тело весом $29{,}4\ \text{Н}$ движется со скоростью $4\ \text{м/с}$ и ударяется о неподвижное тело такого же веса. Считая удар центральным и неупругим, найти количество тепла, выделившееся при ударе.

7. Два тела массами 2 и $3\ \text{кг}$ двигаются со скоростями соответственно 8 и $4\ \text{м/с}$. Найти работу деформации этих тел в случаях: 1) меньшее догоняет большее; 2) тела двигаются навстречу друг другу.

8. На стержне длиной $50\ \text{см}$ закреплены два одинаковых грузика. Один из них расположен в середине стержня, другой – на одном из его концов. Стержень с грузиками колеблется относительно горизонтальной оси, проходящей через другой конец стержня. Момент инерции системы равен $4{,}79 \cdot 10^{-2}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$. Найти массу грузиков, если масса стержня в 2 раза больше массы грузика.

9. На горизонтальную ось насажены маховик и шкив радиусом 5 см. На шкив намотан шнур, к которому привязали груз массой 400 г. Опускаясь равноускоренно, груз прошел путь 1,8 м за 3 с. Определить момент инерции маховика. Массу шкива не учитывать.

10. Сплошной диск катится по горизонтальной дороге со скоростью 7,2 км/ч. На какое расстояние может вкатиться диск на горку за счет кинетической энергии? Уклон горки ранен 4 м на каждые 100 м пути.

11. Определить момент сил трения, существующих во вращающихся частях мотора, если при равномерном подъеме груза $P = 100$ Н, привязанного к нити, наматывающейся на шкив радиусом 0,2 м, развивалась мощность, равная 100 Вт; при этом груз за 5 с поднялся на высоту 2 м.

12. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом 2 м, стоит человек. Масса платформы равна 200 кг, масса человека 80 кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Пренебрегая трением, найти, с какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью 2 м/с относительно платформы.

ВАРИАНТ 43

1. Камень брошен вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с. Через сколько секунд камень будет находиться на высоте 15 м? Какова будет скорость камня на этой высоте? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Тело брошено под некоторым углом к горизонту. Найти величину этого угла, если горизонтальная дальность полета в 4 раза больше максимальной высоты траектории.

3. Колесо, вращаясь равнозамедленно, при торможении уменьшило свою скорость за 1 мин с 300 до 180 об/мин. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов, сделанных им за это время.

4. Колесо радиусом $R = 0{,}1$ м вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $B = 2$ рад/с^2 и $C = 2$ рад/с^3. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через 2 с после начала движения следующие величины: 1) угловую скорость; 2) линейную скорость; 3) угловое ускорение; 4) тангенциальное ускорение; 5) нормальное ускорение.

5. Автомобиль движется по трассе с углом наклона $10°$. Вес автомобиля $9{,}3 \cdot 10^3$ Н, сила трения, действующая на него, равна $0{,}1$ веса. Чему равна сила тяги мотора, если автомобиль движется с ускорением $2\ \text{м}/\text{с}^2$?

6. Тело массой 5 кг ударяется о неподвижное тело массой $2{,}5$ кг, которое после удара начинает двигаться с кинетической энергией 5 Дж. Считая удар центральным и упругим, найти кинетическую энергию первого тела до и после удара.

7. Конькобежец, стоя на льду, бросил вперед гирю массой 5 кг и вследствие отдачи покатился назад со скоростью $1\ \text{м}/\text{с}$. Масса конькобежца 60 кг. Определить работу, совершенную конькобежцем при бросании гири.

8. К ободу однородного диска радиусом $0{,}2$ мприложена постоянная касательная сила $F = 98{,}1$ Н. При вращении на диск действует момент сил трения $M = 4{,}9$ Н $\cdot$ м. Найти вес диска, если известно, что диск вращается с постоянным угловым ускорением $100\ \text{рад}/\text{с}^2$.

9. Диск массой 500 г и радиусом 40 см вращается относительно оси, перпендикулярной плоскости диска на расстоянии, равном радиусу диска. Найти момент инерции диска относительно указанной оси.

10. Обруч и сплошной цилиндр массой по 2 кг каждый катятся без скольжения с одинаковой скоростью $5\ \text{м}/\text{с}$. Найти кинетические энергии этих тел.

11. Блоком поднимают груз на высоту 10 м за 15 с. Определить массу поднимаемого груза, если мощность, развиваемая человеком, равна 50 Вт, момент сил трения в блоке равен 2 Н $\cdot$ м; радиус блока 5 см.

12.Платформа в виде диска радиусом 1 м вращается по инерции с частотой $6\ \text{об}/\text{с}$. На краю платформы стоит человек, масса которого 80 кг. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции платформы $120\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Вариант 44

1. Вертикально вверх с начальной скоростью $20\ \text{м}/\text{с}$ брошен камень. Через 1 с после этого брошен вертикально вверх второй камень с такой же скоростью. На какой высоте встретятся камни?

2. Под каким углом к горизонту надо бросить тело, чтобы высота его подъема была равна дальности полета?

3. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости 20 рад/с через 10 об.после начала вращения. Найти угловое ускорение.

4. Колесо радиусом 5 см вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $D = 1$ рад/с^3. Найти для точек, лежащих на ободе колеса, изменение тангенциального ускорения за каждую секунду движения.

5. Под действием постоянной силы 19,8 Н тело движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом расстояния от времени дается уравнением $S = A - Bt^2 + Ct^2$. Найти массу тела, если постоянная $C = 0{,}5$ м/с^2.

6. Тело весом 49 Н ударяется о неподвижное тело весом 24,5 Н. Кинетическая энергия системы этих двух тел непосредственно после удара стала равна 5 Дж. Считая удар центральным и неупругим, найти кинетическую энергию первого тела до удара.

7. Тело скользит сначала по наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонтом, а затем по горизонтальной поверхности. Найти величину коэффициента трения, если тело проходит по горизонтали такое же расстояние, как и по наклонной плоскости.

8. Определить момент инерции однородного маховика, у которого вырезаны два симметричных отверстия. Масса сплошного маховика равна 10 кг, радиус 30 см, радиусы отверстий 8 и 5 см.

9. Маховик радиусом 40 см, масса 30 кг которого распределена по ободу, вращается с угловой скоростью 60 с$^{-1}$. В некоторый момент времени к ободу с силой 20 Н прижимается тормозная колодка, причем коэффициент трения равен 05. Найти время торможения и число оборотов маховика до остановки.

10. Сплошной цилиндр массой 4 кг катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Линейная скорость оси цилиндра равна 1 м/с. Определить полную кинетическую энергию цилиндра.

11. Через 5 с после начала вращения якорь мотора приобрел частоту 1500 об/мин. Определить момент инерции якоря, если мотор развивает мощность 500 Вт.

12. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю неподвижной платформы стоит человек. На какой угол повернется платформа, если человек пройдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется в исходную точку? Масса платформы составляет 240 кг, масса человека 60 кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Вариант 45

1. Движение точки по прямой задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 2$ м/с; $B = 2$ рад/с^2. Определить среднюю скорость движения точки в интервале времени от $1 - 3$ с.

2. Дальность полета тела, брошенного в горизонтальном направлении со скоростью 10 м/с, равна высоте бросания. С какой высоты брошено тело?

3. Точка движения по окружности радиусом 20 см с постоянным тангенциальным ускорением 5 см/с^2. Через сколько времени после начала движения нормальное ускорение точки будет вдвое больше тангенциального?

4. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 1$ рад/с; $C = 1$ рад/с^2 и $D = 21$ рад/с^3. Найти радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды движения нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, равно $3{,}46 \cdot 10^2$м/с^2.

5. С наклонной плоскости высотой 1,5 м и длиной 10 м скользит тело массой 0,5 кг. Найти: 1) кинетическую энергию тела у основания плоскости; 2) скорость тела у основания плоскости; 3) общий пройденный путь. Коэффициент трения везде одинаков и равен 0,02.

6. Стальной шарик массой 20 г, падая на стальную плиту с высоты 1 м, отскакивает от нее на высоту 81 см. Найти: 1)импульс силы, полученный плитой за время удара; 2) количество тепла, выделившегося при ударе.

7. Акробат на мотоцикле описывает мертвую петлю радиусом 4 м. С какой наименьшей скоростью должен проезжать акробат верхнюю точку петли, чтобы не сорваться?

8. Однородный диск радиусом 0,2 м и весом 49 Н вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Зависимость угловой скорости вращения диска от времени дается уравнением $\omega = A + Bt$, где $B = 8$ рад/с^2 . Найти величину касательной силы, приложенной к ободу диска. Трением пренебречь.

9. Однородный диск радиусом 20 см и массой 4 кг колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих поверхности диска. Определить момент инерции диска относительно указанной оси.

10. Шар массой 2 кг, катящийся без скольжения, ударяется о стенку и откатывается от нее. Скорость шара до удара о стенку $10\ м/с$, после удара $6\ м/с$. Найти количество тепла, выделившееся при ударе.

11. Однородный стержень длиной $50\ см$, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую и линейную скорость будет иметь в конце падения: 1) середина стержня; 2) верхний его конец?

12. Однородный тонкий стержень массой $0{,}2$ кг и длиной 1 м свободно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину. В конец стержня попадает пластилиновый шарик (летящий горизонтально и перпендикулярно оси вращения стержня со скоростью $10\ м/с$) и прилипает к стержню. Масса шарика равна 10 г. Определить линейную скорость конца стержня в момент удара.

Вариант46

1. Точка движется по прямой согласно уравнению $x = At + Bt^3$, где $B = 0{,}125\ м/с^3$. Определить среднюю скорость движения точки в интервале времени от $t_1 = 2с$ до $t_2 = 6$ с.

2. С башни высотой $25\ м$ горизонтально бросили камень со скоростью $15\ м/с$. Найти: 1) сколько времени камень будет в движении; 2) на каком расстоянии от основания башни он упадет на землю; 3) с какой скоростью он упадет на землю; 4) какой угол составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю. Сопротивление воздуха не учитывать.

3. Диск радиусом $10\ см$ вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 3$ рад; $B = -1$ рад/с; $C = 0{,}1$ рад/с^3. Определить тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска для момента времени 5 с.

4. Материальная точка, начав двигаться равноускоренно по окружности радиусом1 м, прошла за время 10 с путь 50 м. С каким нормальным ускорением двигалась точка спустя 5 с после начала движения?

5. С наклонной плоскости высотой 1,5 м и длиной 10 м скользит тело массой $0{,}5\ кг$, которое приходит к основанию плоскости со скоростью $5{,}1\ м/с$. Найти: 1) коэффициент трения тела о плоскость; 2) количество тепла, выделенного при трении.

6. Снаряд массой 10 кг обладает скоростью $200\ м/с$в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на части. Меньшая, массой 3 кг, получила скорость 400 м/с в прежнем направлении. Найти скорость второй, большей части после разрыва.

7. Камень брошен вверх под углом $60°$ к плоскости горизонта. Кинетическая энергия камня в начальный момент 20 Дж, масса его 0,1 кг. Определить кинетическую и потенциальную энергии камня через 1 с после бросания.

8. К ободу колеса, имеющего форму диска, радиусом 0,5 м и массой 50 кг приложена касательная сила 98 Н. Найти: 1) тангенциальное ускорение точек на ободе колеса; 2) через сколько времени после начала действия силы частота вращения колеса будет равна 100 об/с.

9. Два диска одинаковой массы, равной 200 г, и различных радиусов в 15 и 10 см насажены на общую ось, проходящую перпендикулярно их плоскости и через центр их масс. Найти момент инерции этой системы.

10. Линейная скорость центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости, равна 5,29 м/с. Чему равна высота наклонной плоскости?

11. Мощность, затрачиваемая на вращение маховика диаметром 1 м и массой 100 кг из состояния покоя, в некоторый момент времени t равна 500 Вт. Уравнение движения маховика имеет вид $\varphi = 3 + 10t - 3t^2$. Определить этот промежуток времени.

12. На скамье Жуковского стоит человек и держит в руках стержень длиной 2,4 м и массой 8 кг, расположенный вертикально по оси вращения скамьи. Скамья с человеком вращается с частотой 1 об/с. С какой частотой будет вращаться скамья с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи равен 6 кг $\cdot$ м^2.

Вариант 47

1. Движение материальной точки задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 4$ м/с и $B = -0{,}05$ м/с^2. Определить, в какой момент времени скорость её равна 0. Найти координату и ускорение в этот момент.

2. Как изменятся время и дальность полета тела, брошенного горизонтально, при увеличении высоты его подъема в 4 раза? Скорость бросания при этом не меняется.

3. Колесо при вращении имело начальную частоту 5 об/с, после торможения его частота уменьшилась до 3 об/с. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов, сделанных им за 1 мин.

4. Диск радиусом 10 см вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 3$ рад; $B = -1$ рад/с и $C = 0{,}1$ рад/с^3. Определить тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска для момента времени 5 с.

5. Материальная точка, начав двигаться равноускоренно по окружности радиусом1 м, прошла за время 10 с путь 50 м. С каким нормальным ускорением двигалась точка спустя 5 с после начала движения?

6. С наклонной плоскости высотой 1,5 м и длиной 10 м скользит тело массой 0,5 кг, которое приходит к основанию плоскости со скоростью 5,1 м/с. Найти: 1) коэффициент трения тела о плоскость; 2) количество тепла, выделенного при трении.

7. Линейная скорость центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости, равна 5,29 м/с. Чему равна высота наклонной плоскости?

8. Мощность, затрачиваемая на вращение маховика диаметром 1 м и массой 100 кг из состояния покоя, в некоторый момент времени t равна 500 Вт. Уравнение движения маховика имеет вид $\varphi = 3 + 10t^2 - 3t^2$. Определить этот промежуток времени.

9. Шар катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Полная кинетическая энергия шара 14 Дж. Определить кинетическую энергию: 1) поступательного и 2) вращательного движения шара.

10. Вычислить работу, совершаемую при равноускоренном подъеме груза массой 100 кг на высоту 4 м за время 2 с.

11. Сколько времени будет скатываться без скольжения обруч с наклонной плоскости длиной 2 м и высотой 10 см?

12. Маховик вращается по закону, выражаемому уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $B = 1$ рад/c и $C = 1$ рад/с^2. Момент инерции маховика равен 50 кг · м^2. Чему равна мощность в конце третьей секунды?

Вариант 48

1. Зависимость пройденного телом пути от времени дается уравнением $S = A + Bt + Ct^2$, где $A = 1$ м; $B = 1$ м/с и $C = 2$ м/с^2. Найти среднюю скорость и среднее ускорение тела за четвертую секунду его движения.

2. Из орудия, установленного на платформе массой 15 т, производится выстрел снарядом массой 120 кг, который получает скорость 200 м/с под углом 30° к горизонту. Сколько времени будет двигаться платформа, и какой путь она пройдет до остановки, если коэффициент трения 0,15?

3. Маховик, имеющий вид сплошного диска, массой 50 кг и радиусом 0,4 м вращался, делая 240 об/мин. Сделав 21 оборот, маховик через 5 с уменьшил частоту вращения до ν_2. Найти момент сил трения, замедлявших вращение маховика.

4. Тангенциальное ускорение точки вращающейся по окружности радиусом 1 м, равно 1 м/с^2. Определить нормальное ускорение точки через 10 с после начала вращения ($\omega_0 = 0$) и число полных оборотов за это время.

5. Тело 1 массой 2 кг со скоростью 3 м/с догоняет тело 2 массой 1 кг, движущееся со скоростью 1 м/с, и сталкивается с ним неупруго. Третье тело, имеющее массу 2 кг, соскальзывает с высоты 1,8 м и на горизонтальной плоскости сталкивается с телами 1 и 2 неупруго. Какова будет скорость у тел? Трением пренебречь.

6. Вагон массой 10 т, движущийся со скоростью 2 м/с, догоняет второй вагон массой 15 т, имеющей скорость 1,2 м/с, и сталкиваясь с ним неупруго, продолжает движение вместе. Навстречу этим вагонам движется третий вагон массой 12 т со скоростью 1,8 м/с. Происходит сцепка вагонов в единое целое. Какова будет скорость вагонов после этого? Какой путь они пройдут до остановки, если коэффициент трения $\mu = 0{,}005$?

7. Какую мощность развивает мотор крана при подъёме бадьи с бетоном массой 0,5 т на высоту 20 м равноускоренно за время 12 с?

8. Деталь имеет форму цилиндра радиусом 50 см и высотой 1,2 м. В ней выточены три симметрично расположенных сквозных отверстия радиусом по 20 см, центры которых лежат на расстоянии 25 см от центральной оси. Плотность стали $\rho = 7{,}8$ г/см^3. Найти момент инерции тела относительно центральной оси.

9. Определить момент силы, который необходимо приложить к блоку, вращающемуся с частотой 12 об/с, чтобы он остановился в течение 10 с. Диаметр блока 40 см. Массу блока считать распределенной равномерно и равной 20 кг.

10. Человек массой 60 кг стоит на расстоянии 2 м от оси неподвижной платформы карусели радиусом 5 м. Определить, с какой скоростью будет вращаться платформа, если человек будет бежать по кругу радиусом 2 м со скоростью 2 м/с относительно платформы. Человека считать материальной точкой. Платформу считать однородным диском массой 200 кг.

11. Сплошной цилиндр массой 12 кг толкнули вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью 4 м/с. Закатываясь без скольжения, цилиндр поднялся на высоту 0,9 м. Определить работу сил трения.

12. Маховик вращается по закону, выраженному уравнением $\varphi = 3 + 16t - 3t^2$. Найти мощность, развиваемую силами, действующими на маховик при его вращении, в момент времени $t = 2$ с, если масса маховика 200 кг и радиус 0,6 м.

Вариант 49

1. Вертолет взлетает вертикально со скоростью 8 м/с и на высоте 120 м над землей из него выбрасывают груз. Через какое время груз упадет на землю?

2. Из пушки, стоящей на возвышении высотой 120 м, стреляют под углом 30° к горизонту. Определить расстояние S, которое пролетит снаряд, если его скорость 300 м/с.

3. Диск радиусом 10 см вращается вокруг неподвижной оси. Зависимость угла поворота от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = 1$ рад/с; $C = 1$ рад/с^2; $D = 1$ рад/с^3. Определить для точек на ободе колеса тангенциальное, нормальное и полное ускорения к концу второй секунды после начала вращения.

4. Маховик, вращаясь равноускоренно из состояния покоя, сделал 10 оборотов, и частота вращения стала 5 об/с. Определить линейную скорость точек его обода через 20 с, если радиус $R = 10$ см.

5. Невесомый блок укреплен на вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°. Два груза массами 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения между грузом и плоскостью вен0,1. Чему равно ускорение движения грузов?

6. Тело 1 массой 2 кг со скоростью 3 м/с догоняет тело 2 массой 1 кг, движущееся со скоростью 1 м/с и сталкивается с ним неупруго. Третье тело, имеющее массу 2 кг, соскальзывает с высоты 1,8 м и на горизонтальной плоскости сталкивается с телами 1 и 2 неупруго. Какова будет скорость у тел? Трением пренебречь.

7. Решить предыдущую задачу, считая, что соударение первых двух тел, а затем и соударение с телом 3 происходит сразу у основания наклонной плоскости, длина которой 3,6 м и коэффициент трения на ней везде одинаков и равен 0,1. Узнать путь, который пройдут тела после столкновения.

8. В однородном диске массой 1 кг и радиусом 30 см вырезано круглое отверстие диаметром 20 см, центр которого находится на расстоянии 15 см от оси диска. Найти момент инерции тела относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости диска через его центр.

9. На диск A радиусом 20 см и массой 5 кг накинут шнур, который тянут с силой 4,2 Н. Масса блока B равна 2 кг, радиус 5 см. Определить силу натяжения шнура между A и B и ускорение движения нити.

10. Круглая платформа в виде сплошного диска имеет в центре стержень A, на конце которого находится свободно поворачивающийся вокруг горизонтальной оси O стержень B массой 10 кг и длиной 1,1 м. Сначала стержень был вертикален (положение 1), платформа вращалась с угловой скоростью $2\ \text{с}^{-1}$ и обладала при этом кинетической энергией 2 Дж. Затем стержень занял положение 2 (горизонтальное). Определить угловую скорость вращения платформы.

11. Определить мощность, затраченную на раскручивание маховика массой 10 кг в течение 5 с, если к ободу радиусом 20 см приложена постоянная сила трения 10 Н, и известно, что во временном интервале $2c < t < 4\ c$ маховик сделал 4 оборота.

12. Столб высотой 10 м и массой 500 кг упал из вертикального положения на склон, имеющий угол наклона 20°. Какую линейную скорость будет иметь вершина столба в момент падения?

Вариант 50

1. Зависимость пройденного телом пути от времени дается уравнением $S = A + Bt + Ct^2$, где $A = 3$ м; $B = 2$ м/с и $C = 1\ \text{м/с}^2$. Найти ускорение и скорость тела за первую, вторую и третью секунды его движения.

2. Тело начало вращаться из состояния покоя и через 3 с имело линейную скорость 10 м/с Определить, сколько оборотов сделает тело после этого к моменту времени 5 с, если радиус вращения 0,5 м.

3. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 10 - 4t + t^3$. В какой момент времени угловая скорость вращения будет равна 12с^{-1}? Чему будет равно угловое ускорение в этот момент времени? Тангенциальное ускорение при радиусе кривизны 0,1 м.

4. Из одной точки одновременно брошены два тела с одинаковой скоростью под разными углами к горизонту. Определить расстояние между телами спустя 2 с после начала движения по вертикали и горизонтали, если начальная скорость равнялась 25 м/с, а углы 30 и 60°.

5. Машина спускается с горы высотой 100 м с выключенным мотором. Какую скорость она будет иметь у основания наклонной плоскости, если путь, пройденный ею, равен 1000 м, а коэффициент трения колес о землю равен 0,1?

6. Два одинаковых шара подвешены на нитях по 0,98 м каждая и касаются друг друга. Один из шаров отклоняется на угол 10° и отпускается. Определить максимальную скорость второго шара после соударения, если удар абсолютно упругий.

7. Молот массой 5 кг ударяет кусок железа, лежащий на наковальне массой 100 кг (массой железа пренебречь). Удар неупругий. Определить к.п.д. молота, если полезной считать энергию, пошедшую на деформацию.

8. На концах тонкого однородного стержня длиной 1 м и массой 300 г прикреплены маленькие шарики массами 100 и 200 г. Определить момент инерции относительно оси, проходящей через его середину.

9. Из колодца с помощью ворота поднимается ведро с водой массой 10 кг. В момент, когда ведро находилось на высоте 5 м от поверхности воды, рукоятка освободилась, и ведро стало двигаться вниз. Определить линейную скорость рукоятки в момент удара ведра о поверхность воды, если радиус рукоятки $R = 30$ см, радиус вала ворота 10 см и его масса 20 кг.

10. На общей вертикальной оси насажены два диска массами 2 и 4 кг и радиусами 0,5 и 0,3 м соответственно. Вращения дисков задаются уравнениями $\varphi_1 = 2t$ и $\varphi_2 = -1\ 5t$. Верхний диск падает на нижний и сцепляется с ним. Как будут вращаться диски?

11. Пуля выпущена из винтовки с начальной скоростью 600 м/с под углом 30° к горизонту. Найти радиус траектории пули в верхней ее точке, высоту подъёма и дальность полета, если не учитывать сопротивление воздуха.

12. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону, выражаемому формулой $\varphi = 10 + 20t - 25t^2$. Для момента времени 1 снайти величину и направление полного ускорения точки, находящейся на расстоянии 0,1 м от оси вращения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Правила приближенных вычислений

Числовые значения физических величин, с которыми приходится иметь дело при решении задач, в большинстве случаев являются приближенными, причем степень приближения зависит как от точности приборов, которыми измерялась данная физическая величина, так и от тех требований, которые выдвигаются условиями задачи.

Так, например, ускорение свободного падения обычно принимается равным$9{,}81\ \text{м/с}^2$. Однако более точные измерения этой величины могут дать расчеты, и значение этой величины можно принять равным$10\ \text{м/с}^2$.

Необходимо помнить, что точность конечного результата вычислений зависит только от точности измерений и ее невозможно повысить за счет точности вычислений, высчитывая много десятичных знаков после запятой. Рассмотрим это на примере следующей задачи.

За сколько времени падающее тело достигнет скорости$50\ \text{м/с}$?

$$t = \frac{v}{g} = \frac{50}{9{,}81} = 5{,}09684 \ldots \text{с}.$$

В соответствии с законами свободного падения $v = gt$.Можно производить деление и дальше, но смысла это иметь не будет, так как вполне достаточно остановиться на числе$5{,}09$,имеющем столько же значащих цифр, сколько их имеет исходное данное -9,81. Излишнее количество знаков при вычислениях не только не приносит пользы, но и является грубой ошибкой, так как говорит о том, что вычислитель не имеет представления о точности своих измерений и вычислений и бесполезно затрачивает свой труд и время.Чтобы избежать вычисления ненужных знаков, необходимо соблюдать правила действия над приближенными числами.

1. Следует правильно записывать приближенные числа. Так, например, числа$5{,}6; 5{,}60; 5{,}600$–отнюдь не одно и то же число. В первой записи указано, что верны лишь цифры целых и десятых долей. Во втором числе верны сотые доли, а в третьем – также и тысячные, следовательно, измерения, в которых получено это число, оказались наиболее точными из всех трех измерений.

2. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате надо отбрасывать по правилам округления цифры тех разрядов справа, которых нет хотя бы в одном из слагаемых. Так, например:
$28 + 3{,}2 = 31{,}2 \ \approx 31.$
Десятые доли отброшены, так как десятичные знаки первого слагаемого неизвестны.

3. При умножении и делении приближенных чисел в результате необходимо оставлять столько значащих цифр, сколько их имеется в числе с наименьшим количеством значащих цифр. Прочие цифры заменяются нулями или отбрасываются по правилам округления. Например:

$$253 \cdot 13 = 3289 \approx 3300,$$
$$2{,}79 \div 13 = 0{,}2146 \approx 0{,}21.$$

4. При возведении в степень или извлечении корня в результате надо оставлять столько значащих цифр, сколько их в исходном числе, с которым производится действие. Например:

$$2{,}5^2 = 6{,}25 \approx 6{,}3 \ldots\ldots\ldots \sqrt{26{,}5} \approx 5{,}15.$$

5. При вычислении сложных выражений следует применять указанные правила в соответствии с видом производимых действий. Например,

$$\frac{5{,}3 + 12{,}036 \cdot \sqrt{4{,}88}}{2{,}7 \cdot 3{,}025}.$$

Числа 5,3и 2,7 имеют наименьшее количество значащих цифр, а именно две. Поэтому результаты всех промежуточных вычислений должны округляться до трех знаков, оставляя, кроме двух достоверных, один сомнительный знак. Тогда предыдущее выражение можно будет записать так:

$$\frac{17{,}3 \cdot 2{,}21}{2{,}7 \cdot 3{,}02} = \frac{38{,}2}{8{,}15} \cong 4{,}69.$$

Произведя эти вычисления, округляем ответ до двух значащих цифр, т.е. до 4,7.

6. Табличные величины (числоπ,заряд электрона и т.п.) следует брать с таким количеством значащих цифр, которое равно количеству значащих цифр в наименее точном из данных по условиям задачи.

7. В ряде случаев результаты измерений или табличные данные выражаются числами, близкими к единице, но заведомо не равными единице. При точных вычислениях такие числа округлять нельзя. Так, например, магнитная проницаемость платины равна1,00360, показатель преломления воздуха равен1,00029и т.п. Вычисления с ними довольно громоздкие,. поскольку при работе с такими числами следует пользоваться специальными правилами.

Пусть число может быть выражено в виде $1 \pm x$, где x– малое число. Тогда

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm n \cdot x,$$
$$\sqrt[n]{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{n} \cdot x,$$
$$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x.$$

Рассмотрим применение этих правил на примерах:

$$\frac{1}{1{,}00029} = 1 - 0{,}00029 = 0{,}99971,$$
$$1{,}00029^2 = 1 + 2 \cdot 0{,}00029 = 1{,}00058,$$
$$\sqrt{26} = \sqrt{25 + 1} = 5 \cdot (1 + 0{,}5 + 0{,}04) = 5 + 0{,}1 = 5{,}1.$$

Этими правилами следует широко пользоваться в приближенных вычислениях и при решении задач.

При вычислениях в ряде случаев удобно пользоваться табл. 3 и 4 приложения.

Таблица 1

Основные физические постоянные

Название	Символ	Значение
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$
Скорость света в вакууме	c	$3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$
Постоянная Авогадро	N_{A}	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	R	$8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$
Постоянная Больцмана	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$
Постоянная Фарадея	F	$9{,}65 \cdot 10^4\ \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$
Постоянная Планка	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Постоянная Стефана-Больцмана	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$
Постоянная Вина	c	$2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м · К
Заряд электронов	e	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	m_p	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса нейтрона	m_n	$1{,}68 \cdot 10^{-27}$ кг

Т*аблица* 2

Приставки для обозначения десятичных кратных и дольных единиц

Название приставки	Обозначение	Коэффициент умножения, соответствующий приставке	Пример
Тера	Т	10^{12}	Тераджоуль (ТДж)
Гига	Г	10^{9}	Гигаом (ГОм)
Мега	М	10^{6}	Мегаом (МОм)
Кило	к	10^{3}	Километр (км)
Гекто	г	10^{2}	Гектоватт (гВт)
Дека	да	10	Декалитр (дал)
Деци	д	10^{-1}	Дециметр (дм)
Санти	с	10^{-2}	Сантиметр (см)
Милли	м	10^{-3}	Миллиампер (мА)
Микро	мк	10^{-6}	Микровольт (мкВ)
Нано	н	10^{-9}	Нанометр (нм)
Пико	п	10^{-12}	Пикофарада (пФ)

Примечание. При произношении ударение не должно приходиться на приставку.

Т*аблица* 3

Корни и натуральные логарифмы чисел от 1 до 10

N	$\sqrt{N}$	$\ln N$	N	$\sqrt{N}$	$\ln N$
1	1,000	0,000	6	2,449	1,792
2	1,414	0,693	7	2,626	1,946
3	1,732	1,099	8	2,828	2,079
4	2,000	1,386	9	3,000	2,197
5	2,236	1,609	10	3,162	2,303

Таблица 4

Некоторые часто встречающиеся числа и их логарифмы

Число	N	$\lg N$	Число	N	$\lg N$
π	3,14	0,497	$\sqrt{\pi}$	1,772	0,248
2π	6,28	0,798	π^2	9,870	0,994
3π	12,57	1,099	g	9,81	0,992
$4/3\pi$	4,19	0,622	E	2,718	0,434
$\pi/2$	1,571	0.196	$1/e$	0.368	1.793

Таблица 5

Греческий алфавит

Обозначение буквы	Название буквы	Обозначение буквы	Название буквы
Α,ά	Альфа	Ν,ν	Ню
Β,β	Бета	Ξ,ξ	Кси
Γ,γ	Гамма	Ο,ο	Омикрон
Δ,δ	Дельта	Π,π	Пи
Ε,ε	Эпсилон	Ρ,ρ	Ро
Ζ,ζ	Дзета	Σ,σ	Сигма
Η,η	Эта	Τ,τ	Тау
Θ,θ	Тэта	Υ,υ	Ипсилон
Ι,ι	Йота	Φ,φ	Фи
Κ,κ	Каппа	Χ,χ	Хи
Λ,λ	Ламбда	Ψ,ψ	Пси
Μ,μ	Мю	Ω,ω	Омега

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Савельев И.В*. Курс физики: т. 1. – СПб.; М.: Лань; Краснодар, 2007.
2. *Фриш С.Э.* Курс общей физики: т 1. /*С.Э. Фриш,А.В.Тимореева*.– СПб.; М.: Лань; Краснодар, 2006.
3. *Александров Н.В.* Курс общей физики: Механика. – М.: Просвещение, 1978.

4. *Гладской В.М.* Физика: Сб. задач с решениями. /*В.М. Гладской, П.И. Самойленко*. – М. Дрофа, 2008.

5. *Волькенштейн В.С.* Сб. задач по общему курсу физики. – СПб.: Спецлит, 2002.

6. *Чертов А.Г.* Задачник по физике. /*А.Г. Чертов, Воробьев А.А.* – М.: Высш. шк., 1988.

7. *Грабовский Р.И*. Сб. задач по физике. – М.: Высш. шк., 1975.

Содержание

Составители:

Дзю Искра Михайловна
Викулов Станислав Викторович
Тихонкин Игорь Васильевич

АГРОИНЖЕНЕРНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор Н.К. Крупина
Компьютерная верстка Н.С. Пияр

Подписано к печати 2 февраля 2016 г.
Формат 60х841/16.Объем 7,4 уч.- изд.л., 14,5 усл.печ.л.
Тираж 100 экз. Изд. №159 Заказ №992

Отпечатано в Издательстве
Новосибирского государственного университета
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160,каб.106.
Тел. (383) 267-09-10. E-mail: 2134539@mail.ru