

**ФГБОУ ВО Университет биотехнологий**  
**Кафедра математики и физики**

Рег. № АИБ-26.12ф  
«27» января 2026 г.

**УТВЕРЖДЕН**  
на заседании кафедры  
Протокол №6 от 13 января 2026 г.  
Заведующий кафедрой

 Бабин В.Н.

(подпись)

## **ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

**Б1.О.12 Математика**

Шифр и наименование дисциплины

**35.03.06 Агроинженерия**

Код и наименование направления подготовки

Технические системы и цифровизация производства  
Электрооборудование и электротехнологии  
Технические системы и роботизация пищевых производств  
Сервис технических систем

Направленность (профиль)

Новосибирск 2026

## Паспорт фонда оценочных средств

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочных средств
1	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	ОПК-1	Контрольные вопросы и задания
2	Математический анализ	ОПК-1	Контрольные работы
3	Дифференциальные уравнения	ОПК-1	Контрольные задания
4	Ряды	ОПК-1	Контрольные вопросы и задания, контрольная работа
5	Основы теории вероятностей и математической статистики	ОПК-1	Контрольные вопросы и задания, контрольная работа

**КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ИНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ОЦЕНКИ  
знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие  
этапы формирования компетенций в процессе освоения дисциплины**

**Примерный перечень вопросов для собеседования  
по дисциплине «Математика»**

**РАЗДЕЛ 1 Линейная алгебра и аналитическая геометрия.**

**Тема 1 «Матрицы, определители 2-го и 3-го порядков»**

1. Перечислите свойства определителей.
2. Какие способы вычисления определителей вы знаете?
3. Какой вид имеет формула Крамера? В каком случае их можно применять?

**Тема 2 «Способы решения систем линейных уравнений»**

4. Сформулируйте условие, при котором система линейных уравнений имеет единственное решение.

**Тема 3 «Ранг матрицы»**

5. При каком условии система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение?

**Тема 4 «Векторы»**

6. Как определяются декартовы координаты точки на плоскости?
7. Чем отличаются координаты двух точек, симметричных относительно: а) оси  $Ox$ ; б) оси  $Oy$ ; в) начала координат?
8. Как вычислить расстояние между двумя точками?
9. Напишите формулы для координат середины отрезка через координаты его концов.
10. Как определяется сумма и разность двух векторов?
11. Дайте определение коллинеарных и компланарных векторов.
12. Дайте определение проекции вектора на ось.
12. Как выглядит разложение вектора в системе орт на плоскости и в пространстве? Что такое координаты вектора?
13. Каковы свойства скалярного произведения векторов?
14. Как найти угол между векторами? Как найти длину вектора по его координатам?
15. Каково условие перпендикулярности двух векторов?
16. Как найти вектор, перпендикулярный двум данным векторам?
17. Как найти площадь треугольника, построенного на двух векторах?
18. Как найти объем пирамиды с вершинами в заданных точках?
19. Как выглядит условие компланарности трех векторов?
20. Что Вы можете сказать о соответственных координатах двух коллинеарных векторов?

**Тема 5 «Прямая линия на плоскости»**

21. Дайте определение уравнения линии на плоскости.
22. Как найти координаты точки пересечения двух линий на плоскости, заданных своими уравнениями?
23. Чем отличается уравнение прямой в декартовых координатах от уравнения других линий?
24. Напишите формулу для вычисления угла между двумя прямыми.
25. Как выглядит условие параллельности и перпендикулярности двух прямых?
26. Напишите уравнение прямой, проходящей а) через заданную точку в заданном направлении; б) через две заданные точки.
27. Как написать уравнение медианы, высоты в треугольнике, если известны координаты его вершин?

**Тема 6 «Уравнения плоскости и прямой в пространстве»**

28. Как выглядит уравнение плоскости, проходящей а) через заданную точку с заданным нормальным вектором; б) через три заданные точки?

29. Напишите формулу для вычисления угла между двумя плоскостями.
30. Какие Вы знаете виды уравнений прямой в пространстве?
31. Как выглядит формула для отыскания угла между двумя прямыми в пространстве?
32. Как найти координаты точки пересечения плоскости и прямой?
33. Как найти расстояние от заданной точки до заданной плоскости?
34. Как найти угол между плоскостью и прямой?

### **Тема 7 «Кривые второго порядка»**

35. Сформулируйте определения эллипса, гиперболы, параболы. Каковы канонические уравнения этих линий?
36. Что называется эксцентриситетом эллипса и гиперболы и какие значения он может иметь для каждой из этих линий?

## **РАЗДЕЛ 2 Математический анализ.**

### **Тема 8 «Функция одной переменной»**

37. Что такое переменная величина?
38. Сформулируйте определение функции. Что называется областью определения функции?
39. Какие способы задания функции Вы знаете?
40. Какие функции называются элементарными?
41. Сформулируйте понятие предела переменной величины.
42. Дайте определение понятия предела функции.

### **Тема 9 «Предел числовой последовательности и предел функции»**

43. Какая функция называется ограниченной?
44. В каком случае функция называется бесконечно малой?
45. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
46. Дайте определение непрерывности функции в точке.
47. Укажите основные свойства непрерывных функций.

### **Тема 10 «Определение производной»**

48. Сформулируйте определение производной.
49. Какой геометрический смысл производной?
50. Что называется касательной к кривой? Напишите уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(x_0; y_0)$ .
51. Какой механический смысл первой и второй производной?

### **Тема 11 «Таблица производных»**

52. Каковы правила вычисления производных от суммы, произведения, частного двух функций?
53. Сформулируйте правило вычисления производной сложной функции.

### **Тема 12 «Дифференциал функции»**

54. Что называется дифференциалом функции?
55. Чем отличается дифференциал функции от ее приращения?
56. Как формулируется теорема Лагранжа?
57. Каковы признаки возрастания и убывания функции?
58. Докажите, что функция

$$y = \cos x - x$$

убывает в любом промежутке.

59. Сформулируйте правила нахождения экстремумов функции.
60. Приведите пример, показывающий, что обращение в нуль производной не является достаточным условием экстремума функции.
61. Как найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба кривой?
62. Покажите, что график функции

$$y = \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 + ax + b$$

не имеет точек перегиба, каковы бы ни были значения  $a$  и  $b$ .

63. Дайте определение асимптоты кривой. Как найти вертикальные и наклонные асимптоты графика функции?

**Тема 13 «Первообразная функция. Таблица неопределенных интегралов. Вычисление неопределенных интегралов»**

64. Сформулируйте определение первообразной.

65. Каковы основные свойства неопределенного интеграла?

66. Укажите целесообразные подстановки для отыскания интегралов

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx, \quad \int e^{\cos x} \sin x dx, \quad \int \sqrt{1+x^3} x^2 dx,$$

67.

$$\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx, \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int \sin x \cos x dx.$$

68. Выведите формулу интегрирования по частям.

69. Объясните правило разложения рациональной дроби на простейшие. Интегрирование рациональных дробей.

70. Формула замены переменной в неопределенном интеграле.

**Тема 14 «Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница»**

71. Что называется интегральной суммой данной функции на данном отрезке  $[a, b]$ ?

72. Дайте определение определенного интеграла.

73. Какой геометрический смысл определенного интеграла от заданной функции?

73. Перечислите основные свойства определенного интеграла.

74. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.

75. В чем состоит способ подстановки для вычисления определенного интеграла?

76. Как выглядит формула интегрирования по частям определенного интеграла?

77. Как выглядит формула замены переменной в определенном интеграле?

78. Как вычислить площадь криволинейного сектора в полярных координатах?

79. Запишите формулы для вычисления длины дуги кривой в декартовых и в полярных координатах.

80. Приведите формулу для вычисления объема тела с известными площадями его поперечных сечений.

81. Запишите формулу для вычисления объема тела вращения.

**Тема 15 «Частные производные, безусловный и условный экстремумы»**

82. Как определяется функция нескольких переменных?

83. Дайте определение непрерывности функции нескольких переменных.

84. Что называется частной производной функции нескольких переменных?

85. Какова геометрическая интерпретация частной производной функции двух аргументов?

86. Что называется полным дифференциалом функции двух аргументов?

87. Как вычисляется производная сложной функции?

88. Как вычисляется производная по направлению и какова ее связь с градиентом функции?

89. Сформулируйте правило исследования функции двух переменных на экстремум.

## **Тема 16. Интегральное исчисление функций нескольких переменных.**

### **Криволинейный интеграл.**

90. Какая область называется правильной?
91. Как свести двойной интеграл по правильной области к двукратному?
92. Каковы правила перехода в двойном интеграле к полярным координатам там?
93. Как вычисляется объем тела с помощью двойного интеграла?
94. Как вычисляется масса и центр тяжести плоской пластины при заданной поверхностной плотности?
95. Какие задачи приводят к понятию криволинейного интеграла?
96. Как вычисляется криволинейный интеграл?
97. Как влияет на значение криволинейного интеграла направление обхода контура интегрирования?
98. Каковы условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования?
98. Какова связь независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования и равенства нулю криволинейного интеграла по любому замкнутому контуру?

### **РАЗДЕЛ 3 Дифференциальные уравнения.**

#### **Тема 16 «Дифференциальные уравнения первого порядка»**

99. Что называется частным решением дифференциальных уравнений?
100. Сформулируйте теорему существования и единственности дифференциального уравнения первого порядка.
101. Что называется общим решением дифференциального уравнения?
102. Какой вид имеет дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными? Как найти общее решение (общий интеграл) этого уравнения?
103. Какое уравнение называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка? Как найти его общий интеграл?
104. Приведите пример линейного дифференциального уравнения первого порядка. Как найти его общее решение?

#### **Тема 17 «Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами»**

105. Каковы свойства решений линейных однородных уравнений второго порядка?
106. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения второго порядка?
107. Укажите вид общего решения линейного неоднородного уравнения второго порядка.

### **РАЗДЕЛ 4 Ряды.**

#### **Тема 19 «Числовые ряды. Сходимость рядов»**

108. Какой ряд называется сходящимся (расходящимся)?
109. Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда.
110. Сформулируйте признаки сравнения знакоположительных рядов.
111. В чем состоит признак Даламбера?
112. Для каких рядов применяется признак Лейбница? В чем его сущность?

#### **Тема 20 «Функциональные ряды. Степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена»**

113. Как найти радиус сходимости степенного ряда?
114. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании степенного ряда?
115. Как вычисляются коэффициенты ряда Маклорена для заданной функции?
116. Напишите разложения в ряд Маклорена следующих функций

$$e^x, \sin x, \cos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcsin} x, (1+x)^n.$$

117. Как используются степенные ряды в приближенных вычислениях?
118. Как используются степенные ряды в вычислениях пределов, интегралов и при решении дифференциальных уравнений?

## **РАЗДЕЛ 5 Теория вероятностей и математической статистики.**

### **Тема 21 «Предмет теории вероятностей. Основные понятия комбинаторики»**

119. Сформулируйте классическое определение вероятности события.  
120. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.  
121. Дайте определение полной группы событий.  
122. Какие случайные величины называются дискретными (непрерывными)?  
123. Каковы свойства математического ожидания и дисперсии случайной величины?

### **Тема 22 «Повторные независимые испытания. Формула Бернулли»**

### **Тема 24 «Числовые характеристики случайных величин»**

### **Тема 25 «Основные распределения дискретной и непрерывной случайной величины»**

### **Критерии оценки (в баллах):**

- 5 баллов выставляется обучающемуся, если он ответил на 90% вопросов;
- 4 балла выставляется обучающемуся, если он ответил на 75% вопросов;
- 3 балла выставляется обучающемуся, если он ответил на 55% вопросов;
- 2 балла выставляется обучающемуся, если он ответил на менее 50% вопросов.

### **Кейс-задача**

#### **Случайные события**

#### **по дисциплине «Математика»**

**Задание 1.** При производстве некоторого изделия вероятность брака равна 0,2. Закон распределения случайной величины  $X$  - числа бракованных изделий, если изготовлено три изделия, будет иметь вид.....

**Задание 2.** Пусть при производстве бракованного изделия предприятие терпит убытки в размере  $a=20$  тыс. руб., а при производстве небракованного изделия получает прибыль в размере  $b=10$  тыс. руб. Тогда математическое ожидание прибыли предприятия равно тыс.руб.

**Задание 3.** Ожидаемая прибыль предприятия будет нулевой, если значения убытка  $a$  и прибыли  $b$  равны.....

### **Кейс-задача**

#### **Случайные величины**

#### **по дисциплине «Математика»**

Брак при производстве некоторого изделия вследствие дефекта  $D$  составляет 11%, а вследствие дефекта  $E$  – 12%. Процент годной продукции составляет 86%. Пусть  $p$  – вероятность того, что случайно взятое изделие будет признано бракованным как вследствие дефекта  $D$ , так и вследствие дефекта  $E$ .

**Задание 1.** Тогда значение  $100p$  равно ...

**Задание 2.** Вероятность того, что среди продукции, забракованной вследствие дефекта  $D$ , окажется и продукция, забракованная вследствие дефекта  $E$ , равна ...

**Задание 3.** Установите соответствие между объемом  $N$  произведенной продукции и наиболее вероятным количеством изделий, бракованных только вследствие дефекта  $D$ .

1.  $N=100$
2.  $N=200$
3.  $N=500$

#### Кейс-задача

##### Законы распределения по дисциплине «Математика»

Известен следующий прогноз  $X$  (в %) выполнения плана рабочим: За каждый процент перевыполнения плана полагается премия 60 руб., а за каждый процент невыполнения плана – штраф в размере 90 руб.

**Задание 1.** Составьте закон распределения вероятностей случайной величины  $Y$  – размера премии (в руб.) работника;

**Задание 2.** Математическое ожидание премии равно \_\_\_\_ руб.

**Задание 3.** Установите соответствие между максимально возможной суммой штрафа и математическим ожиданием размера премии.

1. 500 руб.
2. 800 руб.
3. 1000 руб.

#### Кейс-задача

##### Законы распределения по дисциплине «Математика»

Суточный надой молока  $X$ (л) от одной коровы задается рядом распределения:

$X$	20	21	22	23	24	25	26
$m_i$	5	5	10	15	5	5	5

**Задание 1.** Вычислить выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную дисперсию и исправленное среднее квадратическое отклонение, учитывая, что  $s=23$ ,  $h=23-22=1$ .

**Задание 2.** Найти интервальную оценку для математического ожидания случайной величины  $X$  с доверительной вероятностью  $\gamma=0,95$ ?

#### Кейс-задача

##### Статистическая проверка гипотез по дисциплине «Математика»

Суточный надой молока  $X$ (л) от одной коровы задается рядом распределения:

$X$	20	21	22	23	24	25	26
$m_i$	5	5	10	15	5	5	5

**Задание 1.** Вычислить выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную дисперсию и исправленное среднее квадратическое отклонение, учитывая, что  $s=23$ ,  $h=23-22=1$ .

**Задание 2.** Используя критерий Пирсона, при уровне значимости  $\alpha = 0,025$  проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с данным эмпирическим распределением выборки.

#### Кейс-задача

##### Статистическая проверка гипотез по дисциплине «Математика»

Известны результаты посещаемости студентами занятий за апрель месяц в группах третьего курса. В таблице приведено количество часов, пропущенное некоторыми студентами:

№	Группа	Количество пропущенных часов
1	К31	25,12,47,5,10,28,23,8,25,15,2
2	М31	36,0,18,15,22,48,18,60,24,4,14,3
3	В31	0,0,33,36,8,24,12,38,0,35,0,4

**Задание 1.** Вероятность того, что выбранный случайным образом студент группы В31 не имеет пропусков занятий за апрель, равна .....

**Задание 2.** В таблице представлены результаты посещаемости занятий студентами трех групп. Установите соответствие между студенческой группой и модой результатов для нее.

1. К31 – \_\_\_\_\_
2. М31 – \_\_\_\_\_
3. В31 – \_\_\_\_\_
4. Р31 – \_\_\_\_\_

**Задание 3.** Размах вариации по количеству пропусков учебных занятий в группе М31 равен ...

Запишите ответ \_\_\_\_\_

**Критерии оценки (в баллах):**

- 5 баллов выставляется обучающемуся, если кейс решен правильно, дано развернутое пояснение и обоснование сделанного заключения, демонстрируются методологические и теоретические знания, владение научной терминологией. При разборе предложенной ситуации обучающийся проявляет творческие способности, знание дополнительной литературы. Демонстрирует хорошие аналитические способности, способен при обосновании своего мнения свободно проводить аналогии между темами курса;
- 4 балла выставляется обучающемуся, если кейс решен правильно, дано пояснение и обоснование сделанного заключения. Обучающийся демонстрирует методологические и теоретические знания, свободно владеет научной терминологией. Демонстрирует хорошие аналитические способности, однако допускает некоторые неточности при оперировании научной терминологией;
- 3 балла выставляется обучающемуся, если кейс решен правильно, пояснение и обоснование сделанного заключения было дано при активной помощи преподавателя. Имеет ограниченные теоретические знания, допускает существенные ошибки при установлении логических взаимосвязей, допускает ошибки при использовании научной терминологии;
- 2 балла выставляется обучающемуся, если кейс решен неправильно, обсуждение и помощь преподавателя не привели к правильному заключению. Обнаруживает неспособность к построению самостоятельных заключений. Имеет слабые теоретические знания, не использует научную терминологию.

**Комплект разноуровневых задач (заданий)  
по дисциплине «Математика»**

**Раздел 1** Линейная алгебра и аналитическая геометрия.

**Тема 1 «Матрицы, определители 2-го и 3-го порядков»**

**1 Задачи репродуктивного уровня**

**Задание 1.** Найти сумму, разность, произведения двух матриц А и В.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Задание 2.** С помощью правила треугольников вычислить определители

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ -8 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Задание 3.** Найти матрицу обратную к матрице А.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Найти  $A^3$  если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Задание 2.** Вычислить определители разложением по строке или столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 8 & 7 \end{vmatrix}.$$

**Задание 3.** Найти матрицу X, если  $3A+2X=B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

## 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Найти обратную матрицу и проверить выполнение условия

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E;$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Задание 2.** При каком  $\alpha$  определитель  $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha - 1 \end{vmatrix}$  равен нулю?

**Задание 3.** Найти  $\lambda$ , при котором матрица  $\begin{pmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$  является вырожденной.

## Тема 2 «Способы решения систем линейных уравнений»

### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и од-

но частное решения. 
$$\begin{cases} 3x + y + z = 0, \\ 14x + 7y + 2z = 0, \\ 5x + 4y - z = 0. \end{cases}$$

**Задание 2.** Решить систему с помощью обратной матрицы и по формулам

Крамера. 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 3y + z = 1 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** По формулам Крамера, методом Гаусса и методом обратной мат-

рицы решить однородную систему. 
$$\begin{cases} 3x + y + z = 0, \\ 14x + 7y + 2z = 0, \\ 5x + 4y - z = 0. \end{cases}$$

### 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Методом Гаусса решить систему:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

**Задание 2.** Найти общее решение системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} -3x_1 - 12x_2 - 15x_3 = -22, \\ -6x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -6, \\ 6x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -6. \end{cases}$$

## Тема 3 «Ранг матрицы»

### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Задание 2.** Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

## 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Исследовать систему уравнений (по теореме Кронекера-Капелли) и в случае совместности решить ее.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

**Задание 2.** Исследовать систему уравнений (по теореме Кронекера-Капелли) и в случае совместности решить ее.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases}$$

## 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Найти значения  $L$ , при которых матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Имеет наименьший ранг.

**Задание 2.** Следуя теореме Кронекера-Капелли, установить, совместна ли система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 4 \end{cases}$$

## Тема 4 «Векторы»

### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Найти модуль вектора  $\vec{a}(1; -5; 6)$ .

**Задание 2.** Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуют угол  $\alpha = 60^\circ$ . Их длины:  $|\vec{a}| = 5$  и  $|\vec{b}| = 8$ .  
Выполнить сложение векторов и найти их сумму  $|\vec{a} + \vec{b}|$ . Выполнить вычитание векторов и найти их разность  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

**Задание 3.** Даны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Построить на чертеже векторы

- 1)  $\vec{a} + \vec{b}$ ,
- 2)  $\vec{a} - \vec{b}$ ,
- 3)  $\vec{b} - \vec{a}$ ,
- 4)  $-\vec{a} - \vec{b}$ .

## 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Даны точки  $A(2; -3; 1)$ ,  $B(6; 1; -1)$ ,  $C(4; 8; -9)$ ,  $D(2; -1; 2)$ .

Найти скалярное произведение векторов  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  и  $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ .

**Задание 2.** Даны векторы  $\vec{a}(5; -1; -4)$ ,  $\vec{b}(9; 3; -6)$ . Найти их векторное произведение.

**Задание 3** Найти:

- 1) координаты векторного произведения векторов  $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$ ;
- 2) длину векторного произведения векторов  $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$ ,

если

$$\vec{a} = (2; 3; 4), \quad \vec{b} = (1; 1; 3).$$

## 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Даны векторы:  $\vec{a}(1; -1; 2)$ ,  $\vec{b}(1; 1; 4)$ ,  $\vec{c}(6; -1; 3)$ .

Найти:

- 1) смешанное произведение векторов;
- 2) объём параллелепипеда, построенного на данных трёх векторах;
- 3) объём треугольной пирамиды, построенной на данных трёх векторах.

**Задание 2.** Составить линейную комбинацию векторов

$$\vec{a}_1 = (2; -1; 0) \text{ и } \vec{a}_2 = (-3; 2; 1) \text{ с коэффициентами } \lambda_1 = 2 \text{ и } \lambda_2 = 3.$$

**Задание 3.** Выяснить, являются ли векторы  $\vec{a}_1 = (2; 0)$  и  $\vec{a}_2 = (0; 3)$  линейно зависимыми.

## Тема 5 «Прямая линия на плоскости»

### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Написать уравнение прямой, проходящей через заданные точки  $A(0; 3)$ ,  $B(12; -6)$ .

**Задание 2.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $2x-y-1=0$  и  $3x-y+4=0$  параллельно прямой  $4x+2y-13=0$ . Сделать чертеж.

**Задание 3.** Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом, если

угол наклона прямой  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  и прямая проходит через точку  $M(0; 6)$ .

## 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Установить, принадлежит ли прямой, заданной уравнением с угловым коэффициентом  $y = 2x + 3$  точки  $M_1(4; 11)$  и  $M_2(1; 7)$ .

**Задание 2.** Составить уравнение прямой, проходящей через

точку  $A(3; -5)$  параллельно прямой, проведенной через две данные точки  $B(0; -2)$  и  $C(-1; 3)$ .

**Задание 3.** Через точку пересечения прямых  $2x-y=0$  и  $x+3y-1=0$  проведена прямая, перпендикулярная прямой  $y=3-x$ . Найти ее уравнение и сделать чертеж.

## 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** В треугольнике  $ABC$  даны:

1) уравнение стороны  $(AB)$ :  $3x+2y=12$

2) уравнение высоты  $(BM)$   $x+2y=4$ .

3) уравнение высоты  $(AM)$   $4x+y=6$ , где  $M$ -точка пересечения высот.

Написать уравнения сторон  $AC$ ,  $BC$ , и высоты  $CM$ .

**Задание 2.** Найти площадь треугольника  $ABC$ , в котором  $A(2;1;0)$ ,  $B(-2;4;1)$ ,  $C(-3;-8;4)$ .

**Задание 3.** Построить точки  $A(-2;1)$  и  $B(3;6)$  и найти точку  $M(x;y)$ , делящую  $AB$  в отношении  $AM:MB=3:2$ .

### Тема 6 «Уравнения плоскости и прямой в пространстве»

#### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Составить уравнения прямой в пространстве, перпендикулярной плоскости  $2x-3y+4z-8=0$  и проходящей через точку пересечения этой плоскости с осью  $Oz$ .

**Задание 2.** Составить уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки  $M_1(2; 3; -5)$  и  $M_2(-4; 3; 2)$ .

**Задание 3.** Составить канонические уравнения прямой в пространстве, заданной общими уравнениями

$$\begin{cases} 2x-5y+z+4=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$$

## 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Даны точка  $M_1(2; 2; 1)$  и направляющий вектор  $\vec{p} = (1; 1; 1)$ . Составить параметрические уравнения прямой.

**Задание 2.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $(3, -5, 1)$ , и параллельной плоскости  $x - 2y + 4z = 0$ .

**Задание 3.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(2; -3; 1)$  и перпендикулярной вектору  $\vec{n} = (5; 1; -4)$ .

## 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Установить, перпендикулярны ли плоскости, заданные уравнениями  $2x - 3y + z - 2 = 0$  и  $4x + 3y + z + 5 = 0$ .

**Задание 2.** Установить, параллельны ли две плоскости, одна из которых задана уравнением  $3x - 2y - 3z + 5 = 0$ , а другая - уравнением  $9x - 6y - 9z - 5 = 0$ .

**Задание 3.** Установить, пересекаются ли три плоскости в одной точке, если пересекаются, найти точку пересечения. Плоскости заданы уравнениями:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z - 1 = 0 \\ -x + 5y - z - 3 = 0 \\ 3x - 10y + 7z = 0 \end{cases}$$

**Задание 4.** Дана пирамида с вершинами  $A_1(1; 3; 6)$ ,  $A_2(2; 2; 1)$ ,  $A_3(-1; 0; 1)$ ,  $A_4(-4; 6; -3)$ . Найти: а) косинус угла между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_4$ , б) объем пирамиды.

## Тема 7 «Кривые второго порядка»

### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Проверить, является ли линия, заданная общим уравнением  $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ , эллипсом.

**Задание 2.** Составить каноническое уравнение эллипса, если его полуоси соответственно равны 5 и 4.

**Задание 3.** Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 8 и большая ось равна 10.

### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Составить каноническое уравнение гиперболы, если его действительная полуось  $a = 5$  и мнимая  $b = 3$ .

**Задание 2.** Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 10 и действительная ось равна 8.

**Задание 3.** Дана гипербола  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ . Составить уравнение её директрис.

### 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Составить уравнение директрисы параболы  $y^2 = 6x$

**Задание 2.** Составить уравнение параболы, если расстояние от фокуса до директрисы равно 2.

**Задание 3.** Даны уравнения асимптот гиперболы  $y = \pm \frac{5}{12}x$  и координаты точки  $M(24, 5)$ , лежащей на гиперболе. Составить уравнение гиперболы.

## РАЗДЕЛ 2 Математический анализ

### Тема 9 «Предел числовой последовательности и предел функции»

#### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Для данной функции  $y=f(x)$  найти точки разрыва функции, если они существуют, вычислить односторонние пределы в этих точках, определить тип разрыва и построить график.

$$y = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ x+1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

**Задание 2.** Найти предел функции  $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$  при  $x \rightarrow 0$

**Задание 3.** Найти предел:  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 3}$ .

#### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Найти предел функции.

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3x^2 + 5x - 12}. \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}.$$

**Задание 2.** Найти пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 16} \sqrt[4]{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+3)^{\frac{3}{2}},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2^{x-3},$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} (\lg x^2),$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x.$$

**Задание 3.** Раскрыть неопределённость  $\frac{\infty}{\infty}$  и найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x+3x^2}}{x+2}$ .

### 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Раскрыть неопределённость  $\frac{0}{0}$  и найти предел  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3x}$ .

**Задание 2.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$ .

**Задание 3.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}$ .

**Задание 4.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x-2}\right)^{3x+2}$ .

### Тема 10 «Определение производной»

#### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Пользуясь определением производной, найти производную функции  $y = \sqrt{x+1}$ .

**Задание 2.** Найти производную функции  $y = \sqrt{x}$  и значение этой производной при  $x = 9$ .

**Задание 3.** Найти производную функции  $x + \sin x$ .

#### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Найти производную функции  $(x-5)(2x-5)$ .

**Задание 2.** Найти производную функции  $\frac{x-5}{2x-5}$ .

**Задание 3.** Найти производную функции  $(2x-1)\sqrt{x}$ .

### 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Найдите скорость и ускорение точки в момент  $t_0$ , если:

а)  $x(t) = t^3 - 2t^2 + 5$ ,  $t_0 = 4$

б)  $x(t) = 5t - t^2$ ,  $t_0 = 2$

### Тема 11 «Таблица производных»

#### Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Задан закон  $s(t) = 2x^4 - 3x^2 + x - 2$ , изменения пути движения материальной точки. Требуется найти значения скорости и ускорения этой точки в момент времени  $t_0 = 2$ .

**Задание 2.** Найти производную функции.

а)  $y = x^3 - 9x^2 + x - 1$

б)  $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

в)  $y = x^2 \cdot \sin x$

е)  $y = \sin^2 3x$

д)  $y = \log_3 4x$

е)  $y = \frac{3}{5x^2}$ .

## 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Найти производные функций.

$$1) y = \frac{e^2 \ln x}{x} \quad 2) y = \frac{x^3 + 4}{x^2} \quad 3) y = 3x^4 - 4x^3 + 14) y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

**Задание 2.** Найдите скорость и ускорение точки в момент  $t_0$ , если:

а)  $x(t) = t^3 - 2t^2 + 5$ ,  $t_0 = 4$

б)  $x(t) = 5t - t^2$ ,  $t_0 = 2$

**Задание 3.** Решить уравнение  $f'(x) = 0$ , если  $f(x) = x - \cos x$

## 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Написать уравнение касательной к графику функции  $f(x) = x - 3x^2$  в точке с абсциссой  $x_0 = 2$ .

**Задание 2.** Найти угол между осью  $Ox$  и касательной к графику функции  $f(x) = 2\sqrt{x}$  в точке с абсциссой  $x_0 = 3$  и написать уравнение касательной в этой точке.

**Задание 3.** Дан радиус-вектор движущейся в пространстве точки  $\vec{R}(t) = (t^2 + 1) \cdot \vec{i} - t^3 \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k}$ . Найти вектор скорости точки в момент времени  $t=2$ .

**Задание 4.** Исследовать функцию и построить график:  $y = x^3 - 3x^2 + 4$

## Тема 12 «Дифференциал функции»

### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Найти дифференциалы функций:

1)  $y = x^4$ ;

2)  $y = (2x - 1)^4$ ;

3)  $y = \ln x$ ;

4)  $y = \ln(x^2 + 1)$ .

**Задание 2.** Найти дифференциал функции  $f(x) = x^2 - x + 3$  в точке  $x = 2$ ,

1) выделив линейную часть;

2) по формуле.

**Задание 3.** Найти дифференциал функции  $y = e^x$  в точках  $x = 0$  и  $x = 1$ .

### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Пользуясь понятием дифференциала, вычислить приближенно  $\ln 1,01$ .

**Задание 2.** Пользуясь понятием дифференциала, вычислить приближенно  $1/\sqrt{1,005}$ .

**Задание 3.** Пользуясь понятием дифференциала, вычислить приближенно  $\sqrt[3]{2}$ . Оценить точность полученного результата.

### 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Дана функция  $y = \ln(x^2 - 3)$ , вычислить дифференциал функции двумя способами: выражая его через  $dx$  и через  $du$  - дифференциал промежуточной переменной  $u$ . Проверить совпадение полученных результатов.

**Задание 2.** Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

$$1) \int \frac{dx}{\sin^2 3x} \qquad 2) \int \frac{x dx}{\sqrt{2+x^2}}$$

**Задание 3.** Проинтегрировать по частям.

$$1) \int (7x-1) \cos x dx \qquad 2) \int \operatorname{arctg} x dx$$

### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Найти интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе.

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}} \qquad 2) \int \frac{x-2}{x^2 - 7x + 12} dx.$$

**Задание 2.** Найти интегралы от рациональных дробей.

$$1) \int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx. \qquad 2) \int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx.$$

**Задание 3.** Найти интегралы тригонометрических функций.

$$1) \int \frac{dx}{\cos^4 x} \qquad 2) \int \sin 3x \cos 7x dx.$$

### 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Дан интеграл от рациональной функции  $I = \int \frac{x^2 + x + 2}{x(x^2 - 1)} dx$ .

От нас требуется разложить подынтегральное выражение - правильную

дробь  $\frac{x^2 + x + 2}{x(x^2 - 1)}$  на простые дроби.

**Задание 2.** Найти интеграл от тригонометрической функции  $\int \sin 3x \sin 2x dx$

**Задание 3.** Найти интеграл от тригонометрической функции  $I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$

## Тема 14 «Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница»

### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx;$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 - \cos x}.$$

**Задание 2.** Найти определённый интеграл  $\int_0^1 (7x-4)e^{3x} dx$ .

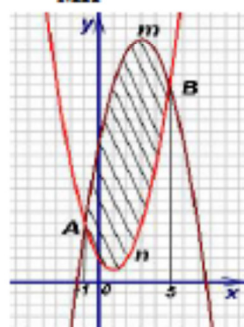
**Задание 3.** Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями и расположенного в первом октанте.

$$x^2 + y^2 + z = 10; \quad x^2 + y^2 = 1; \quad y = x; \quad y = 0; \quad z = 0.$$

### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Найти площадь фигуры, заключённой между параболами

$$m \text{ и } y = 12 + 6x - x^2 \text{ и } y = x^2 - 2x + 2.$$

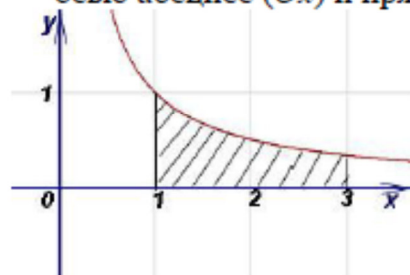


**Задание 2.** Сжатие  $S$  винтовой пружины пропорционально приложенной силе  $F$ . Вычислить работу силы  $F$  при сжатии пружины на 5 см, если для сжатия её на 1 см нужна сила в 1 кг.

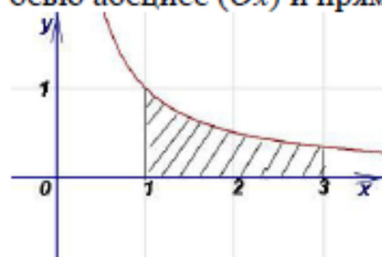
**Задание 3.** Вычислить работу, которую нужно совершить, чтобы вытащить шарик массой 9 г из бочки, высота которой 3 м.

### 3 Задачи творческого уровня

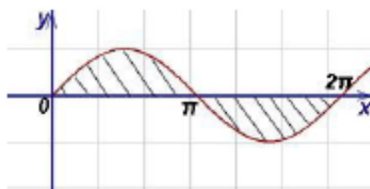
**Задание 1.** Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = \frac{1}{x}$ , осью абсцисс ( $Ox$ ) и прямыми  $x = 1$ ,  $x = 3$ .



**Задание 2.** Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = \frac{1}{x}$ , осью абсцисс ( $Ox$ ) и прямыми  $x = 1$ ,  $x = 3$ .



**Задание 3.** Найти площадь, заключённую между осью абсцисс ( $Ox$ ) и двумя соседними волнами синусоиды.



### Тема 15 «Частные производные, безусловный и условный экстремумы»

#### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Найти частные производные функции  $z = 5x^2y^2 - x$ .

**Задание 2.** Дана функция  $z = x^3 + \ln x$ . Найти частные производные

$\frac{\partial z}{\partial x}$  (по  $x$ ) и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  (по  $y$ ) и вычислить их значения в точке  $A(1; 2)$ .

**Задание 3.** Найти частные производные функции  $Z = 8 \cdot e^x + y$ .

**Задание 4.** Найти градиент функции  $Z = \ln(x^2 + y^2)$  в точке  $M(0; 3)$ .

## 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Найти частные производные  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  функции  $z = 3x + x^2 y^5$  и убедиться в равенстве этих частных производных.

**Задание 2.** Для функции  $z = e^{xy^2}$  вычислить частную производную  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ .

## 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Установить независимость от пути интегрирования и вычислить криволинейный интеграл по контуру,  $\int (x^3 - 2y)dx - (2x - 5)dy$ ; связывающую точки  $M(1;2)$  и  $N(3;5)$ .

**Задание 4.** Вычислить интеграл  $\iint (x^2 + y^2) dx dy$ , область интегрирования  $D$  ограничена параболой  $y = x^2$  и прямыми  $y = 0$  и  $x = 1$ .

## РАЗДЕЛ 3 Дифференциальные уравнения

### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Найти решение дифференциального уравнения  $y' - 3x^2 = 0$ .

**Задание 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения  $y''' = 2$  и частное решение при  $C_1 = 2, C_2 = 7, C_3 = 4$ .

**Задание 3.** Найти общее решение дифференциального уравнения  $y' = 3y^2$ .

### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка  $xy' + x^2 + xy - y = 0$ .

**Задание 2.** Решить однородное дифференциальное уравнение  $y' = -y/x$ .

**Задание 3.** Решить линейное дифференциальное уравнение первого поряд-

ка  $y' - \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$ .

### 3 Задачи творческого уровня

1. **Задание 1.** Решить дифференциальные уравнения:

1)  $x^2 y^2 y' + 1 = y$ ;

2)  $xyy' = \sqrt{y^2 + 1}$ ;

3)  $y' = \frac{x+8y}{8x+y}$ ;

4)  $xyy' = x^2 + y^2$ ;

**Задание 2.** Решить дифференциальное уравнение Бернулли

$$y' + xy = \frac{x}{y^3}$$

**Задание 3.** Решить дифференциальное уравнение Бернулли

$$2y' + y \cos x = \frac{(1 + \sin x) \cos x}{y}$$

## Тема 17 «Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами»

### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Найти общее решение однородных уравнений:

$$1) y'' + 5y' + 4y = 0. \quad 2) y'' - 2y' + y = 0.$$

**Задача 2.** Найти частные решения однородных уравнений при указанных начальных условиях:  $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$

**Задание 3.** Решить линейное однородное дифференциальное уравнение  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Найти общее решение неоднородных уравнений:

$$1) y'' + 8y' = 8x. \quad 2) y'' - 5y' + 6y = 2xe^x.$$

**Задание 2.** Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

$$1) y'' - 2y' = 24x, \quad y(0) = 3, y'(0) = 0.$$

$$2) y'' + y = 2\cos x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

### 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Показать, что функция  $y^2 - x^2 - Cy = 0$  является общим интегралом дифференциального уравнения  $y'(x^2 + y^2) - 2xy = 0.$

**Задание 2.** Скорость остывания нагретого тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. За 10 минут тело охладилось от 100 до 60 градусов. Температура среды постоянна и равна 20 градусам. Когда тело остынет до 25 градусов?

**Задание 3.** Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 5 м/сек. На полном ходу ее мотор выключается и через 40 сек после этого скорость лодки уменьшается до 2 м/сек. Определить скорость лодки через 2 минуты после остановки мотора, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

## Тема 18 «Дифференциальные уравнения высших порядков»

### Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = x.$$

**Задание 2.** Решить дифференциальное уравнение третьего порядка

$$xy'' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3\frac{y'}{x} = x.$$

**Задание 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}.$$

### 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Найти решение дифференциального уравнения, понижая порядок:

$$1) y''' = \sin 3x + x, \quad 2) \frac{d^5 y}{dx^5} - \frac{1}{x} \frac{d^4 y}{dx^4} = 0.$$

**Задание 2.** Найти частное решение дифференциального уравнения

$$xy'' = (y')^2 - (y')^3,$$

**Задание 3.** Решить дифференциальное уравнение

$$(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0.$$

## РАЗДЕЛ 4 Ряды

### Тема 19 «Числовые ряды. Сходимость рядов»

#### Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Исследовать на сходимость с помощью признака Даламбера знакочередующийся ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)5^n};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+2)2^n};$$

**Задание 2.** Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \dots + \frac{1}{n 2^n} + \dots$$

**Задание 3.** Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

#### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Исследовать на абсолютную или условную сходимость знакочередующийся ряд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+5};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2};$$

**Задание 2.** Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)7^n} x^n.$$

Определить характер сходимости ряда на концах интервала сходимости.

### 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем разложения подынтегральной функции в ряд и почленного интегрирования этого ряда.

$$1) \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^3} dx.$$

$$2) \int_0^{0,5} x \cdot e^{-x} dx.$$

**Задание 2.** Найти область сходимости функционального ряда

$$\sin x + \sin^2 x + \dots + \sin^n x + \dots$$

**Задание 3.** Определить, непрерывна ли сумма функционального ряда

$$\left( \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} - x \right) + \left( \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}} - x^{\frac{1}{3}} \right) + \left( \frac{1}{x^{\frac{1}{7}}} - x^{\frac{1}{5}} \right) + \dots + \left( \frac{1}{x^{\frac{1}{2n+1}}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right) + \dots$$

Тема 20 «Функциональные ряды. Степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена»

**Задание 1.** Разложить функцию в степенной ряд

$$1) y = \sin x;$$

$$2) y = \sqrt[4]{1+x^5}.$$

**Задание 2.** Вычислить с точностью до 0,001

$$1) \sqrt[4]{630}.$$

$$2) \ln 1,30.$$

**Задание 3.** Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, путем разложения подынтегральной функции в ряд и почленного интегрирования

этого ряда  $\int_0^{\frac{1}{4}} x^2 e^{-\sqrt{x}} dx.$

РАЗДЕЛ 5 Теория вероятностей и математической статистики

Тема 21 «Предмет теории вероятностей. Основные понятия комбинаторики»

### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны вынимают сразу 2 шара. Найти вероятность того, что шары разного цвета.

**Задание 2.** В электрическую цепь включены последовательно два предохранителя. Вероятность выхода из строя первого предохранителя равна 0,6, а второго 0,2. Определить вероятность прекращения питания в результате выхода из строя хотя бы одного предохранителя.

**Задание 3.** На трех автоматических станках изготавливаются одинаковые детали. Известно, что 30% продукции производится первым станком, 25% - вторым и 45% - третьим. Вероятность изготовления детали, отвечающей стандарту, на первом станке равна 0,99, на втором – 0,988 и на третьем – 0,98. Изготовленные в течение дня на трех станках детали находятся на складе. Определить вероятность того, что наудачу взятая деталь не соответствует стандарту.

## **2 Задачи реконструктивного уровня**

**Задание 1.** Найти вероятность того, что событие  $A$  наступит ровно 1850 раз в 2500 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,75.

**Задание 2.** В сборочный цех завода детали поступают из двух цехов: из первого – 70%, из второго – 30%, причем детали из первого цеха имеют 30%, а из второго – 20% брака. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной.

**Задание 3.** В некотором водоеме карпы составляют 80% всех рыб. Какова вероятность того, что из пяти выловленных в этом водоеме рыб окажется:  
а) два карпа;  
б) не менее четырех карпов;  
в) хотя бы один карп.

**Задание 4.** Вероятность выхода из строя станка в течение одного рабочего дня равна 0,01. Какова вероятность того, что за три рабочих дня станок ни разу не выйдет из строя?

## **3 Задачи творческого уровня**

**Задание 1.** В урне 9 белых, 7 черных и 6 красных шаров. Три из них вынимаются наугад. Найти вероятность того, что по крайней мере два из них будут одноцветными.

**Задание 2.** Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча. После игры их кладут обратно. При выборе мячей иггранные от неиггранных не отличают. Найти вероятность того, что после трёх игр в коробке не останется неиггранных мячей.

**Задание 3.** Цель в тире разделена на 3 зоны. Вероятность того что некий стрелок выстрелит в цель в первой зоне равна 0,15, во второй зоне – 0,23, в третьей зоне – 0,17. Найти вероятность того, что стрелок попадет в цель и вероятность того, что стрелок попадет мимо цели.

**Задание 4.** Монету бросают три раза подряд. Найти вероятность того, что все три раза выпадет герб.

## **Тема 22 «Повторные независимые испытания. Формула Бернулли**

**Задание 1.** . Счетчик регистрирует частицы трех типов: А, В и С. Вероятности появления этих частиц соответственно равны 0,2; 0,5; 0,3. Частицы каж-

дого из этих типов счетчик улавливает с вероятностью 0,8; 0,2; 0,4. Счетчик отметил частицу. Определить вероятность того, что эта была частица В.

**Задание 2.** Пусть вероятность того, что покупателю необходима мужская обувь 41-го размера, равна 0,25. Найти вероятность того, что из шести покупателей по крайней мере двум необходима обувь 41-го размера.

## 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Производитель отправил в некоторый город 1000 проверенных, то есть исправных телевизоров. Вероятность того, что при транспортировке телевизор выйдет из строя, равна 0,003. То есть в этом случае действует закон распределения Пуассона. Найти вероятность того, что из всех доставленных телевизоров неисправными будут: 1) два телевизора; 2) менее двух телевизоров.

**Задание 2.** Поток грузовых железнодорожных составов, прибывающих на сортировочную горку, имеет интенсивность 4 состава в час. Найти вероятности того, что за полчаса на горку прибудет: а) ровно один состав; б) хотя бы один состав; в) не менее трёх составов.

## 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Птицефабрика поставляет  $k$  яиц первой категории. Найти вероятность того, что в партии из  $n$  яиц число яиц первой категории заключено между  $m_1$  и  $m_2$ .

$$k = 75, \quad n = 1500, \quad m_1 = 1050, \quad m_2 = 1150.$$

**Задание 2.** Вероятность появления бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из 500 случайно отобранных деталей окажется:

- а) три бракованных;
- б) не более 2-х бракованных.

**Задание 3.** Вероятность выхода из строя одного конденсатора за время  $t$  равна 0,2. Определить вероятность того, что за время  $t$  из 100 конденсаторов выйдет из строя: а) ровно 21 конденсатор; б) от 15 до 26 конденсаторов.

## Тема 23 «Случайные величины и их классификация»

### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Производится четыре независимых испытания, в каждом из которых событие  $A$  может появиться с вероятностью 0,1. Рассматривается случайная величина  $X$  - число появлений события  $A$  в четырех испытаниях. Составить ряд распределения дискретной случайной величины  $X$ , построить многоугольник распределения, найти функцию распределения  $F(x)$  и построить ее график.

**Задание 2.** В урне 5 шаров, из которых 2 белых и 3 черных. Наудачу извлечены 3 шара. Составить ряд распределения случайной величины  $X$  - числа белых шаров среди трех извлеченных, построить многоугольник распределения, найти функцию распределения  $F(x)$  и построить ее график.

**Задание 3.** Пять однотипных приборов испытываются при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого прибора пройти испытания равны 0,8. Испытания заканчиваются после выхода из строя первого же прибора. Составить ряд распределения числа произведенных испытаний, построить многоугольник распределения, найти функцию распределения  $F(x)$  и построить ее график.

## 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины  $X$  – числа появлений герба при трех бросаниях монеты. Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения  $F(x)$  и построить ее график.

**Задание 2.** Всхожесть семян клевера 70%. В некотором опыте посажено 4 семени. Составить ряд распределения дискретной случайной величины  $X$  – числа взошедших семян, построить многоугольник распределения, найти функцию распределения  $F(x)$  и построить ее график.

**Задание 3.** Дана плотность распределения непрерывной случайной величины  $X$ :

$$f(x) = \begin{cases} b \cos \frac{x}{12}, & \text{если } x \in [0, 2\pi] \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Найти значение параметра  $b$ , функцию распределения  $F(x)$ , построить графики функций  $f(x)$  и  $F(x)$ , найти  $P(2\pi < X < 3\pi)$ .

## 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Дана плотность распределения непрерывной случайной величины  $X$ :

$$f(x) = \begin{cases} b \cos \frac{x}{8}, & \text{если } x \in [0, 2\pi] \\ 0, & \text{если } x \notin [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Найти значение параметра  $b$ , функцию распределения  $F(x)$ , построить графики функций  $f(x)$  и  $F(x)$ , найти  $P(2\pi < X < 4\pi)$ .

**Задание 2.** Дан ряд распределения дискретной случайной величины  $X$ :

<b>X</b>	3	5	8	9
<b>P</b>	0,2	0,4	0,3	$p_4$

Найти значение вероятности  $p_4$ , построить многоугольник распределения, найти функцию распределения  $F(x)$  и построить ее график.

**Задание 3.** Дана плотность распределения непрерывной случайной величины  $X$ :

$$f(x) = \begin{cases} b \cos 2x, & \text{если } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ 0, & \text{если } x \notin \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Найти значение параметра  $b$ , функцию распределения  $F(x)$ , построить графики функций  $f(x)$  и  $F(x)$ , найти  $P(0 < X < \pi/8)$ .

**Тема 24 «Числовые характеристики случайных величин»**

**1 Задачи репродуктивного уровня**

**Задание 1.** Определить математическое ожидание  $M(X)$ , дисперсию  $D(X)$ , вероятность попадания в интервал  $(4, 7]$  ( $P(4 < X \leq 7)$ ), если закон распределения дискретной случайной величины  $X$  задан таблицей

<b>X</b>	1	4	5	6	8
<b>P</b>	0,2	0,1	0,1	0,3	0,3

**Задание 2.** Задан закон распределения дискретной случайной величины  $X$ . Найти  $M(X)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma(X)$ .

<b>X</b>	23	25	28	29
<b>P</b>	0,3	0,2	0,4	0,1

**Задание 3.** Задан закон распределения Д.С.В.Х. Найти  $M(x)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma(x)$ , интегральную функцию распределения  $F(x)$  и построить ее график.

<b>X</b>	23	25	28	29
<b>P</b>	0,3	0,2	0,4	0,1

**2 Задачи реконструктивного уровня**

**Задание 1.** Дан ряд распределения дискретной случайной величины  $X$ :

	2	4	6	8
<b>P</b>	0,2	0,4	0,3	$p_4$

Найти значение вероятности  $p_4$ , найти  $M(x)$ ,  $D(x)$ ,  $\sigma(x)$  и моду  $M_x$ .

**Задание 2.** Дан ряд распределения дискретной случайной величины  $X$ :

	1	3	6	8
<b>P</b>	0,2	0,2	0,5	$p_4$

Найти значение вероятности  $p_4$ , найти  $M(x)$ ,  $D(x)$ ,  $\sigma(x)$  и моду  $M_x$ .

**Задание 3.** Дана плотность распределения непрерывной случайной величины  $X$ :

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{если } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ 0, & \text{если } x \notin \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание  $M(x)$ , моду  $M_x$  и медиану  $x_m$ .

### 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Дана плотность распределения непрерывной случайной величины  $X$ :

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{2x}{3}, & \text{если } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{если } x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание  $M(x)$ , моду  $M_x$  и медиану  $x_m$ .

**Задание 2.** Дана плотность распределения непрерывной случайной величины  $X$ :

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{если } x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание  $M(x)$ , моду  $M_x$  и медиану  $x_m$ .

**Задание 3.** Чему равна мода вариационного ряда 1,4,5,5,6,8,9.

Тема 25 «Основные распределения дискретной и непрерывной случайной величины»

### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4х выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. Найти закон распределения случайной величины  $X$  – числа попаданий.

**Задание 2.** Вероятности рождения мальчика и девочки считаются одинаковыми. Найти закон распределения случайной величины  $X$  – число мальчиков в семье, имеющей пять детей.

**Задание 3.** Монета бросается до появления герба, но не более 4х раз. Найти закон распределения случайной величины  $X$  – число бросаний монеты.

### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Найти вероятность попадания случайной величины в замкнутый интервал  $[\alpha; \beta]$ , если она распределена

- Равномерно на отрезке  $[a; b]$
  - По показательному закону и имеет  $M(X) = b$
  - По нормальному закону, при этом  $M(X) = a$ ,  $\sigma(X) = a$ .
- $\alpha = 1; \beta = 10; a = 8; b = 15$
  - $\alpha = 2; \beta = 8; a = 3; b = 12$

**Задание 2.** Из курьерской службы отправились на объекты  $n = 5$  курьеров. Каждый курьер с вероятностью  $p = 0,3$  независимо от других опаздывает на объект. Дискретная случайная величина  $X$  - число опоздавших курьеров. Построить ряд распределения этой случайной величины. Найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность того, что на объекты опоздадут не менее двух курьеров.

### 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Предприятие производит детали, срок службы которых нормально распределён со средним значением 1000 и стандартным отклонением 200 часов. Для случайно отобранной детали вычислить вероятность того, что её срок службы будет не менее 900 часов.

**Задание 2.** Длина изготавливаемой детали представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с параметрами  $\mu = 10$  и  $\sigma = 0,071$ . Найти с точностью до двух знаков после запятой вероятность брака, если допустимые размеры детали должны быть  $10 \pm 0,05$ .

## Тема 26 «Математическая статистика»

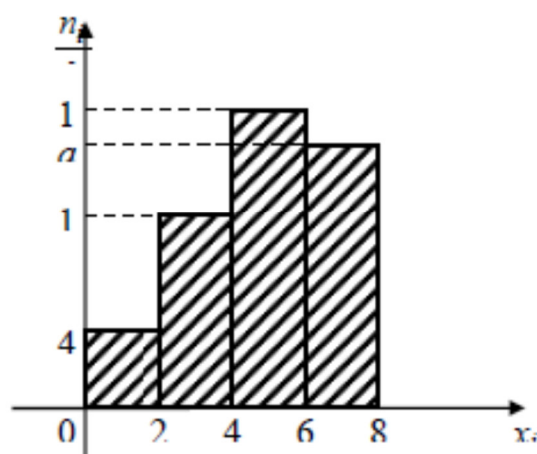
### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Выборка задана в виде распределения частот

$x_i$	4	7	8	10
$n_i$	5	2	3	10

- Найти: 1) распределение относительных частот;  
 2) эмпирическую функцию распределения;  
 3) построить полигон частот по данному распределению.

**Задание 2.** По выборке объема  $n = 100$  построена гистограмма частот:



Найти  $a$ .

**Задание 3.** Из генеральной совокупности извлечена выборка объема  $n = 50$ :

$x_i$	1	2	3	4
$n_i$	10	9	8	$n_4$

Найти  $n_4$ .

### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** В таблице даны значения средней температуры воздуха в населённом пункте  $N$  в 2014 году. Найти среднюю температуру воздуха.

Месяц	$^{\circ}C$
1	-2,3
2	-4,0
3	2,0
4	9,0
5	10,0
6	19,4
7	19,9
8	17,1
9	14,9
10	7,3
11	2,2
12	-0,3

### 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Найти стандартную погрешность средней урожайности сельских хозяйств и интервал оценки, используя результаты примеров 2 и 4.

Суточный надой молока  $X$  (в литрах) от одной коровы составляет 23, 23, 22, 24, 20, 23, 26, 25, 23, 22, 22, 23, 21, 20, 22, 23, 23, 24, 26, 25, 21, 20, 23, 22, 23, 20, 21, 23, 22, 23, 25, 21, 22, 24, 23, 23, 20, 26, 25, 23, 23, 22, 21, 25, 22, 24, 26, 24, 22, 26.

- 1) Составить дискретный ряд распределения в виде таблицы;
- 2) Построить полигон относительных частот – ломаную линию, соединяющую точки с координатами  $(x_i; \omega_i)$ .

3) Построить график эмпирической функции распределения, выбрав соответствующим образом масштаб.

**Задание 2.** Заданы результаты обследования:

35,9; 35,3; 42,7; 45,2; 25,9; 35,3; 33,4; 27,0; 35,9; 38,8;  
33,7; 38,6; 40,9; 35,5; 44,1; 37,4; 34,2; 30,8; 38,4; 31,3.

Требуется:

- 1) получить вариационный ряд и построить гистограмму относительных частот;
- 2) вычислить основные выборочные характеристики:  $\bar{x}$ ,  $s^2$ ,  $s$ ,  $V$ ,  $s_{\bar{x}}$ ;
- 3) с надежностью 95% указать доверительный интервал для оценки генеральной средней  $\bar{X}_{\rho}$ .

## Тема 27 «Доверительные интервалы и доверительные вероятности»

### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** В некотором городе два кандидата  $A$  и  $B$  претендуют на пост мэра. Случайным образом были опрошены 200 жителей города, из которых 46% ответили, что будут голосовать за кандидата  $A$ , 26% - за кандидата  $B$  и 28% не знают, за кого будут голосовать. Определить доверительный интервал 95% для удельного веса жителей города, поддерживающих кандидата  $A$ .

**Задание 2.** Найти интервалы, соответствующие вероятностям  $P_1 = 0,7$ ;  $P_2 = 0,8$ ;  $P_3 = 0,9$  отклонения случайных величин от ее среднего значения (данные взять из предыдущей задачи).

**Задание 3.** Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 14. Найти его интервальную оценку.

### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** На контрольных испытаниях 17 электроламп найдено, что средний срок службы лампы равен  $\bar{X} = 800$  часов при  $S = 100$ . Определите нижнюю границу срока службы с доверительной вероятностью 0,95.

**Задание 2.** По данным 7 измерений некоторой величины найдены средняя результатов измерений, равная 30 и выборочная дисперсия, равная 36. Найдите границы, в которых с надежностью 0,99 заключено истинное значение измеряемой величины.

**Задание 3.** Из партии объемом 500 однородных товаров для проверки по схеме случайной бесповторной выборки отобрано 70 товаров, среди которых оказалось 56 бракованных. Найдите вероятность того, что доля бракованных товаров во всей партии отличается от полученной доли в выборке не более чем на 0,02 (по абсолютной величине), а также границы, в которых с надежностью 0,96 заключена доля бракованных товаров во всей партии.

### 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Собрана информация из 100 случайно выбранных кафе в некотором городе о том, что среднее число работников в них составляет 10,5 со стандартным отклонением 4,6. Определить доверительный интервал 95% числа работников кафе.

**Задание 2.** Для случайной выборки из генеральной совокупности из 64 наблюдений вычислены следующие суммарные величины: сумма значений в

наблюдениях  $\sum x = 600$ , сумма квадратов отклонения значений от среднего  $\sum (x - \bar{x})^2 = 3800$ .

Вычислить доверительный интервал 95 % для математического ожидания.

**Задание 3.** Для случайной выборки из генеральной совокупности из 100 наблюдений вычислено среднее значение 15,2 и стандартное отклонение 3,2. Вычислить доверительный интервал 95 % для математического ожидания, затем доверительный интервал 99 %. Если мощность выборки и её вариация остаются неизменными, а увеличивается доверительный коэффициент, то доверительный интервал сузится или расширится?

## Тема 28 «Статистическая проверка гипотез»

### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** В лаборатории фармацевтического предприятия делается контрольный замер на соответствие контрольного состава лекарственных препаратов стандарту. Какие варианты гипотез могут быть предложены?

**Задание 2.** Основная гипотеза имеет вид  $H_0: \sigma=10$ . Определить какой вид может иметь конкурирующая гипотеза.

**Задание 3.** Утверждается, что шарики для подшипников, изготовленные автоматическим станком, имеют средний диаметр 10 мм. Используя односторонний критерий с  $\alpha=0,05$ , проверить эту гипотезу, если в выборке из  $n$  шариков средний диаметр оказался равным 10,3 мм, а дисперсия известна и равна 1 мм.

### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Из 200 задач первого раздела курса математики, предложенных для решения, абитуриенты решили 130, а из 300 задач второго раздела абитуриенты решили 120. Можно ли при  $\alpha=0,01$  утверждать, что первый раздел школьного курса абитуриенты усвоили лучше, чем второй.

**Задание 2.** Отдел технического контроля проверил  $n$  партий однотипных изделий и установил, что число нестандартных изделий в одной партии имеет эмпирическое распределение, приведенное в таблице, в одной строке которой указано количество  $x_i$  нестандартных изделий в одной партии, а в другой строке – количество  $n_i$  партий, содержащих  $x_i$  нестандартных изделий. Требуется при уровне значимости  $\alpha=0,05$  проверить гипотезу о том, что случайная величина  $X$  (число нестандартных изделий в одной партии) распределена по закону Пуассона.

### 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** Измерены 100 обработанных деталей; отклонения от заданного размера приведены в таблице:

$[x_j, x_{j+1})$	$[-3, -2)$	$[-2, -1)$	$[-1, 0)$	$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, -3)$	$[3, 4)$	$[4, 5)$
$n_j$	3	10	15	24	25	13	7	3

Проверить при уровне значимости  $\alpha=0,01$  гипотезу  $H_0$  о том, что отклонения от проектного размера подчиняются нормальному закону распределения.

**Задание 2.** Имеются данные некоторой выборки. Используя критерии хи-квадрат и Колмогорова-Смирнова, при уровне значимости  $\alpha=0,05$  проверить гипотезы о

- нормальном распределении;
- равномерном распределении.

**Задание 3.** Имеются данные некоторой выборки. По ним в пакете программных средств *STATISTICA* вычислены следующие показатели:

Среднее 1-й выборки	Среднее 2-й выборки	t-критерий	Число степеней свободы	p-level
19,60	28,21	-1,38	48	0,17

Область принятия гипотезы при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ :  $(-2,01; 2,01)$   
Сделать вывод об однородности выборок.

## Тема 29 «Элементы теории корреляции»

### 1 Задачи репродуктивного уровня

**Задание 1.** Найдите коэффициенты корреляции между данными случайными величинами, получите уравнения прямых линий среднеквадратической регрессии  $Y$  на  $X$  и  $X$  на  $Y$ . Дайте геометрическую интерпретацию решения.

X	33,5	34,2	36,0	39,3	39,9	40,5	42,3	45,8	49,7	52,8
Y	53,1	53,0	51,5	52,3	49,6	45,0	36,5	37,2	33,4	29,0

**Задание 2.** На основании 18 наблюдений установлено, что на 64% вес  $X$  кондитерских изделий зависит от их объема  $Y$ . Можно ли на уровне значимости 0,05 утверждать, что между  $X$  и  $Y$  существует зависимость?

### 2 Задачи реконструктивного уровня

**Задание 1.** Исследование 27 семей по среднедушевому доходу ( $X$ ) и сбережениям ( $Y$ ) дало результаты:

$X=82$  у.е.,  $S_x=31$  у.е.,  $Y=39$  у.е.,  $S_y=29$  у.е.,  $XY=3709$ (у.е.).

При  $\alpha=0,05$  проверить наличие линейной связи между  $X$  и  $Y$ . Определить размер сбережений семей, имеющих среднедушевой доход  $X=130$ у.е.

### 3 Задачи творческого уровня

**Задание 1.** В таблице приведены данные о пораженности льна фузариозом  $Y$  (в %) в зависимости от интервала  $X$  (в годах) между посевами на одном и том же поле восприимчивых к грибковым патогенам (фузариозу) сортов льна.

X	1	2	2	7	6	5	3	4	6	3
Y	88	76	70	5	12	28	45	45	9	62

Найти линейную зависимость между величинами  $X$  и  $Y$  и построить её график. Найти коэффициент корреляции между  $X$  и  $Y$ .

Критерии оценки (в баллах):

- 5 баллов выставляется обучающемуся, если он выполнил все задания;
- 4 балла выставляется обучающемуся, если он не выполнил одно задание;
- 3 балла выставляется обучающемуся, если он не выполнил два задания;
- 2 балла выставляется обучающемуся если он не выполнил три задания.

### Примерный перечень вопросов (1 семестр)

1. Матрицы и действия над ними. Определители второго и третьего порядков. Решение систем линейных алгебраических уравнений по методу (правила) Крамера.

2. Обратная матрица. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом.
3. Элементарные преобразования и ранг матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера – Капелли.
4. Векторы и действия над ними. Декартовы координаты векторов.
5. Скалярное произведение векторов и его свойства. Векторное произведение и его свойства. Смешанное произведение векторов и его свойства.
6. Расстояние между точками на плоскости. Деление отрезка в данном отношении.
7. Уравнения прямой: с угловым коэффициентом; по двум точкам. Уравнения прямой: параллельно осям координат; проходящей через данную точку в данном направлении.
8. Уравнение прямой в нормальном виде, расстояние от точки до прямой. Уравнение прямой в отрезках. Общее уравнение прямой. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
9. Окружность и ее уравнение. Парабола и ее уравнение. Эллипс, вывод канонического уравнения. Гипербола, ее каноническое уравнение, асимптоты.
10. Функция, способы задания, область определения, отрезок, интервал, полуинтервал, окрестность точки,  $\sigma$  - окрестность точки (понятия и обозначения).
11. Понятие предела функции в точке. Непрерывность функции в точке. Теоремы о пределах и их следствия (без доказательства).
12. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Вывод формул:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{nx} = 1.$$

13. Производная, ее геометрический смысл, уравнение касательной.
14. Правила дифференцирования. Таблица производных.
15. Производная сложной функции. Производная обратной функции.
16. Дифференциал функции и его применения в приближенных вычислениях. Таблица дифференциалов.
17. Теоремы о непрерывных функциях. Теорема Веерштрасса и ее следствия, теорема Ролля. Теоремы Коши и Лагранжа.
18. Правило Лопиталья, раскрытие неопределенностей  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ .
19. Экстремумы. Необходимые и достаточные условия экстремума на основе первой и второй производных. План исследования функции на экстремум.
20. Наименьшие и наибольшие значения функции на отрезке. План исследования.
21. Выпуклость, вогнутость функции, необходимые и достаточные условия.
22. Вертикальные и наклонные асимптоты. Общая схема построения.

### **Примерный перечень вопросов (2семестр)**

1. Первообразная. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица 18 основных интегралов.
2. Простейшие приемы интегрирования. Метод интегрирования по частям.
3. Рациональные и дробно-рациональные функции. Разложение правильной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей 4-х типов.
4. Схема интегрирования дробно-рациональной функции.

5. Интегрирование тригонометрических функций:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \int (\sin x)^m \cdot (\cos x)^n dx, \int \sin(mx) \cdot \cos(nx) dx, \\ \int \cos(mx) \cos(nx) dx, \int \sin(mx) \sin(nx) dx.$$

6. Интегралы типа:

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx.$$

7. Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Свойства определенного интеграла. Геометрический смысл определенно-го интеграла. Площадь эллипса.
9. Как определяется функция нескольких переменных? Дайте определение непрерывности функции нескольких переменных.
10. Что называется частной производной функции нескольких переменных?
11. Как вычисляется производная по направлению и какова ее связь с градиентом функции?
12. Сформулируйте правило исследования функции двух переменных на экстремум.
13. Какие задачи приводят к понятию криволинейного интеграла? Как вычисляется криволинейный интеграл?
14. Как влияет на значение криволинейного интеграла направление обхода контура интегрирования?
15. Каковы условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования?
16. Какова связь независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования и равенства нулю криволинейного интеграла по любому замкнутому контуру?
17. Понятие двойного и тройного интегралов. Вычисление в декартовой системе координат.
18. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.
19. Вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.
20. Что называется частным решением дифференциальных уравнений?
21. Что называется общим решением дифференциального уравнения?
22. Какой вид имеет дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными? Как найти общее решение (общий интеграл) этого уравнения?
23. Какое уравнение называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка? Как найти его общий интеграл?
24. Каковы свойства решений линейных однородных уравнений второго порядка?
25. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения второго порядка?
26. Укажите вид общего решения линейного неоднородного уравнения второго порядка.

#### Примерный перечень вопросов (3семестр)

1. Какой ряд называется сходящимся (расходящимся)?
2. Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда.
3. Сформулируйте признаки сравнения знакоположительных рядов.
4. В чем состоит признак Даламбера?
5. Для каких рядов применяется признак Лейбница? В чем его сущность?
6. Как найти радиус сходимости степенного ряда?
7. Как вычисляются коэффициенты ряда Маклорена для заданной функции?
- 8.
9. Напишите разложения в ряд Маклорена функций:

$$e^x, \sin x, \cos x.$$

10. Напишите разложения в ряд Маклорена функций :

$$\arctg x, \arcsin x, (1+x)^n.$$

11. Как используются степенные ряды в приближенных вычислениях?
12. Сформулируйте классическое определение вероятности события.
13. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.
14. Дайте определение полной группы событий.
15. Какие случайные величины называются дискретными (непрерывными)?
16. Каковы свойства математического ожидания и дисперсии случайной величины.
17. Запишите различные формулы для вычисления дисперсии случайной величины.
18. Как связаны функция распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины?
19. Как найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал?
20. Какая случайная величина называется нормально распределенной?
21. Что такое «правило трех сигм»?
22. Напишите формулы для вычисления выборочных числовых характеристик.
23. Как найти доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины (при известном  $\sigma$ ; при неизвестном  $\sigma$ )?
24. Как найти доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормально распределенной случайной величины?

Экзаменационный билет, как правило, включает два теоретических задания (вопроса) и одно практическое. Число контрольных заданий в письменной работе зависит от специфики дисциплины, определяется кафедрой и перечнем компетенций, выносимых на промежуточную аттестацию.

Критерии оценки:

- **«отлично»** имеет четкое представление о современных методах, методиках применяемых в рамках изучаемой дисциплины; свободно и правильно оперирует предметной и методической терминологией; свободно владеет вопросами экзаменационного билета; подтверждает теоретические знания практическими примерами; дает развернутые ответы на задаваемые дополнительные вопросы; имеет собственные суждения о решении теоретических и практических вопросов, связанных с профессиональной деятельностью.
- **«хорошо»** имеет представление о современных методах, методиках, применяемых в рамках изучаемой дисциплины; знает предметную и методическую терминологию дисциплины; излагает ответы на вопросы экзаменационного билета, ориентируясь на написанное им в экзаменационном листе; подтверждает теоретические знания отдельными практическими примерами; дает ответы на задаваемые дополнительные вопросы.
- **«удовлетворительно»** имеет посредственное представление о современных методах, методиках, применяемых в рамках изучаемой дисциплины; правильно оперирует основными понятиями; отвечает на вопросы экзаменационного билета, главным образом, зачитывая написанное в экзаменационном листе; излагает, главным образом, теоретические знания по вопросам экзаменационного билета; не во всех случаях находит правильные ответы на задаваемые дополнительные вопросы.
- **«неудовлетворительно»** не имеет представления о современных методах, методиках, применяемых в рамках изучаемой дисциплины; не во всех случаях правильно оперирует основными понятиями; отвечает на экзаменационные вопросы, зачитывая их с текста экзаменационного листа; экзаменационные вопросы излагает не в полной мере; не отвечает на дополнительные вопросы.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ УРОВНЯ СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ

Задания для оценки сформированности компетенции «ОПК-1»:

**Тестовое задание 1.** Определить, при каких значениях  $l$  и  $m$  плоскости  $2x+ly+3z-5=0$  и  $mx-6y-6z=0$  параллельны.

- а)  $l=3, m=-4$
- б)  $l=-3, m=-4$
- в)  $l=3, m=4$
- г)  $l=5, m=1$

**Тестовое задание 2.** Вычислить векторное произведение  $\vec{i} \times \vec{j} = ?$

- а) 0
- б) 1
- в)  $i$
- г)  $k$

**Тестовое задание 3.** Общий член последовательности  $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \dots$  имеет вид...

- а)  $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$
- б)  $a_n = \frac{2n+1}{n^2}$
- в)  $a_n = (-1)^n \frac{2n-1}{n^2}$
- г)  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n^2}$

**Тестовое задание 4.** Дана функция  $y = \sqrt{5-4x-x^2} + \lg(x+3)$ .

Тогда ее областью определения является множество ...

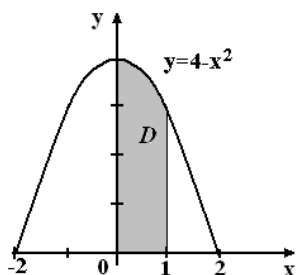
- а)  $(-3; 1]$
- б)  $[-3; 1]$
- в)  $(-3; -5] \cup [1; +\infty)$
- г)  $(-3; 1)$

**Тестовое задание 5.** Студент пришёл на экзамен, зная лишь 12 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 2 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает ответы на оба вопроса.

**Тестовое задание 6.** Определитель  $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$  равен

**Тестовое задание 7.**  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x-5}{x-5} =$

**Тестовое задание 8.** Площадь криволинейной трапеции  $D$  равна



**Правильные ответы:**

1	2	3	4	5	6	7	8
а	г	а	а	0,22	-22	8	11/3

Составитель: С.Н. Бурков

## МАТРИЦА СООТВЕТСТВИЯ КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ УРОВНЮ СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ

Критерии оценки	Уровень сформированности компетенций
<b>Оценка по пятибалльной системе</b>	
«Отлично»	«Высокий уровень»
«Хорошо»	«Повышенный уровень»
«Удовлетворительно»	«Пороговый уровень»
«Неудовлетворительно»	«Не достаточный»
<b>Оценка по системе «зачет – незачет»</b>	
«Зачтено»	«Достаточный»
«Не зачтено»	«Не достаточный»

### **Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

1. Положение «О балльно-рейтинговой системе аттестации студентов (<https://edubiotech.ru/file/403>: режим доступа свободный);
2. Положение «О проведении текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся (<https://edubiotech.ru/file/104821>: режим доступа свободный).