

ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

Основы биологической статистики и информатики

**Методические указания по самостоятельному изучению и
выполнению контрольных работ**

для студентов направления подготовки

36.05.01 Ветеринария

Новосибирск 2023

Основы биологической статистики и информатики:

Методические указания по самостоятельному изучению и выполнению контрольных работ / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. С.Н. Шумарева – Новосибирск, 2023. – 34 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения 36.05.01 для формирования у них навыков самостоятельной работы.

Методические указания включают цели и задачи дисциплины, ее место в структуре основной образовательной программы (ООП), требования к результатам освоения дисциплины, ее объем и содержание, виды учебной работы, задания для контрольной работы, порядок и методику ее выполнения, а также защиты, вопросы к зачету, список рекомендуемой литературы.

Рецензенты: Е.Ю. Тарсис

к. т. н., доцент

РАЗДЕЛ 1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Цели и задачи учебной дисциплины

Дисциплина *Основы биологической статистики и информатики* предназначена для подготовки студентов по направлению *Ветеринария*.

Целью дисциплины является:

- освоение методологии математического мышления;
- формирование логического мышления;
- формирование навыков математического исследования прикладных вопросов;
- применение стандартных методов и моделей к решению вероятностных и статистических задач;
- умение пользоваться расчётными формулами, таблицами, графиками при решении статистических задач;

Исходя из цели, в процессе изучения дисциплины решаются следующие задачи:

- дать обучаемому арсенал типовых приемов для решения различных задач;
- дать обучаемому основные формулы, алгоритмы, приемы решения статистических задач, возникающих при исследовании прикладных проблем.

1.2. Место дисциплины в структуре основной общеобразовательной программы (ООП)

Б1.О.38.

Основы биологической статистики и информатики, относится к базовой части профессионального цикла дисциплин.

Основы биологической статистики и информатики является базовой частью цикла Математические и естественнонаучные дисциплины.

Программа определяет общий объем знаний в соответствии с государственными требованиями к содержанию цикла дисциплин основной профессиональной образовательной программы, разработанной в соответствии с ФГОС третьего поколения по направлению подготовки 36.05.01 Ветеринария.

Базирующиеся дисциплины: ветеринарная генетика, методология научных исследований, кормление животных с основами кормопроизводства, ветеринарно-санитарная экспертиза.

Первоначальный уровень подготовки обучающихся - математика в объеме средней школы.

1.3. Требования к уровню освоения учебной дисциплины

Дисциплина *Основы биологической статистики и информатики* в соответствии с требованиями ФГОС ВО направлена на формирование следующих и общепрофессиональных (ОПК) компетенций

Общепрофессиональные компетенции (ОПК):

ОПК-4

Способен использовать в профессиональной деятельности методы решений задач с использованием современного оборудования при разработке новых технологий и использовать современную профессиональную методологию при проведении экспериментальных исследований и интерпретации их результатов.

В результате изучения дисциплины студент должен

знать: методы математической и вариационной статистики в биологической и ветеринарной науке, объект, предмет, цели, задачи, место данной дисциплины среди других дисциплин, основные понятия, фактический материал, признаки, параметры, характеристики, свойства предмета изучения, системы и их элементы, связи между ними, процессы, функции, методы, средства, приемы, алгоритмы, способы решения задач, классификацию, пределы и т.п.._

уметь: применять вычислительную технику в своей деятельности, вычленять предметную область дисциплины, представлять, описывать результаты, выдвигать гипотезы о причинах возникновения той или иной ситуации, о путях ее развития и последствиях, рассчитывать, определять, оценивать признаки, параметры, характеристики, выбирать способы, методы, средства, модели, критерии, обобщать, интерпретировать полученные результаты; формулировать проблемы, вопросы; прогнозировать развитие событий, изменение состояния системы и т.п..

владеть: методологией исследования, методами сбора и обработки данных, методом анализа экономических явлений и процессов, современными методиками расчета и др..

1.4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы (72 часа). Форма самостоятельной работы – контрольная работа. Вид промежуточной аттестации – зачет.

РАЗДЕЛ 2. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНЫХ МОДУЛЕЙ ДИСЦИПЛИНЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ИЗУЧЕНИЮ

Модуль 1. 1. Теория вероятностей

Тема 1. Дискретная случайная величины

Закон распределения дискретной случайной величины. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины. Их свойства.

Распределения дискретной случайной величины: биномиальное, Пуассона, геометрическое, гипергеометрическое.

Тема 2. Непрерывная случайная величина

Функция и плотность распределения непрерывной случайной величины. Числовые характеристики непрерывной случайной величины: математическое ожидание, мода, медиана, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

1.1.2. Методические указания по изучению модуля

При самостоятельном изучении модуля, вначале нужно ознакомиться с содержанием тем дисциплины. Затем необходимо приступить к последовательному и глубокому усвоению материала, изложенного в рекомендуемой литературе. При этом следует составить краткий конспект по основным положениям. Ответить на вопросы для самоконтроля и решить тестовые задания

1.1.3. Вопросы для самоконтроля

1. События. Вероятность события
2. Дискретные, случайные величины, их числовые характеристики.
3. Непрерывные случайные величины. Интегральные и дифференциальные функции распределения.
4. Нормальное распределение. Правило 3-х сигм.
5. Теорема Ляпунова.

Модуль 1.2. Математическая статистика

Тема 1. Выборочный метод математической статистики.

Метод наименьших квадратов.

Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма. Определение вероятности и частоты. Расчет сводных характеристик выборки. Точечные и интервальные оценки параметров распределения.

Тема 2. Основные понятия теории статистических гипотез

Основные сведения. Проверка значимости гипотез. Проверка гипотезы о законе распределения на основе согласия Пирсона.

Тема 3. Корреляционно-регрессионный анализ

Линейная корреляция. Коэффициент корреляции. Регрессия.

1.2.2. Методические указания по изучению модуля

При самостоятельном изучении модуля, вначале нужно ознакомиться с содержанием тем дисциплины. Затем необходимо приступить к последовательному и глубокому усвоению материала, изложенного в рекомендуемой литературе. При этом следует составить краткий конспект по основным положениям. Ответить на вопросы для самоконтроля и решить тестовые задания

1.2.3. Вопросы для самоконтроля

1. Генеральная совокупность. Выборка.
2. Выборочный метод. Статистическое распределение. Графики.
3. Числовые характеристики.
4. Доверительный интервал. Числовые оценки параметров.
5. Статистические гипотезы.
6. Коэффициент корреляции, детерминации.
7. Уравнение регрессии.
8. Изложить суть корреляционно - регрессионного анализа.

РАЗДЕЛ 3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

3.1. Общие методические указания по выполнению контрольной работы

При выполнении контрольных работ студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Каждая работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, специальность, номер контрольной работы.
2. Контрольные задачи следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать ее условие. Решение задач следует излагать подробно.
3. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3 см. для замечаний преподавателя.
4. Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. Если преподаватель установит несамостоятельное выполнение работы, то она не будет зачтена.
5. Получив прорецензированную работу (как зачтенную, так и не

зачтенную), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. В случае незачета по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования преподавателя, и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

6. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 1. Если предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное или ноль (2, 4, 6, 8, 0), то номера задач даны в таблице 2.

- контрольные работы студентам не возвращаются и хранятся в фонде кафедры (установленный срок).

Таблица 1

№ варианта	Номера задач для контрольной работы					
	предпоследняя цифра 1, 3, 5, 7, 9			предпоследняя цифра 0, 2, 4, 6, 8		
1	1	21	31	11	21	31
2	2	22	32	12	22	32
3	3	23	33	13	23	33
4	4	24	34	14	24	34
5	5	25	35	15	25	35
6	6	26	36	16	26	36
7	7	27	37	17	27	37
8	8	28	38	18	28	38
9	9	29	39	19	29	39
0	10	30	40	20	30	40

3.2. Методические указания по выполнению контрольной работы

Задание 1.

Компактный ответ на теоретический вопрос.

Вопрос. Что такое математическая статистика?

Ответ: *Математическая статистика* - это раздел математики, изучающий приближенные методы отыскания законов распределения и числовых характеристик по результатам эксперимента.

В математической статистике принято выделять два основных направления исследований:

1. Оценка параметров генеральной совокупности.
2. Проверка статистических гипотез (некоторых априорных предположений).

Задание 2.

Задача

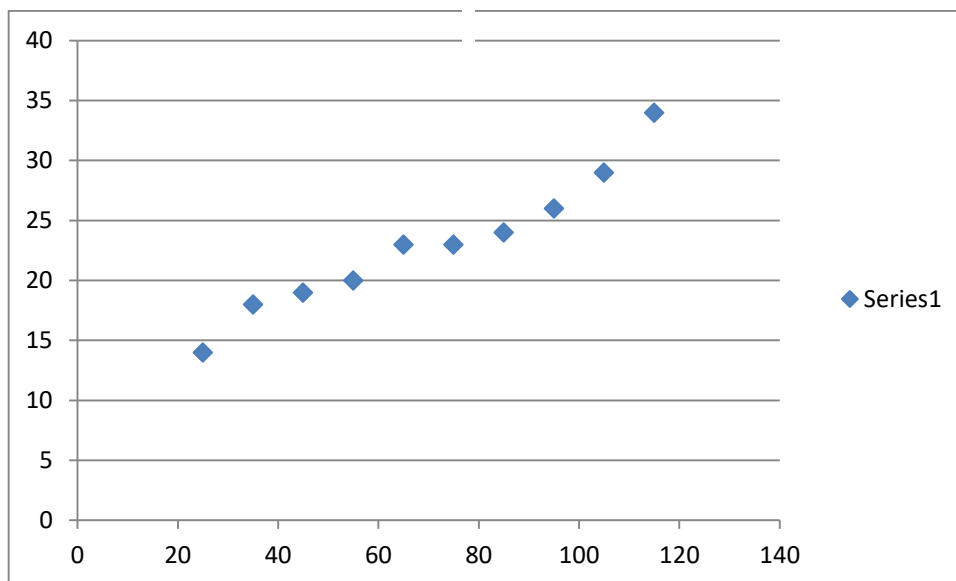
Были произведены измерения общей длины (X) ствола в см и длины его части без ветвей (Y) 10 молодых сосен. Результаты этого измерения представлены в следующей таблице:

X	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
Y	14	18	19	20	23	23	24	26	29	34

- 1) Построить поле корреляции.
- 2) Сделать предположение о виде корреляционной связи.
- 3) Найти коэффициент корреляции и оценить тесноту связи.
- 4) Проверить гипотезу о значимости выборочного коэффициента корреляции, при значимости 0,05.
- 5) Составить линейное уравнение регрессии Y на X. Построить его график на графике, где было построено поле корреляции.
- 6) Описать коэффициент регрессии и детерминации.

Решение

1)



2) Точки расположены вдоль прямой. Имеем видимую корреляционную связь.

3) Вычислим выборочный коэффициент корреляции по формуле

$$r_B = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_b)(y_i - \bar{y}_b)}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x}_b)^2} \sqrt{\sum (y_i - \bar{y}_b)^2}}$$

Для вычисления величин, входящих в формулу, составим вспомогательную таблицу, в которой результаты измерений записаны столбцами. Внизу каждого из этих столбцов вычислены суммы для нахождения средних \bar{x}_B и \bar{y}_B . Далее расположены столбцы, в которых вычисляются разности $x_i - \bar{x}_B$ и $y_i - \bar{y}_B$, их квадраты и произведения. Значения этих столбцов суммируются, чтобы получить величины, необходимые для подстановки в формулу. Отметим, что суммы в столбцах, в которых вычислены разности $x_i - \bar{x}_B$ и $y_i - \bar{y}_B$, будут всегда равны 0.

N	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}_B$	$(x_i - \bar{x}_B)^2$	$y_i - \bar{y}_B$	$(y_i - \bar{y}_B)^2$	$(x_i - \bar{x}_B)(y_i - \bar{y}_B)$
1	25	14	-45	2025	-9	81	405
2	35	18	-35	1225	-5	25	175
3	45	19	-25	625	-4	16	100
4	55	20	-15	225	-3	9	045
5	65	23	-5	25	0	0	0
6	75	23	5	25	0	0	0
7	85	24	15	225	1	1	15
8	95	26	25	625	3	9	75
9	105	29	35	1225	6	36	210
10	115	34	45	2025	11	121	495
Σ	700	230	0	8250	0	298	1520

Находим средние \bar{x}_B и \bar{y}_B :

$$\bar{x}_B = \frac{700}{10} = 70, \bar{y}_B = \frac{230}{10} = 23$$

Из таблицы имеем

$$\sum (x_i - \bar{x}_B)(y_i - \bar{y}_B) = 1520, \sum (x_i - \bar{x}_B)^2 = 8250, \sum (y_i - \bar{y}_B)^2 = 298$$

Подставляя эти значения в формулу для вычисления коэффициента корреляции, получим

$$r_B = \frac{1520}{\sqrt{8250} \cdot \sqrt{298}} \approx 0,97$$

Таким образом, у выбранных сосен имеет место очень сильная прямая корреляция между общей длиной ствола и длиной его части без ветвей.

4) Проверяется нулевая гипотеза H_0 об отсутствии линейной корреляционной связи между переменными X и Y в генеральной совокупности $H_0; r_{ген} = 0$.

$t_{набл} = \frac{|r| \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ имеют распределение Стьюдента с $f = n - 2$ степенями свободы.


$$\text{Рассчитаем: } t_{набл} = \frac{0,97 \cdot \sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0,97^2}} = 11,3.$$

По таблицам находим табличное значение t -критерия Стьюдента, определенное на уровне значимости $\alpha = 0,05$ и при числе степеней свободы $f = 10 - 2 = 8$, $t_{крит}(\alpha = 0,05; 8) = 2,3$.

Поскольку $t_{набл} > t_{крит}$, $11,3 > 2,3$, коэффициент корреляции значимо отличается от нуля.

5) Найдём теперь выборочное уравнение прямой регрессии Y на X . Это уравнение имеет вид:

$y - y_B = b \cdot (x - x_B)$, где b - коэффициент регрессии, отражающий интенсивность изменения результативного признака y при изменении x .

 Коэффициент регрессии b является величиной с конкретной размерностью и измеряется в тех же единицах признака y .

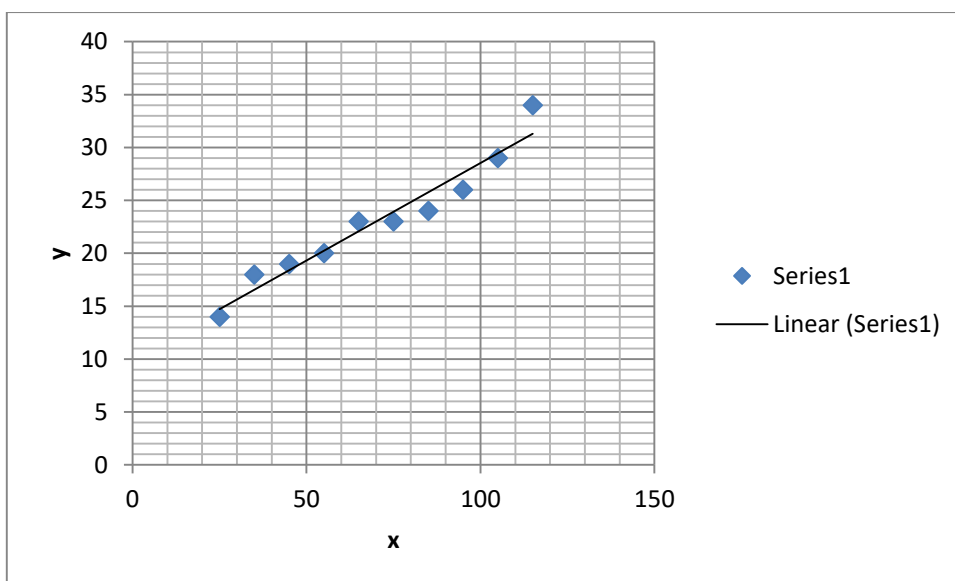
$$b = \frac{\sum(x_i - x_B)(y_i - y_B)}{\sum(x_i - x_B)^2} = 1520/8250 = 0,18$$

Подставляя в выборочное уравнение прямой регрессии Y на X

$$\bar{x}_B = 70, \bar{y}_B = 23, r_B = 0,97,$$

получим $y - 23 = 0,18(x - 70)$ или $y - 23 = 0,18x - 12,6$.

Окончательно, $y = 0,18x + 10,4$ - искомое уравнение прямой регрессии Y на X .



б) Коэффициент регрессии $b = 0,18$ показывает, что при изменении длины ствола на 1 см длина ствола без ветвей изменится в среднем на 0,18 см.

Коэффициент детерминации $d=r^2 100\%=94,09\%$ показывает, что длины его части без ветвей (Y) на 94,09% зависит от общей длины ствола (X).

Задание 3.

Пример

Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Найти выборочную дисперсию.

Решение

Найдем выборочную среднюю:

$$\bar{x}_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i$$

$$\bar{x}_e = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = 2$$

Найдем выборочную дисперсию:

$$D_{\hat{a}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_{\hat{a}})^2 \cdot n_i$$

$$D_{\hat{a}} = \frac{20(1-2)^2 + 15(2-2)^2 + 10(3-2)^2 + 5(4-2)^2}{20 + 15 + 10 + 5} = 1$$

На практике используют исправленную выборочную дисперсию S^2 , которая является несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B.$$

Проверка гипотез о равенстве дисперсий

Пусть генеральные совокупности X_1 и X_2 распределены нормально. По независимым выборкам объемов n_1 и n_2 , извлеченным из этих совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии $S_{x_1}^2$ и $S_{x_2}^2$. Требуется сравнить эти дисперсии. При заданном уровне значимости α надо проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокупностей.

$$1. H_0: \sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2.$$

$$2. H_1: \sigma_{x_1}^2 \neq \sigma_{x_2}^2.$$

3. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы о равенстве генеральных дисперсий используем случайную величину F , равную отношению большей исправленной выборочной дисперсии к меньшей

$$F_{набл} = \frac{S_{\bar{\sigma}}^2}{S_{\mathcal{M}}^2}.$$

4. Величина F , при условии справедливости нулевой гипотезы, имеет распределения Фишера со степенями свободы $f_1 = n_1 - 1$ и $f_2 = n_2 - 1$, где i_1 - объем выборки, по которой вычислена большая выборочная дисперсия.

Из таблиц находим $F_{крит}(\alpha, f_1, f_2)$.

5. Сравнивают $F_{\text{крит}}$ и $F_{\text{набл}}$.

Если $F_{\text{набл}} < F_{\text{крит}}(\alpha, f_1, f_2) \Rightarrow H_0$, генеральные дисперсии различаются незначимо.

●Пример

По двум независимым выборкам объемов $n_1=12$ и $n_2=15$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X_1 и X_2 , найдены исправленные выборочные дисперсии $S_{x_1}^2=11,41$ и $S_{x_2}^2=6,52$. При уровне значимости $\alpha \leq 0,05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий $H_0: \sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$.

Решение

Конкурирующая гипотеза: $H_1: \sigma_{x_1}^2 > \sigma_{x_2}^2$;

$$F_{\text{набл}} = \frac{S_{x_1}^2}{S_{x_2}^2}; F_{\text{набл}} = \frac{11,41}{6,52} = 1,75;$$

$$F_{\text{крит}}(\alpha \leq 0,05, f_1 = n_1 - 1 = 12 - 1 = 11, f_2 = 15 - 1 = 14) = 2,57;$$

$F_{\text{набл}} < F_{\text{крит}}(\alpha, f_1, f_2) \Rightarrow H_0$ - нет оснований отвергать нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Значит, можно применять и критерии Стьюдента для сравнения средних.

Проверка гипотез о равенстве средних

Мы получили, что неизвестные генеральные дисперсии равны между собой. По этим выборкам найдены соответствующие выборочные средние \bar{x}_1 и \bar{x}_2 и исправленные дисперсии S_1^2 и S_2^2 . Уровень значимости задан.

1. Нулевая гипотеза $H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2$
2. Конкурирующая гипотеза $H_1: \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$.
3. Для проверки нулевой гипотезы в этом случае можно использовать критерий Стьюдента сравнения средних.

Величину критерия находим по формуле

$$t_{\text{набл}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{(n_1 - 1)S_{x_1}^2 + (n_2 - 1)S_{x_2}^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

Доказано, что величина $t_{\text{набл}}$ при справедливости нулевой гипотезы имеет t – распределение Стьюдента с $f = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы.

4. По таблице находим $t_{\text{крит}}(\alpha, f = n_1 + n_2 - 2)$.
5. Сравниваем оба значения

Если $|t_{набл}| < t_{крит}(\alpha, f) \Rightarrow H_0$.

Если $|t_{набл}| > t_{крит}(\alpha, f) \Rightarrow$ отвергается H_0 и принимается H_1 , различие достоверно.

● Пример

По двум независимым малым выборкам объемов $n_1=5$ и $n_2=6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X_1 и X_2 , найдены выборочные средние $\bar{x}_1=33$, $\bar{x}_2=2,48$. Известно, что генеральные дисперсии примерно равны, то есть $\sigma_{\bar{x}_1}^2 = \sigma_{\bar{x}_2}^2$. При уровне значимости $\alpha \leq 0,05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве средних, если $t_{набл}=3,27$.

Решение

$$t_{\text{крит}}(\alpha \leq 0,05, f = n_1 + n_2 - 2 = 5 + 6 - 2 = 9) = 2.26.$$

$$t_{набл} > t_{\text{крит}}(\alpha, f) \Rightarrow \text{отвергаем } H_0.$$

Вывод: генеральные средние различаются значимо ($\alpha \leq 0,05$).

Статистическая обработка данных с использованием ППП MS Excel.

Задача. «Обработка результатов экспериментов для оценки эффективности замены рациона питания коров».

В таблице 1 даны значения надоев и затраты на 1 корову в зависимости от используемого рациона.

Исходные данные

Таблица 1

Номер опыта	Рацион №1		Рацион № 2	
	Надои от одной коровы, ц	Затраты на 1 корову (Руб за период)	Надои от одной коровы, ц	Затраты на 1 корову (Руб за период)
	A	B	C	D
1	33,7	1323,71	44,3	1328,5
2	39,85	1319,51	46,2	1329,5
3	42,95	1326,05	35,9	1331
4	36,8	1317,50	41,0	1327
5	36,8	1330,15	42,3	1323,5
6	42,95	1332,45	41,5	1329
7	39,65	1315,61	39,2	1328,5
8	42,95	1323,99	40,9	1330
9	36,8	1329,71	34,2	1323,5
10	33,7	1320,33	35,3	1320

11	36,8	1322,03	42,4	1325
12	49,05	1330,50	31,2	1332,5
13	36,8	1317,06	43,6	1325
14	39,85	1320,80	48,3	1330,5
15	42,95	1321,67	34,8	1325
16	36,8	1315,89	46,8	1326
17	36,8	1322,56	42,4	1324
18	42,95	1323,26	41,4	1328,5
19	39,85	1325,58	42,6	1331,5
20	42,95	1323,43	39,1	1324

П. 1 Создание электронной таблицы с исходными данными.

1. Запустить программу Excel.
2. Заполнить электронную таблицу значениями. В ячейки A1-A24 вводим данные столбца А, в ячейки B1-B24 вводим данные столбца В, в ячейки C1-C24-данные столбца С и в ячейки D1-D24 – данные столбца D.

П.2 Получение основных статистических характеристик.

В главном меню выберите последовательно пункты **Сервис/ Анализ данных/ Описательная статистика** (для Excel 2003)

и **ОК**. Если этого пункта у вас нет, то выберите **Сервис/Надстройки** и поставьте галочку у строки **Анализ данных**. Для Excel 2007-**Данные/Анализ/Анализ данных/ Описательная статистика**.

Заполните диалоговое окно ввода данных и параметров вывода (рис.1)

Входной интервал-диапазон, содержащий данные (один или несколько столбцов). В нашем случае-A1:D20.

Выходной интервал - левая верхняя ячейка будущего диапазона. В нашем случае-G2. Результаты вычислений на рис.2.

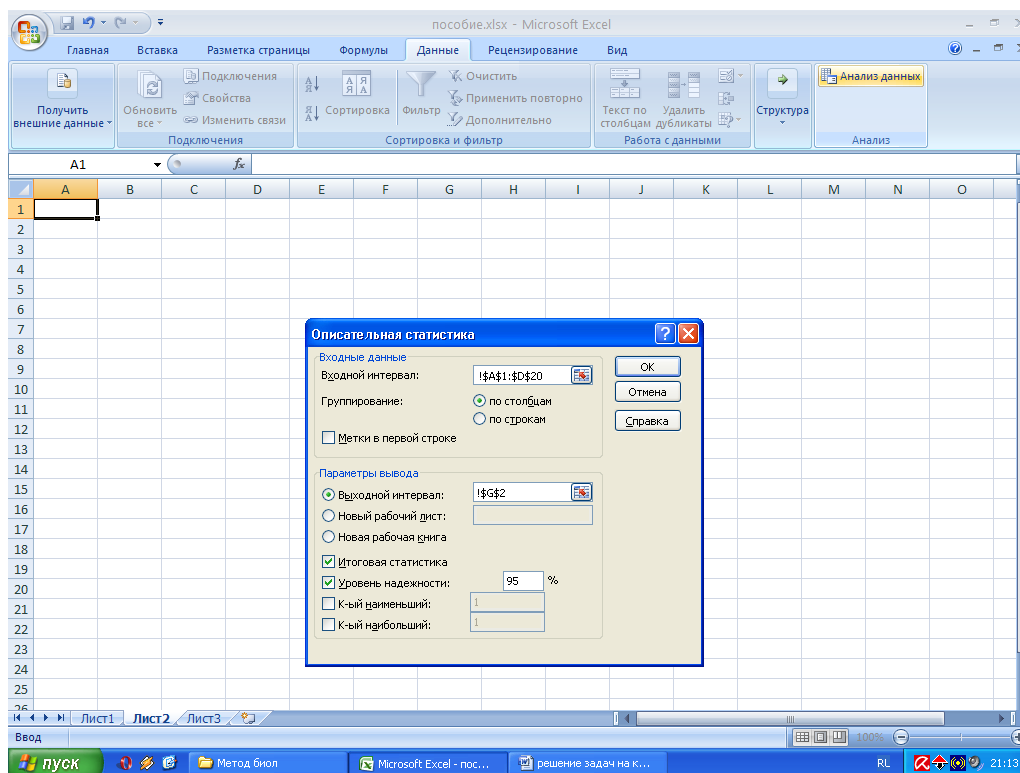


Рис.1. Диалоговое окно ввода .

	A	B	C	D		G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	33,70	1323,71	44,3	1328,50										
2	39,85	1319,51	46,2	1329,50		Столбец1	Столбец2	Столбец3	Столбец4					
3	42,95	1326,05	35,9	1331,00										
4	36,80	1317,50	41,0	1327,00		Среднее	39,5475	Среднее	1323,101	Среднее	40,66323	Среднее	1327,125	
5	36,80	1330,15	42,3	1323,50		Стандартная ошибка	0,860343	Стандартная	1,093511	Стандартная	1,004419	Стандартная	0,741508952	
6	42,95	1332,45	41,5	1329,00		Медиана	39,75	Медиана	1322,91	Медиана	41,44022	Медиана	1327,75	
7	39,65	1315,61	39,2	1328,50		Мода	36,8	Мода	#Н/Д	Мода	#Н/Д	Мода	1328,5	
8	42,95	1323,99	40,9	1330,00		Стандартное откл	3,847572	Стандартное	4,890332	Стандартное	4,491899	Стандартное	3,316128846	
9	36,80	1329,71	34,2	1323,50		Дисперсия выбор	14,80381	Дисперсия	23,91534	Дисперсия	20,17715	Дисперсия	10,99671053	
10	33,70	1320,33	35,3	1320,00		Экссесс	0,315836	Экссесс	-0,58443	Экссесс	-0,2906	Экссесс	-0,63866388	
11	36,80	1322,03	42,4	1325,00		Асимметричность	0,564079	Асимметр	0,323998	Асимметр	-0,42675	Асимметр	-0,25821277	
12	49,05	1330,50	31,2	1332,50		Интервал	15,35	Интервал	16,8419	Интервал	17,08097	Интервал	12,5	
13	36,80	1317,06	43,6	1325,00		Минимум	33,7	Минимум	1315,611	Минимум	31,1927	Минимум	1320	
14	39,85	1320,80	48,3	1330,50		Максимум	49,05	Максимум	1332,452	Максимум	48,27367	Максимум	1332,5	
15	42,95	1321,67	34,8	1325,00		Сумма	790,95	Сумма	26462,01	Сумма	813,2646	Сумма	26542,5	
16	36,80	1315,89	46,8	1326,00		Счет	20	Счет	20	Счет	20	Счет	20	
17	36,80	1322,56	42,4	1324,00		Уровень надежно	1,800719	Уровень	2,288746	Уровень	2,102273	Уровень	1,55199607	
18	42,95	1323,26	41,4	1328,50										
19	39,85	1325,58	42,6	1331,50										
20	42,95	1323,43	39,1	1324,00										

Рис.2. Электронная таблица с результатами расчета описательной статистики.

П.3 Проверка гипотезы на нормальность распределения в выборках.

1. Найдите табличные коэффициенты асимметрии и эксцесса для $n=20-25$

$A_{\text{табл}}=0,711$, $E_{\text{табл}}=0,869$.

2. Проверим гипотезу для первого столбца.

H_0 : неизвестная функция распределения $F(X)$ расследуемой выборки A распределена по нормальному закону.

Из таблицы рис.2 имеем $A=0,56$ и $E=0,32$. Так как расчетные коэффициенты меньше табличных значений, то принимаем нулевую гипотезу с вероятностью 95%.

Аналогично для столбцов B , C , D .

П.4 Проверка гипотезы о равенстве дисперсий.

1. На лист 2 копируем данные о надоях коров первого и второго рациона.

2. Так как мы установили нормальное распределение выборок, то используем F - критерий Фишера: **Сервис/ Анализ данных/ Двухвыборочный F- тест для дисперсий** (для Excel 2003), **Данные/Анализ/Анализ данных / Двухвыборочный F- тест для дисперсий** (для Excel 2007).

Заполняем входные данные и выходной интервал.

Внимание! В строку *Интервал переменной 1* вносим данные столбца B (он имеет большую дисперсию).

При заданном уровне значимости $\alpha = 0,05$ надо проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокупностей.

$$H_0: \sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2.$$

$$H_1: \sigma_{x_1}^2 \neq \sigma_{x_2}^2.$$

Получаем результат рис.3, нам предложили альтернативную гипотезу

$$H_2: \sigma_{x_1}^2 > \sigma_{x_2}^2.$$

Двухвыборочный F-тест для дисперсии

	Переменная 1	Переменная 2
Среднее	40,66323	39,5475
Дисперсия	20,17715	14,80380921
Наблюдения	20	20
df	19	19
F	1,36297	
P(F<=f) одностороннее	0,253096	
F критическое одностороннее	2,168252	

Рис.3 Результат проверки гипотезы.

Сравниваем $F_{набл}$ и $F_{крит}$.

Если $F_{набл} < F_{крит}(\alpha, f_1, f_2) \Rightarrow H_0$, генеральные дисперсии различаются незначимо. Получаем $1,36 < 2,168$, принимаем нулевую гипотезу о равенстве дисперсий.

1323,71	1328,50	Двухвыборочный F-тест для дисперсии			
1319,51	1329,50				
1326,05	1331,00		Переменная 1	Переменная 2	
1317,50	1327,00	Среднее	1323,09	1327,125	
1330,15	1323,50	Дисперсия	24,05671	10,99671	
1332,45	1329,00	Наблюдения	20	20	
1315,61	1328,50	df	19	19	
1323,99	1330,00	F	2,187628		
1329,71	1323,50	P(F<=f) одностороннее	0,048125		
1320,33	1320,00	F критическое одностороннее	2,168252		
1322,03	1325,00				
1330,50	1332,50				
1317,06	1325,00				
1320,80	1330,50				
1321,67	1325,00				
1315,89	1326,00				
1322,56	1324,00				
1323,26	1328,50				
1325,58	1331,50				
1323,43	1324,00				

3. На лист 2 еще копируем данные о затратах. Проводим аналогичный анализ. Анализируем результаты рис.4.

Рис.4 Результат проверки гипотезы о равенстве дисперсий для затрат.

Получаем $F_{\text{набл}}=2,18 > F_{\text{крит}}=2,17$ отвергаем нулевую о равенстве дисперсий с 95% вероятностью.

П.5 Сравнение выборочных средних независимых выборок с помощью t-критерия.

1. Сначала сравниваем надои при разных рационах, это столбцы А и С.

Нулевая гипотеза $H_0: \bar{X}_1 = \bar{X}_2$, предполагая, что $\sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$.

Конкурирующая гипотеза $H_1: \bar{X}_1 \neq \bar{X}_2$.

Так как по результатам п.4 мы получили $\sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$, то используем алгоритм **Анализ данных/ Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями.**

Вводим данные:

Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями

Входные данные

Интервал переменной 1: A\$1:A\$20

Интервал переменной 2: B\$1:B\$20

Гипотетическая средняя разность: 0

☐ Метки

Альфа: 0,05

Параметры вывода

☒ Выходной интервал: D\$1

☐ Новый рабочий лист:

☐ Новая рабочая книга

	A	B
1	33,70	44,3
2	39,85	46,2
3	42,95	35,9
4	36,80	41,0
5	36,80	42,3
6	42,95	41,5
7	39,65	39,2
8	42,95	40,9
9	36,80	34,2
10	33,70	35,3
11	36,80	42,4
12	49,05	31,2
13	36,80	43,6
14	39,85	48,3
15	42,95	34,8
16	36,80	46,8
17	36,80	42,4
18	42,95	41,4
19	39,85	42,6
20	42,95	39,1

Рис.5. Диалоговое окно ввода для проверки гипотезы о равенстве средних при одинаковой дисперсии.

Получаем результаты:

Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями

	Переменная 1	Переменная 2
Среднее	39,5475	40,66323
Дисперсия	14,80381	20,17715
Наблюдения	20	20
Объединенная дисперсия	17,49048	
Гипотетическая разность средних	0	
df	38	
t-статистика	-0,84364	
P(T<=t) одностороннее	0,202075	
t критическое одностороннее	1,685954	
P(T<=t) двухстороннее	0,404149	
t критическое двухстороннее	2,024394	

Рис.6 Результаты проверки гипотезы о равенстве надоев.

$t_{\text{набл}} = -0,84$, $t_{\text{крит}} = 2,02$.

Если $|t_{\text{набл}}| < t_{\text{крит}}$, то принимаем нулевую гипотезу о равенстве средних для $\alpha = 0,05$, т.е. влияние типа рациона на надои незначительно.

2. Теперь сравним затраты. Так как по результатам п.4 мы получили $\sigma_{y_1}^2 \neq \sigma_{y_2}^2$, то используем алгоритм **Анализ данных/ Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями.**

Нулевая гипотеза $H_0: \bar{y}_1 = \bar{y}_2$, предполагая, что $\sigma_{y_1}^2 \neq \sigma_{y_2}^2$.

Конкурирующая гипотеза $H_1: \bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$.

Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями

	Переменная 1	Переменная 2
Среднее	1323,09	1327,125
Дисперсия	24,05671	10,99671
Наблюдения	20	20
Гипотетическая разность средних	0	

df	33
t-статистика	-3,04814
P(T<=t) одностороннее	0,002255
t критическое одностороннее	1,69236
P(T<=t) двухстороннее	0,004511
t критическое двухстороннее	2,034515

Рис. 7. Результаты проверки гипотезы о равенстве затрат.

Если $|t_{\text{набл}}| > t_{\text{крит}}$, то отвергаем нулевую гипотезу о равенстве средних для $\alpha = 0,05$, т.е. влияние типа рациона на затраты значительно.

Итак, выбираем первый рацион, т.к. при меньших затратах $y_1=1323,09$ против $y_2=1327,125$, мы имеем сходные надои.

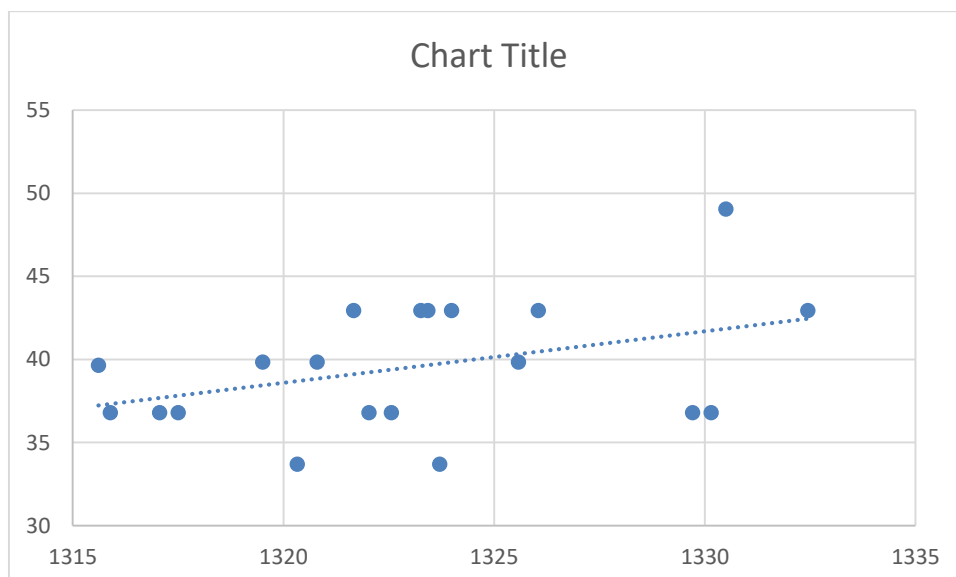
Для корреляционно-регрессионного анализа используем данные первого рациона. Если вы не выбрали приоритет в использование рациона, проводите анализ по обоим рационам.

П.6. Корреляционно-регрессионный анализ. Определение коэффициента корреляции и параметров линии распределения.

1. Так как мы выбрали первый рацион на лист 3 копируем столбцы А и В.

Уравнение регрессии будем искать в виде $\bar{y}_x = ax + b$, где X-затраты (руб), Y -надои (ц).

2. Строим точечный график и по его виду подбираем кривую, описывающую зависимость между переменными.



3. Используем алгоритм **Анализ данных/ Регрессия.**

Заполняем:

Входной интервал У, входной интервал Х, уровень надежности, выходной интервал. ОК.

Получаем:

ВЫВОД ИТОГОВ

<i>Регрессионная статистика</i>	
Множественный R	0,394811
R-квадрат	0,155876
Нормированный R-квадрат	0,10898
Стандартная ошибка	3,631872
Наблюдения	20

<i>Дисперсионный анализ</i>					<i>Значимость</i>
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>F</i>
Регрессия	1	43,84351	43,84351	3,323872	0,084933
Остаток	18	237,4289	13,19049		
Итого	19	281,2724			

	<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>Верхние 95%</i>
У-пересечение	-370,229	224,7645	-1,64719	0,116866	-842,442	101,9837
Переменная X 1	0,309712	0,169877	1,823149	0,084933	-0,04719	0,666611

Рис.8. Результаты корреляционно-регрессионного анализа.

Итак, имеем: выборочный коэффициент линейной корреляции

$r=0,395$, коэффициент детерминации $R^2=r^2(\%)=15,6\%$, $a=0,31$, $b=-370,2$

$y=-370,2+0,31x$ - уравнение регрессии, уровень значимости анализа 0,085.

Выборочный коэффициент линейной корреляции r характеризует тесноту и направление линейной связи между количественными признаками в выборке, коэффициент детерминации - долю дисперсии результативного признака y , объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного

признака. Чем больше R^2 , тем соответственно меньше роль прочих факторов и, следовательно, линейная модель хорошо описывает исходные данные.

Вывод: Связь между затратами и надоями средняя и прямая ($r > 0$), надои на 15,6% зависят от уровня затрат. Так, как уровень значимости $0,05 < \alpha < 0,1$, можно сказать, что линейная модель $y = -370,2 + 0,31x$ значима с вероятностью 90%. С увеличением затрат на 1 рубль надой возрастет на 0,31ц.

Задания для контрольной работы

Задание 1

1. Генеральная и выборочная совокупность. Определения. Пример генеральной и выборочной совокупности и признака, который будет исследоваться с их помощью.
2. В чем состоит сущность выборочного метода исследования?
3. Укажите, что будет являться объектом исследования при изучении:
 - а) отношения общества к курению;
 - б) жирности молока;
 - в) плодovitости свиноматок.
4. Виды случайных величин. По два примера каждой случайной величины.
5. Что представляет собой вариационный ряд? Что такое статистический ряд?
6. Приведите пример дискретного и интервального статистического ряда.
7. Какая разница между полигонами частот и относительных частот?
8. Как определяется и строится гистограмма?
9. Что такое «точечная оценка параметров распределения»?
10. Как определяется выборочное среднее для : а) простой выборки; б) сгруппированных данных? Что она характеризует?
11. Как определяется выборочная дисперсия для : а) простой выборки; б) сгруппированных данных? Что она характеризует?
12. Смысл выборочного среднеквадратичного отклонения и его отличие от выборочной дисперсии.
13. Понятие «статистической гипотезы».
14. Виды статистических гипотез.
15. Сформулируйте общую логическую схему проверки статистических гипотез.
16. Коэффициент корреляции. Для чего используется?
17. Шкала коэффициента корреляции и свойства.
18. Коэффициент регрессии и детерминации.
19. Поле корреляции и уравнение регрессии.
20. Смысл корреляционно-регрессионного метода.

Задание 2

В задачах **21–25** приводятся данные об измерении диаметра сосны в см (X) и её высоты в м (Y).

- 1) Построить поле корреляции.
- 2) Сделать предположение о виде корреляционной связи.
- 3) Найти коэффициент корреляции и оценить тесноту связи.

- 4) Проверить гипотезу о значимости выборочного коэффициента корреляции, при значимости 0,05.
- 5) Составить линейное уравнение регрессии Y на X . Построить его график на графике, где было построено поле корреляции.
- 6) Описать коэффициент регрессии и детерминации.

21	X	20	22	25	27	28	29	30	32	42	45
	Y	18	19	20	21	22	22	23	24	25	26
22	X	18	20	21	24	26	28	29	31	33	40
	Y	16	17	18	19	20	20	21	22	23	24
23	X	19	20	21	23	24	29	30	31	38	41
	Y	17	19	18	19	20	21	22	25	27	28
24	X	19	21	23	24	25	27	28	30	31	35
	Y	17	18	19	21	21	23	24	25	25	27
25	X	21	23	24	25	27	29	30	32	33	38
	Y	18	19	21	22	23	24	25	25	26	27

В задачах **26–30** приводятся данные о весе зерна в мг (X) и процентном содержании жира в нём (Y).

- 1) Построить поле корреляции.
- 2) Сделать предположение о виде корреляционной связи.
- 3) Найти коэффициент корреляции и оценить тесноту связи.
- 4) Проверить гипотезу о значимости выборочного коэффициента корреляции, при значимости 0,05.
- 5) Составить линейное уравнение регрессии Y на X . Построить его график на графике, где было построено поле корреляции.
- 6) Описать коэффициент регрессии и детерминации.

26	X	35	40	45	48	49	47	45	40	36	35
	Y	4	5	6	7	7	6	8	8	4	5
27	X	38	41	44	45	50	51	49	40	39	33
	Y	3	9	8	5	5	7	6	9	4	4
28	X	37	39	42	44	49	48	48	39	40	34
	Y	3	3	5	8	8	7	6	4	4	2
29	X	36	38	35	39	40	42	43	38	39	41
	Y	3	4	2	5	6	7	7	5	6	7
30	X	36	37	38	35	36	40	41	43	35	38
	Y	4	5	5	6	4	7	7	6	5	6

Задание 3

В задачах **31–35** приводятся данные о суточном привесе овец при двух типах рационов. Первая группа (X) получала обычный рацион, вторая (Y) – рацион с минеральными добавками. Проверить гипотезу о равенстве средних привесов при $\alpha = 0,05$.

31	X	0,14	0,15	0,17	0,19	0,21	0,23	0,24	0,17	0,21	0,15
	Y	0,25	0,2	0,27	0,23	0,30	0,28				
32	X	0,12	0,13	0,16	0,14	0,2	0,25	0,2	0,18	0,2	0,21
	Y	0,24	0,26	0,2	0,3	0,27	0,23	0,25			
33	X	0,13	0,15	0,13	0,16	0,17	0,2	0,18	0,16	0,23	0,21
	Y	0,25	0,21	0,19	0,24	0,27	0,29				
34	X	0,19	0,13	0,16	0,15	0,19	0,13	0,12	0,18	0,21	0,12
	Y	0,21	0,23	0,26	0,31	0,24	0,25				
35	X	0,12	0,17	0,13	0,2	0,18	0,14	0,15			
	Y	0,2	0,25	0,21	0,22	0,19	0,23	0,21	0,25	0,26	

В задачах **36–40** приводятся данные о замерах высоты растений подсолнечника в двух группах растений с разными способами возделывания. Первая группа (X) – весенний посев при нормальной глубине заделки, вторая (Y) – посев под зиму с глубокой заделкой семян. Проверить гипотезу о равенстве средней высоты при $\alpha = 0,05$.

36	X	14,5	16	15	14	15,5	15	16			
	Y	21	14	16,5	19,5	19	18	19,5			
37	X	13	14	14,5	12,5	14	13,5	15			
	Y	20	19	18,5	19,5	21	20,5	20	21,5		
38	X	13,5	12	14,5	15	14	14,5				
	Y	18,5	19	20	20,5	19,5	18	17			
39	X	13,5	14	13	15	14,5	16,5	15			
	Y	21	20,5	19	18	16	19,5	19,5	19		
40	X	14	14,5	16	15,5	19	15	15,5	14,5	13	
	Y	22	22,5	19,5	18,5	17	24				

РАЗДЕЛ 4. ПЕРЕЧЕНЬ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ

1. Генеральная и выборочная совокупность. Определения. Пример генеральной и выборочной совокупности и признака, который будет исследоваться с их помощью.
2. В чем состоит сущность выборочного метода исследования?
3. Виды случайных величин. По два примера каждой случайной величины.
4. Что представляет собой вариационный ряд? Что такое статистический ряд?
5. Приведите пример дискретного и интервального статистического ряда.
6. Какая разница между полигонами частот и относительных частот?
7. Как определяется и строится гистограмма?
8. Что такое «точечная оценка параметров распределения»?
9. Как определяется выборочное среднее для : а) простой выборки; б) сгруппированных данных? Что она характеризует?
10. Как определяется выборочная дисперсия для : а) простой выборки; б) сгруппированных данных? Что она характеризует?
11. Смысл выборочного среднеквадратичного отклонения и его отличие от выборочной дисперсии.
12. Понятие «статистической гипотезы».
13. Виды статистических гипотез.
14. Сформулируйте общую логическую схему проверки статистических гипотез.
15. Коэффициент корреляции. Для чего используется?
16. Шкала коэффициента корреляции и свойства.
17. Коэффициент регрессии и детерминации.
18. Поле корреляции и уравнение регрессии.
19. Смысл корреляционно-регрессионного метода.

РАЗДЕЛ 5. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Белько И.В. Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование: Учебное пособие/ Белько И.В., Морозова И.М., Криштапович Е.А. – М.:НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2016. -229 с.
- 2.Бирюкова Л.Г. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие/ Бирюкова Л.Г., Матвеев В.И., Бобрик Г.И., - 2-е изд. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2017. – 289 с.

Дополнительная литература

1. Математика: Учебное пособие / Ю.М. Данилов, Н.В. Никонова, С.Н. Нуриева; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 496 с.(ЭБС ИНФРА-М)

2.[Математика.Часть 3.](#) Автор: **Шумарева С.Н.** Год издания: **2016**

3.[Теория вероятностей и математическая статистика](#) Автор: **Р.Т. Бильданов, М.В. Грунина, В.Н. Бабин.** Год издания: **2015** Объем: **136** стр. Тираж: **100** экз. Место издания: **Новосибирск, НГАУ**

Содержание

РАЗДЕЛ 1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ	3
1.1. Цели и задачи курса	3
1.2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы (ООП)	3
1.3. Требования к результатам освоения дисциплины	4
1.4. Объем дисциплины и виды учебной работы	4
РАЗДЕЛ 2. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНЫХ МОДУЛЕЙ ДИСЦИПЛИНЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ИЗУЧЕНИЮ	5
2.1. Модуль1. Теория вероятностей	6
2.2. Модуль 2. Математическая статистика	6
РАЗДЕЛ 3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ	7
3.1. Общие указания по выполнению контрольных работ	7
3.2. Методические указания по выполнению контрольной работы	8
РАЗДЕЛ 4. ПЕРЕЧЕНЬ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ	19
РАЗДЕЛ 5. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	20
Приложения	

Приложение 1

Таблица значений F-критерия Фишера при уровне значимости $\alpha=0,05$

K ₂ – степени свободы для меньшей (внутригрупповой дисперсии)	K ₁ – степени свободы для большей (межгрупповой) дисперсии								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	13,97	19,38
4	7,71	6,94	6,94	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
6	5,99	5,14	4,76	3,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,84	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
12	4,75	3,88	3,40	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,59	2,51	2,46
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,61	2,42	2,36	2,20
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,43	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,48	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	3,13	2,07
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
80	3,96	3,11	2,72	2,48	2,33	2,21	2,12	2,05	1,99
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97
200	3,04	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92

Приложение 2

Критические значения t-критерия Стьюдента при уровне значимости 0,10; 0,05; 0,01 (двухсторонней).

Число степеней свободы ν	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)			ν	α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,6041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6603
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,52	0,1985	1,04	0,3508	1,56	0,4406	2,16	0,4846
0,01	0,0040	0,53	0,2019	1,05	0,3531	1,57	0,4418	2,18	0,4854
0,02	0,0080	0,54	0,2054	1,06	0,3554	1,58	0,4429	2,20	0,4861
0,03	0,0120	0,55	0,2088	1,07	0,3577	1,59	0,4441	2,22	0,4868
0,04	0,0160	0,56	0,2123	1,08	0,3599	1,60	0,4452	2,24	0,4875
0,05	0,0199	0,57	0,2157	1,09	0,3621	1,61	0,4463	2,26	0,4881
0,06	0,0239	0,58	0,2190	1,10	0,3643	1,62	0,4474	2,28	0,4887
0,07	0,0279	0,59	0,2224	1,11	0,3665	1,63	0,4484	2,30	0,4893
0,08	0,0319	0,60	0,2257	1,12	0,3686	1,64	0,4495	2,32	0,4898
0,09	0,0359	0,61	0,2291	1,13	0,3708	1,65	0,4505	2,34	0,4904
0,10	0,0398	0,62	0,2324	1,14	0,3729	1,66	0,4515	2,36	0,4909
0,11	0,0438	0,63	0,2357	1,15	0,3749	1,67	0,4525	2,38	0,4913
0,12	0,0478	0,64	0,2389	1,16	0,3770	1,68	0,4535	2,40	0,4918
0,13	0,0517	0,65	0,2422	1,17	0,3790	1,69	0,4545	2,42	0,4922
0,14	0,0557	0,66	0,2454	1,18	0,3810	1,70	0,4554	2,44	0,4927
0,15	0,0596	0,67	0,2486	1,19	0,3830	1,71	0,4564	2,46	0,4931
0,16	0,0636	0,68	0,2517	1,20	0,3849	1,72	0,4573	2,48	0,4934
0,17	0,0675	0,69	0,2549	1,21	0,3869	1,73	0,4582	2,50	0,4938
0,18	0,0714	0,70	0,2580	1,22	0,3888	1,74	0,4591	2,52	0,4941
0,19	0,0753	0,71	0,2611	1,23	0,3907	1,75	0,4599	2,54	0,4945
0,20	0,0793	0,72	0,2642	1,24	0,3925	1,76	0,4608	2,56	0,4948
0,21	0,0832	0,73	0,2673	1,25	0,3944	1,77	0,4616	2,58	0,4951
0,22	0,0871	0,74	0,2703	1,26	0,3962	1,78	0,4626	2,60	0,4953
0,23	0,0910	0,75	0,2734	1,27	0,3980	1,79	0,4633	2,62	0,4956
0,24	0,0948	0,76	0,2764	1,28	0,3997	1,80	0,4641	2,64	0,4959
0,25	0,0987	0,77	0,2794	1,29	0,4015	1,81	0,4649	2,66	0,4961
0,26	0,1026	0,78	0,2823	1,30	0,4032	1,82	0,4656	2,68	0,4963
0,27	0,1064	0,79	0,2852	1,31	0,4049	1,83	0,4664	2,70	0,4965
0,28	0,1103	0,80	0,2881	1,32	0,4066	1,84	0,4671	2,72	0,4967
0,29	0,1141	0,81	0,2910	1,33	0,4082	1,85	0,4678	2,74	0,4969
0,30	0,1179	0,82	0,2939	1,34	0,4099	1,86	0,4686	2,76	0,4971

0,31	0,1217	0,83	0,2967	1,35	0,4115	1,87	0,4693	2,78	0,4973
0,32	0,1255	0,84	0,2995	1,36	0,4131	1,88	0,4699	2,80	0,4974
0,33	0,1293	0,85	0,3023	1,37	0,4147	1,89	0,4706	2,82	0,4976
0,34	0,1331	0,86	0,3051	1,38	0,4162	1,90	0,4713	2,84	0,4977
0,35	0,1368	0,87	0,3078	1,39	0,4177	1,91	0,4719	2,86	0,4979
0,36	0,1406	0,88	0,3106	1,40	0,4192	1,92	0,4726	2,88	0,4980
0,37	0,1443	0,89	0,3133	1,41	0,4207	1,93	0,4732	2,90	0,4981
0,38	0,1480	0,90	0,3159	1,42	0,4222	1,94	0,4738	2,92	0,4982
0,39	0,1517	0,91	0,3186	1,43	0,4236	1,95	0,4744	2,94	0,4984
0,40	0,1554	0,92	0,3212	1,44	0,4251	1,96	0,4750	2,96	0,4985
0,41	0,1591	0,93	0,3238	1,45	0,4265	1,97	0,4756	2,98	0,4986
0,42	0,1628	0,94	0,3264	1,46	0,4279	1,98	0,4761	3,00	0,49865
0,43	0,1664	0,95	0,3289	1,47	0,4292	1,99	0,4767	3,20	0,49931
0,44	0,1700	0,96	0,3315	1,48	0,4306	2,00	0,4772	3,40	0,49966
0,45	0,1736	0,97	0,3340	1,49	0,4319	2,02	0,4783	3,60	0,499841
0,46	0,1772	0,98	0,3365	1,50	0,4332	2,04	0,4793	3,80	0,499928
0,47	0,1808	0,99	0,3389	1,51	0,4345	2,06	0,4803	4,00	0,499968
0,48	0,1844	1,00	0,3413	1,52	0,4357	2,08	0,4812	4,50	0,499997
0,49	0,1879	1,01	0,3438	1,53	0,4370	2,10	0,4821	5,00	0,499997
0,50	0,1915	1,02	0,3461	1,54	0,4382	2,12	0,4830		
0,51	0,1950	1,03	0,3485	1,55	0,4394	2,14	0,4838		

Приложение 4

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3985	3961	3956	3951	3945	3939	3932	2925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920

0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	1878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0335	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

