ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

Математика

Учебно-методическое пособие по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы

35.03.01 *Лесное дело*

Новосибирск 2023

Кафедра математики и физики
УДК 51 (075)
ББК 22.1, я73
М 34

Составители: канд. техн. наук, доц. Тарсис Е.Ю., Журавская С.А., Шарлов А.И.

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, профессор Ершов И.В.

Математика: учебно-методическое пособие по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы/ Новосиб. гос. аграр. ун-т; сост. Е. Ю. Тарсис, С.А. Журавская, А.И. Шарлов – Новосибирск, 2023. –67 с.

В пособии представлены задания для выполнения на практических занятиях и самостоятельной работы, вопросы для самоконтроля и подготовки к экзамену, рекомендации по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы, список основной и дополнительной литературы.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов Агрономического факультета очной и заочной форм обучения по направлению подготовки:

35.03.01 Лесное дело (профиль: Лесное дело).

Содержание

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

Основными **Целями** преподавания математики студентам специальности Лесное дело являются:

– добиться усвоения студентами базового математического аппарата основных разделов высшей математики, теории вероятностей и математической статистики, необходимого для решения типовых теоретических и практических задач профессиональной деятельности, а также, для успешного изучения других общетеоретических и специальных дисциплин;

– привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям, подготовить к чтению современной научной литературы;

– развить логическое и аналитическое мышление, способность к обобщению, умение оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений;

– выработать навыки математического исследования прикладных вопросов;

–сформировать у студента требуемый набор компетенций, соответствующих его направлению подготовки и обеспечивающих его конкурентоспособность на рынке труда

Основные **Задачи** освоения дисциплины состоят:

– в овладении студентами основными понятиями, алгоритмами и методами высшей математики, формирующими способность решать типовые задачи в области лесного хозяйства;

– в развитии у студентов абстрактно-логического и аналитического мышления;

– умение разбираться в существующих математических методах и моделях и условиях их применимости на практике;

– в обучении использованию основных математических законов и информационно-коммуникационных технологий при решении стандартных задач в области лесного хозяйства;

– в приобретении студентами опыта работы со специальной математической литературой.

1.2. Требования к результатам освоения дисциплины

Дисциплина математика в соответствии с требованиями ФГОС ВО и с учетом ПООП направлена на формирование следующих компетенций:

ОПК-1. Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности на основе знаний основных законов математических и естественных наук с применением математических методов и информационно-коммуникационных технологий (индикатор **ИОПК-1.1.** Использует основные законы естественнонаучных дисциплин и математических методов для решения стандартных задач в области лесного хозяйства).

В результате освоения дисциплины студент ***должен***:

Знать основные понятия и методы аналитической геометрии, векторной и линейной алгебры, математического анализа, теории вероятностей, математической статистики, которые предусмотрены программой курса и необходимы для формирования умения решать типовые задачи в профессиональной деятельности;

Уметь:

–решать типовые математические задачи, необходимые для формирования навыков решения стандартных задач в области лесного дела;

–использовать знание основных законов и методов математических дисциплин, необходимых для решения типовых задач в сфере профессиональной деятельности.

Владеть:

–навыками применения современного математического инструментария и информационно-коммуникационных технологий для решения поставленных прикладных задач;

–навыками использования математических законов и методов для обработки расчетных экспериментальных данных и содержательной интерпретации полученных результатов;

–арсеналом типовых приемов, основных формул и алгоритмов для решения стандартных задач в области лесного дела;

2. Методические рекомендации по самостоятельной работе

Успешное освоение компетенций, формируемых данной учебной дисциплиной, предполагает оптимальное использование времени самостоятельной работы. Особенно это актуально для студента-заочника, самостоятельная работа которого над учебным материалом, является основной формой обучения. В помощь заочнику университет организует чтение лекций и практические занятия. Кроме того, студент может обращаться к преподавателю с вопросами в письменном виде или устно. Однако студент-заочник должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь университета будет достаточно эффективной.

Самостоятельная работа во внеаудиторное время состоит из:

– проработки лекционного материала, доработки конспекта в результате изучения учебно-методической и научной литературы;

– подготовки к практическим занятиям;

– решения задач, выданных на практических занятиях;

– проведение самоконтроля путем ответов на вопросы текущего контроля знаний, решения представленных в учебно-методических материалах дисциплины задач.

– подготовки к защите заданий из контрольной работы, тестированию и т. д.;

2.1 Рекомендации к изучению материала по учебнику и ведению конспекта для студентов заочной и очной формы обучения

При изучении материала по учебнику из списка, приведенного на стр. 66, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, проделывая на бумаге все вычисления, в том числе и те, которые по их простоте опущены, воспроизводя имеющиеся в учебнике чертежи. Особое внимание следует обратить на определение основных понятий. Студент должен подробно разобрать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь привести такие примеры самостоятельно. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения обязательно должны использоваться в доказательстве. Полезно составлять схемы доказательств. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные для письменной или устной консультации с преподавателем. Записи в конспекте должны быть сделаны аккуратно. Хорошее внешнее оформление конспекта не только приучит к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из небрежных, беспорядочных записей. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента.

Студентам очной формы обучения целесообразно дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, предусмотренной учебной программой и рекомендованной преподавателем (стр. 66).

2.2 Рекомендации к подготовке к практическим занятиям и решению задач

Все задания к практическим занятиям, а также задания, вынесенные на самостоятельную работу, рекомендуется выполнять непосредственно после соответствующей темы лекционного курса, что способствует лучшему усвоению материала, позволяет своевременно выявить и устранить «пробелы» в знаниях, систематизировать ранее пройденный материал, на его основе приступить к получению новых знаний и овладению навыками.

Чтение учебника и конспекта должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь. При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный (если конечно такой путь не указан в условии задачи, в этом случае следует решить ее указанным методом). Полезно до начала вычислений составить краткий план решения. Решения задач и примеров следует записывать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от остальных. Ошибочные записи следует замазывать корректором или просто зачеркивать. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения, например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений, то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом, циркулем и указывать масштаб. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны) входящих в нее величин. В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.д. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

2.3 Рекомендации к проведению самоконтроля (самопроверки)

После изучения определенной темы по конспекту и (или) учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику или конспекту. Вопросы и задачи для самопроверки, приведенные в данном пособии, должны помочь студенту в таком повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, заключающейся в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате механически заученных форм, без понимания существа дела. Можно сказать, что умение решать задачи является необходимым, но не достаточным условием хорошего знания теории.

3. Методические рекомендации и указания по выполнению контрольных работ

Главная цель выполнения контрольной работы (КР)‒оказать студенту помощь в его работе. Рецензия на эту работу позволяет студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывает на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы, помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем (письменной или устной). Прежде, чем выполнять КР нужно изучить соответствующий теоретический материал по конспекту и (или) учебнику, ответить на вопросы для самоконтроля и решить задачи, приведенные к каждому практическому занятию в настоящем пособии в разделе 4 (стр. 9-48). Этот материал нужно закрепить, решая самостоятельно (может быть и несколько раз) уже решенные типовые задачи, приведенные в разделе 5 и в соответствующих разделах в учебнике, выбранном из списка основной и дополнительной литературы; Не следует приступать к выполнению задачи из контрольной до решения достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию.

Контрольная работа должна выполняться самостоятельно. Не самостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю-рецензенту указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться не подготовленным к устному экзамену.

Студент очной формы обучения должен пройти собеседование по зачтённой контрольной работе.

Студенты, обучающиеся по направлениям подготовки **35.03.01 Лесное дело** выполняют контрольную работу (КР) по следующим разделам:

Элементы линейной алгебры, векторного анализа и аналитической геометрии‒задачи 1-10 (стр.49), задачи 11-20 (стр.52);

Математический анализ − задачи 21-30 (стр.53-54);

Теория вероятностей и математическая статистика − задачи 31-40 (стр. 57-58), задачи 41-50 (стр. 58-60).

Таким образом, студент должен выполнить ***5 задач согласно номеру варианта (таб.1 на стр.9)***. Ознакомиться с указанием 11 данного раздела.

Каждая серия задач содержит условия, исходные данные для их выполнения и примеры выполнения (стр. 49-62).

При оформлении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими **указаниями**:

1) Контрольная работа выполняется в отдельной ученической тетради (в клетку), на

внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны название учебного заведения, факультета; название кафедры; название КР; название дисциплины; название специальности; ФИО и личный шифр студента; номер курса и группы.

2) Задачи контрольной работы следует располагать в порядке номеров, указанных в задании. Перед решением каждой задачи надо записать ее номер и полностью переписать ее условие.

3) Решение задачи должно быть изложено последовательно с краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, как получаются те или иные результаты) соответствующими ссылками на вопросы теории и указанием необходимых формул, теорем); в конце необходимо привести окончательный ответ.

4) Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5) При решении задач надо учесть указания (если они есть), приведенные после формулировки условия задачи.

6) На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной около 3 см для замечаний преподавателя.

7) Работы, не отвечающие перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются на переделку.

8) Студентам заочной формы обучения следует зарегистрировать выполненную контрольную работу в установленные сроки в деканате у методиста.

9) Получив прорецензированную работу (как зачтенную, так и не зачтенную), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. В случае незачета по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования преподавателя, и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

10) Зачтенную контрольную работу вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления преподавателю зачтенной контрольной работы студент не допускается к сдаче экзамена.

11) Из приведенных в таблице 1 на странице 9, студент выполняет ***тот вариант КР, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра***. Условия задач и примеры решения приведены в 5 разделе на стр. 49-62.

Таблица 1.

№ вари-анта	Номера задач контрольной работы по вариантам				
1	1	11	21	31	41
2	2	12	22	32	42
3	3	13	23	33	43
4	4	14	24	34	44
5	5	15	25	35	45
6	6	16	26	36	46
7	7	17	27	37	47
8	8	18	28	38	48
9	9	19	29	39	49
0	10	20	30	40	50

3.1. Критерии оценивания результатов выполнения контрольной работы для студентов очной формы обучения:

оценка «отлично» – задания контрольной работы выполнены в полном объеме, полностью правильно или с допущением несущественных ошибок. Количество ошибок – не более 2-х;

оценка «хорошо» – задания контрольной работы выполнены в полном объеме, полностью правильно или с допущением несущественных ошибок. Количество ошибок – не более 4-х;

оценка «удовлетворительно» – задания контрольной работы выполнены в объеме не менее 0,8, с допущением несущественных ошибок (не более пяти) или одной существенной ошибки;

оценка «неудовлетворительно» – задания контрольной работы выполнены не в полном объеме, с допущением существенных ошибок, либо количество несущественных ошибок более пяти. Контрольная работа возвращается студенту для дальнейшей работы над ней.

4. Задания для проведения практических занятий и самостоятельной работы, вопросы для самоконтроля

Раздел 1. Элементы линейной алгебры, векторного анализа и аналитической геометрии

Занятие 1. Операции над матрицами. Вычисление определителей.

Задания для аудиторной работы:

1. Найти матрицу $B = -2A^T + A$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Для матриц A и B найти произведение $A \cdot B$: а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&0&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2\\1&-3\\1&5\end{pmatrix}$.

3. Для матриц A и B найти произведение $A\cdot B^{T}$:

а) $A=\begin{pmatrix}0&-2\\1&-5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&11\\-2&-3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\4\\8\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\1&4&-3\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\2&3&3\end{pmatrix}$.

4. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix}3&-2\\4&6\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}2&3\\6&-10\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}\sqrt{a}&-1\\a&\sqrt{a}\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}\sin\alpha&\cos\alpha\\-\cos\alpha&\sin\alpha\end{vmatrix}$

.

5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2&3&4\\5&-2&1\\1&2&3\end{vmatrix}$ с помощью правила Саррюса.

6. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}-2&3&0\\1&-1&5\\4&2&7\end{pmatrix}$. Найти алгебраические дополнения элементов первой строки.

7. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&4&0\\0&0&7\end{vmatrix}$ с помощью формул Лапласа.

8. Найти $P(A)$, если $P(A)=A^2-2|A|E$, $A=\begin{pmatrix}5&1\\1&2\end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельной работы и самоконтроля:

1. Дайте определение матрицы. Что такое размер матрицы?

2. Запишите нулевую матрицу размера 2×3.

3. Какая матрица называется квадратной? Какие виды квадратной матрицы вы знаете?

4. Если в матрице все элементы главной диагонали равны единице, а все остальные элементы – нулевые, то такая матрица называется….

5. Запишите единичную матрицу 3-го порядка.

6. Таблица вида $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&...&a_{1n}\\0&a_{22}&...&a_{2n}\\...&...&...&...\\0&0&...&a_{nn}\end{pmatrix}$ называется …. матрицей.

7. В каком случае две матрицы называются равными?

8. Какие операции (действия) над матрицами вы знаете?

9. Произведением матрицы $A=\begin{pmatrix}a_{11}\ldots\ldots\ldots a_{1n}\\ -------\\ a_{m1}\ldots\ldots\ldots a_{mn}\end{pmatrix}$ на число λ называется матрица ….

10. Произведением числа $\lambda = 2$ на матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ является матрица ….

11. Что называется суммой двух матриц одного размера?

12. Суммой матриц $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ является матрица ….

13. Разностью матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ является матрица ….

14. Произведением матриц размеров $n \times m$ и $m \times p$ является матрица размера … , элементы которой определяются по правилу ….

15. При умножении матрицы A на матрицу B должно соблюдаться условие: а) число строк матрицы A равно числу строк матрицы B; б) число столбцов матрицы A равно числу столбцов матрицы B; с) если матрицы A и B прямоугольные, то они должны быть одинакового размера; д) число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Выберите верный ответ.

16. Матрицу A размера 5×3 можно умножить на матрицу B размера $m \times 8$, если m равно ….

17. Произведением матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ является матрица ….

18. Произведением матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ является матрица ….

19. Произведением матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ является матрица ….

20. По определению, транспонированной к матрице A называется матрица A^T такая, что …. Запишите какую-нибудь матрицу и протранспонируйте ее.

21. Что означает запись A^2 ?

22. По определению, определителем второго порядка называется ….

23. По определению, определителем третьего порядка называется ….

24. Определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ вычисляется по формуле ….

25. Минором элемента a_{ij} определителя называется ….

26. Минором элемента b_{12} определителя $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$ является ….

27. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется …..

28. Алгебраическим дополнением элемента a_{34} определителя называется ….

29. Чему равна сумма произведений всех элементов какой-либо строки (какого-либо столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения? Как называется это свойство?

30. Определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, это число равное…

а) $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$; б) $a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$; в) $a_{11}M_{11}+a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$, где A_{ij} $(i,j=\overline{1,3})$ – алгебраические дополнения, M_{ij} $(i,j=\overline{1,3})$ – миноры элементов a_{ij}.

31. Определитель треугольной матрицы равен ….

32. Найти определители матриц: а) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -14 & 0 & -7 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}$.

33. Разложение определителя $\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ по первой строке имеет вид ….

34. Какие методы вычисления определителей вы знаете?

35. Найти матрицу $\mathrm{C}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}-3\mathrm{B}$, где $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -13 & -17 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$.

36. Вычислить матрицу $\mathrm{D}=(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}}-\mathrm{C}^2$, где $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\mathrm{D}=\begin{pmatrix} 9 & -13 \\ 22 & 9 \end{pmatrix}$.

37. Найти те из произведений матриц AB и BA, которые существуют:

а) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $\mathrm{BA}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\mathrm{AB}=\begin{pmatrix} 29 & -22 \\ 31 & -24 \end{pmatrix}$, $\mathrm{BA}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

38. Найти $\mathrm{P}(\mathrm{A})=3\mathrm{A}^2-2\mathrm{A}+5\mathrm{E}$, где $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$.

39. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Выяснить, какие из следующих опрераций можно выполнять: 1) $A+B$; 2) A^T+B; 3) B^T+A; 4) AB; 5) BA; 6) A^TB; 7) AB^T; 8) A^TB^T; 9) B^TA^T.

Ответ: 4),6),9).

40. Вычислить определители второго порядка: а) $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 7\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta\end{vmatrix}$.

Ответ: а)11; б)13; в) $\sin(\alpha-\beta)$.

41. Вычислить определители третьего порядка по правилу Саррюса и разложением по строке или столбцу: а) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}5 & 6 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 7 & 4 & 5\end{vmatrix}$.

Ответ: а)0; б)1; в) 8.

Занятие 2. Решение системы *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными с помощью формул Крамера и методом Гаусса.

Задания для аудиторной работы:

1. Решить системы с помощью формул Крамера и сделать проверку полученного решения.

а) $\begin{cases}x_1-4x_2-2x_3=-3\\ 3x_1+x_2+x_3=5\\ 3x_1-5x_2-6x_3=-9\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=2\\ x_1+5x_2-4x_3=-5\\ 4x_1+x_2-3x_3+4=0\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=0\\ 3x_2+4x_3+6=0\\ x_1+x_3=1\end{cases}$

2. Решить системы методом Гаусса.

а) $\begin{cases}x_1-4x_2-2x_3=-3\\ 3x_1+x_2+x_3=5\\ 3x_1-5x_2-6x_3=-9\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=2\\ x_1+5x_2-4x_3=-5\\ 4x_1+x_2-3x_3=-4\end{cases}$ в) $\begin{cases}x_1-x_2+x_3-2x_4=0\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4=1\\ 2x_1+x_2+3x_3-7x_4=1\\ x_1+x_2+x_3+x_4=2\end{cases}$.

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля:

1. Как записывается в общем виде система из m линейных уравнений с n неизвестными?

2. Как записывается система из n линейных уравнений с n неизвестными? Как она называется?

3. Решением системы линейных уравнений называется ….

4. Система линейных уравнений называется: а) совместной, если …; б) несовместной, если ….

5. Система линейных уравнений называется: а) неоднородной, если …; б) однородной, если ….

6. Совместная система линейных уравнений называется: а) определенной, если …; б) неопределенной, если ….

7. Запишите квадратную систему уравнений в матричной форме. Дайте названия соответствующим матрицам.

8. Сформулируйте условие, при котором квадратная система линейных уравнений имеет единственное решение.

9. По теореме Крамера квадратная система имеет единственное решение, если …, и это решение находится по формулам ….

10. Выстройте последовательность этапов решения квадратных систем по формулам Крамера.

11. По формулам Крамера решить систему $\begin{cases} x+2y=-1 \\ -3x+z=-2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$. В ответе указать x, y, Δ_z.

Ответ: $x=1, y=-1, \Delta_z=7$.

12. Как записывается матрица системы и расширенная матрица системы?

13. Перечислите элементарные преобразования системы

14. Перечислите элементарные преобразования строк матрицы.

15. Какая матрица называется ступенчатой?

16. Что такое эквивалентные системы.

17. В чем суть метода Гаусса? Опишите алгоритм метода Гаусса.

18. Методом Гаусса решить систему $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+3y+2z=1 \\ -x+2z=3 \end{cases}$ и сделать проверку.

Ответ: $(-1,0,1)$.

Занятия 3,4. Геометрические векторы на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная система координат. Виды уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми.

Задания для аудиторной работы:

1. По сторонам OA и OB прямоугольника OACB отложены единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Выразить через $\vec{i}$ и $\vec{j}$ векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC},$ и $\overrightarrow{BA}$, если $OA=3$ и $OB=4$. Изобразить оси декартовой прямоугольной системы координат, приняв за базис векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$. Записать координаты указанных векторов. Указать какие из этих векторов являются радиус-векторами соответствующих точек.

2. Пусть у прямоугольника OACB из предыдущей задачи M – середина BC и N – середина AC. Записать векторы $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON},$ и $\overrightarrow{MN}$ в координатной форме. Записать координаты точек M и N.

3. Построить точку $A(2;-2;1)$. Определить длину её радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ и найти $\cos\left(\overrightarrow{OA}, \hat{\vec{i}}\right)$.

4. Заданы векторы $\vec{a}(-1;2;0), \vec{b}(3;1;1), \vec{c}(2;0;-4)$ и $\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. Вычислить $|\vec{d}|$.

5. Определить значения параметра t при котором векторы $\vec{a}=\vec{i}+t\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}$ коллинеарны.

6. Построить прямые: а) $2x+7y=14$; б) $2x-7y=0$; в) $2x-6=0$; г) $2y+6=0$.

7. Составить уравнение множества точек равноудаленных от точки A(2;0) и прямой x=4.

8. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(4;2)$, $B(-2;-6)$.

9. Даны точки $A(9;0)$, $B(-3;-5)$, $C(2;4)$. Составить: а) уравнение прямой, проходящей через точки А и С; б) уравнение прямой, проходящей через точку В параллельно прямой АС.

10. Написать уравнение прямой, походящей через точку $A(-3;2)$ с заданным угловым коэффициентом $k=-1$.

11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;1)$ перпендикулярно прямой $x+2y-1=0$ и найти расстояние от точки $M(1;1)$ до этой прямой.

12. Найти m при котором прямые $mx+8y+10=0$ и $2x+my-1=0$ параллельны.

13. Даны прямые $l_1:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-4}{0}$ и $l_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{5}$. Найти точку пересечения прямых.

14. Дан треугольник с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;4)$, $C(4;0)$. Сделать чертеж, записать уравнения прямых, на которых расположены стороны треугольника, его медиана АЕ и высота AD. Найти длину медианы АЕ и высоты AD.

15. Найти тангенс острого угла между прямыми $x+y+2=0$ и $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}=1$. Начертить прямую $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}=1$.

16. Даны прямые $l_1:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-4}{0}$ и $l_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{5}$. Найти угол между прямыми l_1 и l_2.

17. Найти острый угол между прямыми $x-y-2=0$ и $y=2$.

Задания для самостоятельной работы и самоконтроля:

1. Дайте определение вектора.

2. Что называется модулем вектора?

3. Дайте определение коллинеарных и компланарных векторов.

4. Если точки A,B,C принадлежат прямой l, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ являются ….

5. Если точки A,B,C – вершины треугольника, то векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ являются ….

6. Точки A,B,C принадлежат плоскости α. Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ компланарны тогда и только тогда, когда точка D ….

7. Как определяется сумма и разность двух векторов?

8. Как определяется умножение вектора на число?

9. Суммой векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ является вектор ….

10. Вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$ представляется в виде ….

11. Дайте определение угла между векторами.

12. Два вектора называются ортогональными, если угол ….

13. Векторы $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ называются линейно независимыми, если …. Иначе, ….

14. Для того, чтобы векторы $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ были линейно зависимы необходимо и достаточно ….

15. Что такое базис? Приведите пример базиса на плоскости и в пространстве.

16. Как выглядит разложение вектора по базису на плоскости и в пространстве? Что такое координаты вектора?

17. Зависят ли координаты вектора от выбора базиса?

18. Система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называется ортонормированной, если … и обозначается ….

19. Радиус-вектором точки A называется ….

20. Как определяются декартовы координаты точки на плоскости?

21. Чем отличаются координаты двух точек, симметричных относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат?

22. Напишите формулы для координат середины отрезка через координаты его концов.

23. Как вычислить расстояние между двумя точками?

24. Модуль вектора $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ через его координаты определяется равенством ….

25. Что можно сказать о координатах равных векторов?

26. Как связаны координаты двух коллинеарных векторов?

27. Как найти координаты вектора, заданного координатами точек–начала и конца этого вектора?

28. Даны точки $A(-2;1;3)$ и $B(2;0;4)$. Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ равен ….

29. Даны точки *A (-1;2;4)* и *O(0;0;0)* и вектор $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{OA}$. Координаты точки B соответственно равны ….

30. Дана точка $A(2;-1;5)$ и вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j}$. Радиус-вектор точки B равен ….

31. В квадрате $ABCD$ даны вершины $A(1,2)$ и $B(2,3)$. Длина диагонали AC равна ….

32. Даны вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Тогда координаты вектора $2\vec{a} - \vec{b}$ равны ….

33. Даны векторы $\vec{a}(1;1), \vec{b}(-1;1)$. Докажите, что они образуют базис. Разложение вектора $\vec{c}(0;1)$ по базису из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет вид ….

34. Векторы $\vec{a} = \vec{i} + t\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$ коллинеарны, если t равно ….

35. Точки $A(3,-5)$, $B(-3,x)$, $C(9,1)$ лежат на одной прямой, если x равно ….

36. Если радиус-векторы точек *A (1;4;3)* и *B (-2;y;-6)* коллинеарны, то координата *y* равна ….

37. Дайте определение уравнения линии на плоскости.

38. Чем отличается уравнение прямой на плоскости в декартовых координатах от уравнения других линий на плоскости?

39. Как найти координаты точки пересечения двух линий на плоскости, заданных своими уравнениями?

40. Какое уравнение прямой на плоскости называется общим? В уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ коэффициенты A и $B -$ это координаты вектора ….

41. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A;B)$, имеет вид ….

42. Как найти точку пересечения двух прямых?

43. Прямые $2x-y+3=0$, $x+y+3=0$, $ax+y-13=0$ будут пересекаться в одной точке при a равном ….

44. Какой вектор называют направляющим вектором прямой?

45. Канонические уравнения прямой на плоскости имеют вид ….

46. Уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,2)$ параллельно оси Oy, имеет вид ….

47. Как называется уравнение прямой $y=kx+b$? Геометрический смысл коэффициента k в уравнении прямой $y=kx+b$ есть ….

48. Геометрический смысл коэффициента b в уравнении прямой $y=kx+b$ есть ….

49. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через начало координат имеет вид ….

50. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$, имеет вид ….

51. Прямая проходит через точку $M(1,2)$ и образует с положительным направлением оси Ox угол $\pi/4$. Уравнение прямой имеет вид ….

52. Прямая, заданная уравнением $Ax+By+C=0$, имеет угловой коэффициент, равный ….

53. Уравнение «в отрезках» для прямой имеет вид ….

54. Геометрический смысл коэффициентов a и b в уравнении $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ есть ….

55. Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, имеет вид ….

56. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ и начало координат, имеет вид ….

57. Дайте определение угла между двумя прямыми на плоскости.

58. Угол между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ можно вычислить по формуле ….

23. Угол между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ определяется по формуле ….

59. Прямые $x-y+1=0$ и $y=2x+5$ образуют острый угол, тангенс которого равен ….

60. Как выглядит условие параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости?

61. Если прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ перпендикулярны, то их угловые коэффициенты удовлетворяют соотношению ….

62. Прямые $y=kx$ и $y=kx+b$ $(b\neq 0)$ а) параллельны; б) перпендикулярны; в) совпадают; г) образуют острый угол. Выберите правильный ответ.

63. Прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ перпендикулярны, если имеет место соотношение ….

64. Прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ параллельны, если между их коэффициентами имеет место соотношение ….

65. Прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ совпадают, если их коэффициенты удовлетворяют соотношениям ….

66. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно прямой $Ax+By+C=0$, имеет вид ….

67. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно прямой $y=kx+b$, имеет вид ….

68. Даны две точки $P(2,3)$ и $Q(-1,0)$. Уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно к отрезку PQ, имеет вид ….

69. Точка $P(2,3)$ есть основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую. Уравнение этой прямой имеет вид ….

70. Координаты проекции точки $P(-6,4)$ на прямую $4x-5y+3=0$ равны ….

71. Как написать уравнение медианы, высоты в треугольнике на плоскости, если известны координаты его вершин?

72. Что необходимо для определения расстояния от точки до прямой?

73. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ равно ….

74. Составить уравнение множества точек равноудаленных от точек $\mathrm{A}(3,2)$ и $\mathrm{B}(-4,0)$.

Ответ: прямая $14x+4y+3=0$.

75. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $\mathrm{A}(3,-2)$: а) под углом 135° к оси Ox; б) параллельно оси Oy.

Ответ: а) $y=-x+1$; б) $x=3$.

76. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $\mathrm{A}(-5,4)$ и $\mathrm{B}(3,-2)$.

Ответ: $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$.

77. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $\mathrm{A}(2,-1)$, если эта прямая отсекает от положительной полуоси Oy отрезок, вдвое больший, чем от положительной полуоси Ox.

Ответ: $y=-2x+3$.

78. Даны вершины треугольника: $\mathrm{A}(3,5), \mathrm{B}(-3,3), \mathrm{C}(5,-8)$. Составить уравнение медианы, проведенной из вершины C и определить ее длину.

Ответ: $12x+5y-20=0$, 13.

79. Найти угол между прямой $3x+y-6=0$ и прямой, проходящей через точки $\mathrm{A}(-3,1)$ и $\mathrm{B}(3,3)$.

Ответ: 90°.

80. Дана прямая $2x+5y-1=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $\mathrm{M}(-1,3)$: а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.

Ответ: а) $2x+5y-13=0$; б) $5x-2y+11=0$.

81. Две стороны квадрата лежат на прямых $3x+4y+22=0$, $3x+4y-13=0$. Вычислить площадь квадрата.

Ответ: 49 кв.ед.

82. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-3y+5=0$ и $3x+y-7=0$ перпендикулярно прямой $y=2x$.

Ответ: $x+3y-2=0$.

83. Даны вершины треугольника $A(-1,3), B(3,-2), C(5,3)$. Составить уравнения: а) трех его сторон; б) высоты опущенной из вершины C на сторону AB; в) найти длину высоты из пункта б).

Ответ: а) $AB: 5x+4y-7=0$; $BC: 5x-2y-19=0$; $AC: y-3=0$; б) $4x-5y-5=0$; в) $30/\sqrt{41}$.

Раздел 2. Математический анализ

Занятие 5. Предел функции. Раскрытие неопределенности $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$.

Задания для аудиторной работы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+5}{x^2-4}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{7x^2+x-1}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x$. **4.** $\lim\limits_{x\to 0}e^x$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x+3}{10}$. **6.** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{5}{x+1}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x-2x^2+4}{x^2+5x-3}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2+4x}{3x-1}$. **9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5}{6x^4-3x^2+2}$. **10.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{4n+7}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n^4+11}$. **12.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^4+11}{n^3+2n}$.

Задания для самостоятельной работы и самоконтроля:

1. Сформулируйте определение функции. Что называется областью определения функции?

2. Какие способы задания функции Вы знаете?

3. Какие функции называются элементарными?

4. Что такое числовая последовательность? Дайте определение предела числовой последовательности.

5. Дайте определение понятия предела функции.

6. Дайте определение бесконечно малой и бесконечно большой величины. Какая связь между ними?

7. Сформулируйте основные теоремы о пределах.

8. Что такое односторонний предел.

9. Дайте определение непрерывности функции в точке.

10. Чему равен предел элементарной функции в точке принадлежащей ее области определения?

11. Как раскрывается неопределенность $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ в случае отношения многочленов?

12. $\lim\limits_{x\to -1}(2x-3)(x+2)$. Ответ: -5. **13.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{4x^3+7}$. Ответ: 0. **14.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+5}{3x-1}$. Ответ: ∞. **15.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+7x-3}{7-4x^2}$. Ответ: $-1,5$. **16.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^4+11}{n+2}$. Ответ: ∞.

Занятие 6. Предел функции. Раскрытие неопределенности $\left\|\frac{0}{0}\right\|$. Замечательные пределы. Раскрытие неопределенности $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ с помощью следствий из замечательных пределов. Односторонние пределы. Пределы на $\pm\infty$.

Задания для аудиторной работы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+5x+4}{3x+3}$. **3.** $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x+6}{x^2+6x+9}$. **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{3x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}5x}{10x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arc\,tg}2x}{4x}$. **10.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^2x}{4x}$. **11.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin^2 x}$. **12.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{\sin^2 x}$. **13.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{\sin 3x}$. **14.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x}{e^{2x}-1}$. **15.** $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{4}{x-2}$. **16.** $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{4}{x-2}$. **17.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2^{-x}}{1+2^{-x}}$. **18.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3^{-x}}{2+2^{-x}}$.

Задания для самостоятельной работы и самоконтроля:

1. Каков принцип раскрытия неопределенности $\left\|\frac{0}{0}\right\|$, если выражение под знаком предела представляет собой отношение многочленов?

2. Первый замечательный предел.

3. Второй замечательный предел.

4. Что такое эквивалентные бесконечно малые величины? Какие пары эквивалентностей следуют из 1-го и 2-го замечательных пределов? Как их можно использовать при раскрытии неопределенности $\left\|\frac{0}{0}\right\|$?

5. Дайте определение предела на $+\infty$, на $-\infty$.

6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$. Ответ: $0,75$. **7.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$. Ответ: 6. **8.** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-8x+15}{5x-25}$. Ответ: $0,4$.
9. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x-8}{x^2-8x+16}$. Ответ: ∞. **10.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{10x}$. Ответ: $0,5$. **11.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\mathrm{tg}2x}$. Ответ: $1,5$. **12.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 x}{x\cdot\sin x}$. Ответ: 1. **13.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\mathrm{arctg}x^2}$. Ответ: 2. **14.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+3x)}$. Ответ: $\frac{2}{3}$. **15.** $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{3}{x-1}$. Ответ: $+\infty$. **16.** $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{3}{x-1}$. Ответ: $-\infty$. **17.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2^{-x}}{1+2^{-x}}$. Ответ: 0.

Занятия 7, 8. Производная. Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции. Дифференциал. Производная 2-го порядка.

Задания для аудиторной работы:

1. Найти производные заданных функций применяя основные правила дифференцирования: а) $y = 6\cos x + 5x - 7$; б) $y = \sqrt[3]{x} - 2\ln x + \frac{1}{x}$; в) $y = e^x \cdot \arcsin x$; г) $y = \frac{2^x}{x^2}$; д) $y = \mathrm{ctg}x \cdot \left(\sin x - \sqrt[5]{x^2}\right)$; е) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{7\sqrt[3]{x}} - 1 + \frac{2}{3x^3}$; ж) $y = \frac{e^x + \mathrm{tg}x}{\log_2 x}$.

2. Найти производные заданных функций применяя формулу производной сложной функции: а) $y = 2\cos(2x) + \sin^2 x$; б) $y = \ln(x^2 + \mathrm{tg}x)$; в) $y = \sqrt{x+1}\cdot e^{\mathrm{tg}x}$; г) $y = \frac{\arccos\sqrt{x}}{\mathrm{arctg}(3x)}$.

3. Найти дифференциалы функций: а) $y = \sqrt[3]{x}\cdot e^{2x}$; б) $y = \frac{\sqrt{2x+1}}{\mathrm{tg}3x}$.

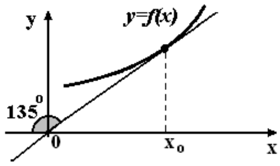
4. Найти производные второго порядка от заданных функций: а) $y = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$; б) $y = \dfrac{x^3}{1+x^2}$; в) $y = \ln\sqrt{x}$.

Задания для самостоятельной работы и самоконтроля:

1. Что называется производной функции?

2. Сформулируйте геометрический и физический смысл производной.

3. График функции *y=f(x)* изображен на рисунке.



Тогда значение производной этой функции в точке x_0 равно ….

Ответ: 1.

3. Могут ли производные от двух функций быть равными между собой?

4. Каковы правила вычисления производных от суммы, произведения, частного двух функций?

5. Сформулируйте правило вычисления производной сложной функции.

6. Что называется дифференциалом функции?

7. Чем отличается дифференциал функции от ее приращения?

8. Что означает запись $\dfrac{dy}{dx}$?

9. Что означает запись y''?

10. Найти производные заданных функций: а) $y = \frac{1}{3}\sin x - 2x + 1$; б) $y = \sqrt[3]{x^4} - 2\lg x + \frac{1}{x^3}$; в) $y = 2^x \cdot \arccos x$; г) $y = \frac{3^x}{x^3}$; д) $y = \mathrm{tg}x \cdot \left(\cos x + \sqrt{x}\right)$; е) $y = \frac{1}{210}x^{210} - \frac{4}{7\sqrt[6]{x}} - 1 + \frac{2}{3x}$; ж) $y = \frac{-e^x - \mathrm{ctg}x}{\log_3 x}$; з) $y = \frac{1+x^2+\ln x}{\mathrm{arctg}x}$.

Ответ: а) $y' = \dfrac{1}{3}\cos x - 2$; б) $y' = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \dfrac{2}{x\ln 10} - \dfrac{3}{x^4}$; в) $y' = 2^x \cdot \left(\ln 2 \cdot \arccos x - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; г) $y' = \dfrac{3^x\left(x\ln x - 3\right)}{x^4}$; д) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \left(\cos x + \sqrt{x}\right) + \mathrm{tg}x \cdot \left(-\sin x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$;

е) $y' = x^{209} + \dfrac{2}{21\sqrt[6]{x^7}} - \dfrac{2}{3x^2}$; ж) $y' = \dfrac{\left(-e^x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) \cdot \log_3 x + \left(e^x - \mathrm{ctg}x\right) \cdot \dfrac{1}{x\ln 3}}{\left(\log_3 x\right)^2}$;

з) $y' = \dfrac{\left(2x + \dfrac{1}{x}\right) \cdot \mathrm{arctg}x - \dfrac{1+x^2+\ln x}{1+x^2}}{\mathrm{arctg}^2 x}$.

11. Найти производные заданных функций применяя правило вычисления производной сложной функции: а) $y = 4\cos x^2 - 5\cos^2 x$; б) $y = \ln\left(\sin x + 2\sqrt{x}\right)$; в) $y = \sqrt{5-x} \cdot e^{\mathrm{ctg}x}$; г) $y = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\mathrm{arcctg}(2x)}$.

Ответ: а) $y'=-8x\cdot\sin x^2+5\sin 2x$; б) $y'=\dfrac{\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sin x+2\sqrt{x}}$; в) $y'=-e^{\operatorname{ctg}x}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}+\dfrac{\sqrt{5-x}}{\sin^2 x}\right)$; г) $y'=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\operatorname{arcctg}(2x)+\dfrac{2\arcsin\sqrt{x}}{1+4x^2}}{\operatorname{arcctg}^2 2x}$.

12. Найти дифференциалы функций: а) $y=\sqrt[3]{x^5}\cdot e^{-4x}$; б) $y=\frac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}}$.

Ответ: а) $dy=e^{-4x}\left(\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x^5}\right)dx$; б) $dy=\dfrac{9x+12x^2-3x^3}{2\sqrt{\left(x^3+3x-2\right)^3}}dx$.

13. Найти производные второго порядка от заданных функций: а) $y=2x^3-x^2+3x-14$; б) $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$; в) $y=e^{\sqrt{x}}$.

Ответ: а) $y''=12x-2$; б) $y''=\dfrac{2+6x^2}{\left(1-x^2\right)^3}$; в) $y''=\dfrac{1}{4}e^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\right)$.

Занятие 9. Исследование функции. Правило Лопиталя.

Задания для аудиторной работы:

1. Найти область определения функции: а) $y=\sqrt{16-x^2}+\ln(x-4)$; б) $y=4/(x-2)^2$; в) $y=x/(x^2+5x+4)$.

2. Найти точки экстремума функций: а) $y=x^3+2x^2-7x+4$; б) $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}$.

3. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций: а) $y=2x^3-3x^2+15$; б) $y=x^3-6x^2$.

4. Найти асимптоты графиков функций: а) $y=\dfrac{3-4x}{2+5x}$; б) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; в) $y=\dfrac{3x^5}{2+x^4}$.

5. Исследовать функции и построить их графики: а) $y=x^3-12x^2+36x$; б) $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

6. Найти пределы с помощью правила Лопиталя: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{\sin^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{x^3}$.

Задания для самостоятельной работы и самоконтроля:

1. Сформулируйте определение функции. Что такое область определения функции?

2. Найти область определения функции: а) $y=\sqrt{6x-x^2}+\ln(x-3)$; б) $y=4x/(x+1)^2$; в) $y=4/(x^2+2x-3)$.

Ответ: а) $D(f)=\{x|x\in(3,6]\}$; б) $D(f)=\{x|x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)\}$; в) $D(f)=\{x|x\in(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(-1,+\infty)\}$.

3. По определению функция называется убывающей (возрастающей) на (a,b), если….

4. Сформулируйте достаточное условие возрастания (убывания) функции на (a,b).

5. Докажите, что функция $y=\cos x-x$ убывает на любом промежутке.

6. Дайте определение точки экстремума.

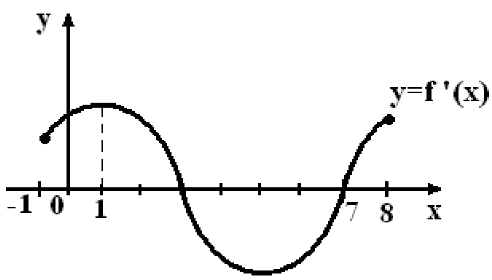
7. Сформулируйте необходимые условия экстремума.

8. Сформулируйте достаточные условия существования экстремума функции.

9. Приведите пример, показывающий, что обращение в нуль производной не является достаточным условием экстремума функции.

10. Сформулируйте правила нахождения экстремумов функции.

11. На рисунке изображен график производной функции y=f(x), заданной на отрезке [–1; 8].



Укажите точки максимума и минимума этой функции.

Ответ: $x=3-$точка максимума, $x=7-$точка минимума.

12. Найти точки экстремума функций: а) $y=12x-x^3$; б) $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$.

Ответ: а) $y_{min}=y(-2)=-16$, $y_{max}=y(2)=16$; б) $y_{min}=y(-3)=6$, $y_{max}=y(-1)=2$.

13. Дважды дифференцируемая функция $y=f(x)$, $x\in(a,b)$, выпукла вверх, если на (a,b) …

14. Дважды дифференцируемая функция $y=f(x)$, $x\in(a,b)$, выпукла вниз, если на (a,b)….

15. Сформулируйте необходимое условие существования точки перегиба.

16. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции $y=0,5x^3+3x^2-18x+20$.

Ответ: $(-\infty,-2)-$график функции выпуклый вверх, $(-2,\infty)-$график функции выпуклый вниз, т.$M(-2,64)-$точка перегиба графика функции.

17. Дайте определение асимптоты кривой. Как найти вертикальные и наклонные асимптоты графика функции?

18. Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$, то $x=a$ является уравнением ……асимптоты.

19. Установите соответствие $(k,a,b,c-\text{числа})$

Вид асимптоты	Уравнения асимптот
1. Наклонная 2. Вертикальная 3. Горизонтальная	А. $x=a$ Б. $y=kx^2+b$ В. $y=kx+b$ Г. $y=c$ Д. $x=by^2+c$

Ответ: 1. В, 2.А, 3. Г.

20. Установите соответствие

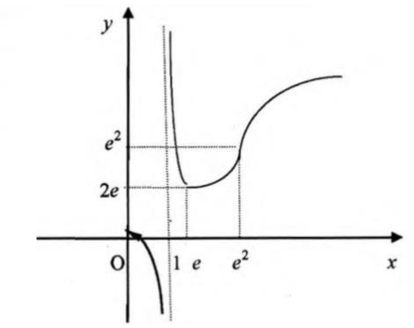
Параметры уравнения наклонной асимптоты $y=kx+b$	Формулы для вычисления k и b
1. k 2. b	А. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{f(x)}$ Б. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-kf(x)\right]$ В. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ С. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]$ Д. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$

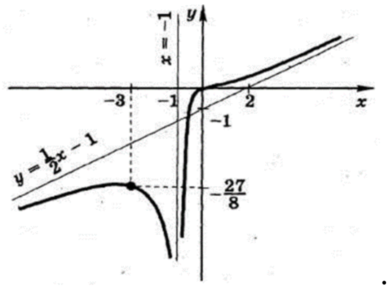
Ответ: 1. В, 2. Д.

21. Найти асимптоты графика функции $y=\frac{2x^2-9}{x+2}$.

Ответ: $x=-2-$вертикальная асимптота, $y=2x-4$ при $x\to\pm\infty-$наклонная асимптота.

22. Исследовать функции и построить их график: а) $y=x/\ln\sqrt{x}$; б) $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Ответ: а) 

б) 

.

23. Найти пределы с помощью правила Лопиталя: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\ln(x-\pi/2)}{\mathrm{tg}x}$.

Ответ: а) 2; б) 0.

Занятия 10, 11. Неопределенный интеграл. Простейшие приемы интегрирования. Внесение под дифференциал. Метод интегрирования по частям.

Задания для аудиторной работы:

1. Найти интегралы используя свойства и таблицу: а) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx$; б) $\int\left(5e^{x}-\cos x\right)dx$;

в) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x^2}-\sin x\right)dx$; г) $\int\left(\frac{1}{x^3}-3^{x}\right)dx$; д) $\int\frac{dx}{4+x^2}$; е) $\int\frac{dx}{9-x^2}$.

2. Найти интегралы, применяя элементарные тождественные преобразования:

а) $\int(1-x)\cdot(1+x)dx$; б) $\int\frac{1-x^2}{1+x}dx$; в) $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$; г) $\int\frac{x}{x-1}dx$; д) $\int tg^2xdx$.

3. Найти интегралы, пользуясь теоремой об инвариантности формул интегрирования:

а) $\int\cos 2x\,d(2x)$; б) $\int e^{\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right)$; в) $\int(3x+7)^{10}d(3x+7)$; г) $\int\sin 3x\,dx$; д) $\int(2x+3)^6dx$;

е) $\int e^{-\frac{x}{3}}dx$; ж) $\int\frac{dx}{2x+3}$; з) $\int tgx\,dx$; ж) $\int\sin x\cos^2 x dx$; з) $\int\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$.

4. Найти интегралы применяя метод интегрирования по частям: а) $\int(2x-1)\cdot e^{-2x}dx$;

б) $\int(3x+1)\cdot\sin\frac{x}{2}dx$.

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля:

1. Как связана первообразная с производной?

2. Приведите пример функции имеющей первообразную.

3. Пусть $f(x)=\sin x+2$, а $F_1(x)=-\cos x+2x$; $F_2(x)=\cos x$; $F_3(x)=-\cos x+2x+6$. Тогда первообразной для функции $f(x)$ является: а) только $F_1(x)$; б) только $F_2(x)$; в) $F_1(x)$ и $F_2(x)$; г) $F_1(x)$ и $F_3(x)$.

Ответ: г.

4. Чем первообразная отличается от неопределенного интеграла?

5. Перечислите свойства неопределенного интеграла.

6. Что такое непосредственное интегрирование?

7. Найти интегралы используя свойства и таблицу: а) $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x}\right)dx$; б) $\int\left(3e^{x}+\sin x\right)dx$; в) $\int\left(\frac{1}{x^2}+2^{x}\right)dx$; г) $\int\frac{dx}{9+x^2}$; д) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Ответы: а) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+2\ln|x|+C$; б) $3e^{x}-\cos x+C$; в) $-\frac{1}{x}+\frac{2^{x}}{\ln 2}+C$ г) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$; д) $\arcsin\frac{x}{3}+C$.

8. Найти интегралы, применяя элементарные тождественные преобразования:

а) $\int(2-x)\cdot(2+x)dx$; б) $\int\frac{1-x^2}{1-x}dx$; в) $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx$; г) $\int ctg^2xdx$.

Ответы: а) $4x-\frac{x^3}{3}+C$; б) $x+\frac{x^2}{2}+C$; в) $-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C$; г) $-ctgx-x+C$.

9. Сформулируйте теорему об инвариантности формул интегрирования.

10. Найти интегралы, пользуясь теоремой об инвариантности формул интегрирования: а) $\int \sin 2x\, d(2x)$; б) $\int e^{-\frac{x}{3}} d\left(-\frac{x}{3}\right)$; в) $\int (x+5)^{10} d(x+5)$; г) $\int \cos 2x\, dx$; д) $\int (5x+3)^4 dx$;

е) $\int e^{-x} dx$; ж) $\int \frac{dx}{x-2}$; з) $\int \mathrm{ctg}x\, dx$.

Ответы: а) $-\cos 2x + C$; б) $e^{-\frac{x}{3}} + C$; в) $\frac{(x+5)^{11}}{11} + C$; г) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$;

д) $\frac{1}{25}(5x+3)^5$; е) $-e^{-x} + C$; ж) $\ln|x-2| + C$; з) $\ln|\sin x| + C$.

11. В чем суть метода замены переменной?

12. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям для неопределенного интеграла.

13. Если под знаком интеграла стоит многочлен $P_n(x)$ умноженный на одну из функций $\cos kx, \sin kx, e^x, a^x$ $\left(\int P_n(x)\cdot\begin{Bmatrix}\cos kx\\ \sin kx\\ e^x\\ a^x\end{Bmatrix}dx\right)$, то за u берем…..

14. Вычислить интегралы применяя метод замены переменной (а, б) и метод интегрирования по частям (в, г): а) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$, $\left(e^x = t\right)$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$, $\left(x = t^2\right)$; в) $\int x\cdot\cos x dx$;

г) $\int (3x+1)\cdot e^{3x} dx$

Ответы: а) $\mathrm{arctg}\left(e^x\right) + C$; б) $2\left(\sqrt{x} + \ln\left|\sqrt{x}\right| - 1\right) + C$; в) $x\sin x + \cos x + C$; г) $xe^{3x} + C$.

Занятие 12. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Некоторые приложения определенного интеграла.

Задания для аудиторной работы:

1. Вычислить интегралы с помощью формулы Ньютона–Лейбница: а) $\int_1^3 x^3 dx$; б) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$;

в) $\int_1^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$; г) $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{4+x^2}$; д) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$; е) $\int_0^3 e^{x/3} dx$; ж) $\int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 0, y = 4 - x^2$; б) $y = 1 - x, y = -x^2 + x + 4$; в) $4y = x^2, y^2 = 4x$; г) $y^2 = x + 1, x = 3$;

д) $y = x^3 - 1$, $x = 0$, $y = x - 5$, $x = 2$.

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля:

1. Что такое определенный интеграл?

2. Каков геометрический смысл определенного интеграла?

3. Сформулируйте свойство линейности определенного интеграла. Какие еще свойства Вы знаете?

4. Запишите формулу Ньютона–Лейбница.

5. В чем состоит способ подстановки для вычисления определенного интеграла?

6. Вычислить интегралы с помощью формулы Ньютона–Лейбница: а) $\int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; в) $\int\limits_1^2 \left(x - \frac{1}{x^2}\right)dx$; г) $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4x dx$; д) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{2x+1}$.

Ответ: а)21/8; б) $\pi/6$; в) 3; г)1/2; д) $\frac{1}{2}\ln 2$;

7. Как выглядит формула замены переменой в определенном интеграле?

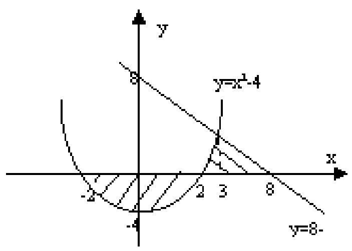
8. Как выглядит формула интегрирования по частям определенного интеграла?

9. Вычислить интегралы применяя подстановку (а, б) и метод интегрирования по частям (в, г): а) $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$, $\left(e^x = t\right)$; б) $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$, $\left(x = t^2\right)$; в) $\int\limits_0^{\pi/2} x \cdot \cos x dx$; г) $\int\limits_0^1 (3x+1) \cdot e^{3x} dx$

Ответ: а) $\operatorname{arctg} e - \pi/4$; б) $2(1+\ln 2)$; в) $\frac{\pi}{2} - 1$; г) e^3.

10. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла? Какие еще приложения определенного интеграла вы знаете?

11. Площадь заштрихованной фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4$, $y = 8 - x$ равна…



Ответ: $\int\limits_3^8 (8-x)dx - \int\limits_{-2}^{2} \left(x^2 - 4\right)dx + \int\limits_2^3 \left(x^2 - 4\right)dx$.

12. Вычислить площади плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x+2$, $y = 2x - \frac{x^2}{2} + 6$; б) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$; в) $y = 0$, $y = 6x - x^2$;

г) $y = x^3 + 3$, $x = 0$, $y = x - 1$, $x = 2$; д) $y^2 = 1 - x$, $x = -3$

Ответ: а) 18 (кв.ед.) ; б) 8/3 (кв.ед.); в) 36 (кв.ед.); г) 10 (кв.ед.); д) 32/3 (кв.ед.).

Раздел 3. Теория вероятностей и математическая статистика

Занятия 13, 14. Элементы комбинаторики. Классическая вероятность.
Задания для аудиторной работы:

1. Сколько существует способов приобрести кассовый аппарат, если в продаже есть 5 видов различных кассовых аппаратов производства Белоруссии, 4 – производства США, 3 – производства Китая и 2 – производства Германии.

2. В конкурсе на лучший проект экономического развития некоторой отрасли производства принимают участие 7 коллективов. Сколькими способами могут быть распределены между ними первое, второе и третье места?

3. Предприятие выпускает 25 наименований продукции. Сколько существует способов выбрать 3 различных наименования продукции для презентации на выставке?

4. Сколько может быть составлено различных трехзначных кодов из десяти цифр от 0 до 9, если цифры в коде не повторяются? А если цифры в коде могут повторяться?

5. Фирма закупила четыре различные партии товара. Сколькими способами можно распределить эти партии среди 12 фирменных магазинов, так, чтобы ни один магазин не получил более одной партии нового товара?

6. У мамы 4 яблока и 3 груши. Каждый день в течении недели она дает ребенку по одному фрукту. Сколькими способами это можно сделать?

7. На полке стоят 8 учебников. Сколькими способами можно поставить эти книги, так чтобы учебники по математическому анализу, линейной алгебре и аналитической геометрии стояли рядом?

8. В партии 10 деталей из них 4 с дефектом. Сколькими способами можно выбрать 3 детали, что бы среди них были 2 детали, удовлетворяющие стандарту и одна деталь с дефектом. Детали выбираются без возвращения.

9. Брошены три монеты. Найти вероятности событий A = {первая монета выпала гербом вверх}, B = {выпало ровно два герба}, C = {выпало не более двух гербов}.

10. Подбрасываются две занумерованные игральные кости. Найти вероятность событий: A = {сумма выпавших на костях очков четна}, B= {число очков на 1-ой кости меньше чем на 2-ой}.

11. Буквы в слове «крыса» наудачу переставили. Чему равна вероятность того, что получилось слово «рысак»?

Ответ: 1/120.

12. Слово «СТАТИСТИКА» составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки перемешивают и наудачу раскладывают в ряд. Найти вероятность того, что вновь получится слово «СТАТИСТИКА».

13. Флаг составлен из 13 горизонтальных полос красного, голубого и белого цветов. Какова вероятность что в наудачу полученном флаге соседние полосы имеют разные цвета?

14. В 15 пакетиках находится пыльца, собранная с 15 цветков гороха, из которых 5 красные, а остальные белые. Наудачу выбирают 2 пакетика. Какова вероятность того, что в обоих пакетиках пыльца одноцветных цветов?

15. На ферме из 12 коров 3 больные. Какова вероятность того, что из 4 наудачу отобранных 1 больная?

16. Шесть различимых шаров размещаются наугад в трех различимых урнах. Найти вероятность событий: а) в каждой урне окажется по два шара; б) одна из урн окажется пустой; в) в двух урнах окажется по три шара.

17. Из колоды карт вынули 4 туза и 4 короля. Эти карты перемешали и разложили в ряд. Какова вероятность того, что все 4 короля окажутся расположенными рядом?

18. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0.9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля:

1. Что такое комбинаторика?

2. Сформулируйте основные правила комбинаторики.

3. Сколько существует способов провести воскресный вечер, если выбирать между посещением театра, дискотеки, ресторана, кинотеатра, считая, что территориально удобно расположены 5 театров, 4 дискотеки, 6 ресторанов и 3 кинотеатра?

Ответ: 18.

4. На третьем курсе изучаются девять предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на один день, если в учебный день разрешается проводить занятия только по четырем разным предметам?

Ответ: 3024.

5. Что называется сочетанием. Как посчитать число сочетаний из n элементов по k элементов?

6. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти?

Ответ: 10.

7. В цехе работают 12 человек: 5 женщин и 7 мужчин. Сколькими способами можно сформировать бригаду из 7 человек, чтобы в ней было 3 женщины.

Ответ: 350.

8. Что называется размещением? Как посчитать число размещений из n элементов по k элементов?

9. Сколько различных трехцветных полосатых флагов можно сшить, если имеется материал пяти различных цветов?

Ответ: 60.

10. Что такое перестановка? Чему равно число перестановок из n элементов?

11. Сколькими способами 5 студентов могут занять 5 должностей в студенческом самоуправлении?

Ответ: 120.

12. Какие схемы выбора вы знаете? Сколькими способами можно осуществить выбор в каждой из этих схем?

13. Дайте определение случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Запишите ПЭИ для случайного эксперимента, состоящего в подбрасывании двух различимых монет, на сторонах которых «герб» и «решка». Два раза бросают игральную кость.

14. Дайте определение случайного события. Приведите примеры событий для экспериментов из **13.**

15. Дайте определение достоверного и невозможного события. Приведите пример таких событий для экспериментов из **13.**

16. Какие события называют противоположными? Приведите пример таких событий для экспериментов из **13.**

17. В урне находится 20 пронумерованных шаров (номера от 1 до 20). Случайным образом вынимается один из них. Определите какие из следующих событий являются достоверными, невозможными, противоположными: достали шар с четным номером (событие A), достали шар с нечетным номером (событие B), достали шар без номера (событие C), достали шар с номером 2 (событие D).

18. Дайте определение равновозможных событий. Являются ли равновозможными событиями выпадение «2-ух» и «3-ех» очков на симметричной игральной кости?

19. Что называется полной группой событий?

20. Приведите классическое определение вероятности.

21. Перечислите основные свойства вероятности.

22. Готовясь к докладу, студент выписал из книги цитату, но, забыв номер страницы, на которой она находится, написал его наудачу. Какова вероятность того, что студент записал нужный номер, если он помнил, что номер выражается двузначным числом с различными числами?

Ответ: 1/81.

23. Среди 20 мышат 5 карликовых, т.е. прекращающих расти к концу второй недели. Наудачу выбрали 5 мышат. Найдите вероятность того, что: а) все 5 мышей карликовые; б) 2 из них карликовые.

Ответ: а) $\frac{1}{C_{20}^5}$; б) $\frac{C_5^2 \cdot C_{15}^3}{C_{20}^5}$.

24. В денежно - вещевой лотерее на серию в 100 билетов приходится 12 денежных и 8 вещевых выигрышей. Чему равна вероятность того, что из трех купленных билетов хотя бы два окажутся выигрышным?

Ответ: $\frac{C_{20}^2 \cdot 80 + C_{20}^3}{C_{100}^3}$.

25. Из букв слова «ТРЕУГОЛЬНИК» наугад составляется пятибуквенное слово. Найти вероятность событий: H={получится слово «УГОЛЬ»}, G={слово состоит из одних согласных букв (включая мягкий знак)}.

Ответ: $P(H) = \frac{1}{A_{11}^5}$, $P(G) = \frac{A_7^5}{A_{11}^5}$.

26. В коробке находится шесть одинаковых по форме и близких по диаметру сверл. Случайным образом сверла извлекаются из коробки. Какова вероятность того, что сверла извлекутся в порядке возрастания их диаметра?

Ответ: 1/720.

27. В спортивной сумке 5 теннисных мячей и 3 мячей для гольфа. Из нее наугад два раза извлекают по одному мячу. Найти вероятность того, что оба извлеченных мяча одинакового типа, если первый мяч в сумку: а) возвращают; б) не возвращают.

Ответ: а) $\frac{5^2 + 3^2}{8^2}$; б) $\frac{A_5^2 + A_3^2}{A_8^2}$.

28. Что такое статистическая устойчивость? Дайте статистическое определение вероятности случайного события.

29. При стрельбе была получена частота попадания 0,6. Сколько было сделано выстрелов, если получено 12 промахов?

Ответ: n = 30.

30. Отдел технического контроля обнаружил 6 бракованных деталей в партии из случайно отобранных 60 деталей. Найти относительную частоту появления брака.
Ответ: 0,1.

31. Метеорологические наблюдения в течении 10 лет в некоторой местности показали, что число дождливых дней в июле было в разные года равно: 2; 4; 3; 2; 4; 3; 2; 3; 5; 3. Определить вероятность того, что какой-либо определенный день июля будет дождливым.
Ответ: 0,1.

Занятие 15. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Задания для аудиторной работы:

1. Потребитель может увидеть рекламу определенного товара по телевидению (событие А), на рекламном стенде (событие В) и прочесть в газете (событие С). Что означает событие $(A + B) \cdot \overline{C}$?

2. Если событие А–он не пришёл на встречу, событие В–она не пришла на встречу, тогда что означает событие С=А+В? $\overline{C} =$? (через произведение).

3. Рабочий изготовил три различных детали. Каждая деталь может быть либо годной, либо бракованной. Построить пространство элементарных исходов. Из каких элементарных исходов состоят следующие события: A = {первая изготовленная деталь–годная}, B= {изготовлено две годные детали}, C= {изготовлено не более одной годной детали}, D= {первая и последняя детали разного качества}, E= {две «соседние» детали разного качества}. Являются ли совместными события A и D? D и E?

4. Образуют ли полную группу событий следующие события: а) испытание: бросание монеты, события: А1 – появление герба, А2 – появление решки. б) испытание: бросание двух монет, события: В1 – появление двух гербов, В2 –появление двух решек. в) испытание: два выстрела по мишени, события: С1 – одно попадание, С2 – два попадания, С0 – ни одного попадания. г) испытание: два выстрела по мишени, события: D1 – хотя бы одно попадание, D2 – хотя бы один промах.

5. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с первого, пять со второго, семь с третьего и четыре с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или с третьего склада?

6. Покупатель может приобрести акции трех компаний: А, В и С. Надежность первой компании оценивается экспертами на уровне 90%, второй – 95% и третьей – 85%. Чему равна вероятность того, что все три компании обанкротятся?

7. Вероятность повреждения кочанов капусты при погрузке равна 0,05; вероятность повреждения при транспортировке равна 0,02; вероятность повреждения при разгрузке– 0,04. Найти вероятность того, что кочаны капусты будут доставлены в овощехранилище без повреждений.

8. В первой урне находятся три белых, пять красных и семь синих шаров, во второй урне – два белых, четыре красных и девять синих шаров. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что извлечённые шары будут: а) одного цвета; б) разных цветов.

9. В магазине имеются 10 женских и 6 мужских дубленок. Для анализа качества отобрали три дубленки случайным образом. Определить вероятность того, что среди отобранных дубленок окажутся: а) только женские шубы; б) только мужские или только женские шубы.

10. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру любой масти или карту пиковой масти (фигурой называются валет, дама или король)?

11. Для сигнализации об утечке газа установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при утечке газа сработает первый сигнализатор, равна 0,96, вероятность для второго сигнализатора–0,92. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

12. Из 30 учащихся спортивной школы 12 человек занимаются баскетболом, 15– волейболом, 5–баскетболом и волейболом, а остальные–другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только баскетболом или только волейболом?

13. В университете 60% студентов первого курса написали входное тестирование по математике без троек. Известно, что 40% студентов являются медалистами, а 20% студентов– медалисты, написавшие тест без троек. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный студент является медалистом, написавшим тест без троек?

14. Две производственные установки связаны единым технологическим циклом. Вероятность выхода из строя одной из них зависит от того, в каком состоянии находится другая. Вероятность того, что первая установка не выйдет из строя равна 0,8. Условная вероятность того, что выйдет из строя вторая установка, равна 0,6 при условии, что выйдет из строя первая. Найти вероятность того что, хотя бы одна из установок не выйдет из строя.

15. Решить предыдущее задание, при условии, что установки не связаны единым циклом, т.е. работают независимо друг от друга.

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение совместных событий. Приведите пример.

2. Какие два события называются несовместными? Приведите пример.

3. Какие события называются попарно несовместными?

4. Дайте определение суммы (объединения) двух событий. Чему равна сумма событий «выпало 2-а очка» и «выпало не менее 3-ех очков» при броске игральной кости?

5. Дайте определение произведения (пересечения) двух событий. Чему равно произведение событий «выпало более 1-го очка» и «выпало менее 3-ех очков» при броске игральной кости? Чему равно произведение несовместных событий?

6. $\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}=?;\ \mathrm{A}\cdot\varnothing=?;\mathrm{A}+\varnothing=?;\ \mathrm{A}+\Omega=?$

7. $\mathrm{P}(\mathrm{A})=0,2.\quad \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)=?$

8. При движении автомобиля под его правые и левые колеса попадают препятствия (выступы и впадины дорожного полотна). Пусть А– событие, состоящее в попадании препятствия под левое колесо, В–под правое. Какой смысл имеют события: а) $\mathrm{A}+\mathrm{B}$; б) $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$; в) $\overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$; г) $\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}}$.

Ответ: а) препятствие попало хотя бы под одно колесо; б) препятствие попало под оба колеса; в) и г) препятствие не попало ни под одно из колес.

9. Что называется условной вероятностью события?

10. На занятии присутствует две группы студентов. В первой группе 15 студентов, из них три отличника, во второй группе 20 студентов, из них четыре отличника. К доске для решения задачи вызван один отличник. Найти вероятность того, что вызван студент из второй группы.

Ответ: 3/7.

11. Из колоды в 36 игральных карт тянут подряд две карты. Известно, что первая вынутая карта–карта червовой масти. Какая вероятность, что вторая вынутая карта–туз?

Ответ: 1/9.

12. Какие события называют независимыми (независимыми в совокупности)?

13. События A и B независимы. Что можно сказать о событиях A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

14. $P(A\cdot B)=?$, если A и B независимые события.

15. Два человека больны заболеванием, для которого коэффициент выздоровления составляет 98%. Найти вероятность того, что они оба выздоровеют.

Ответ: 0,9604.

16. В одном ящике 4 черных и 8 белых шаров. В другом ящике 3 черных и 12 белых шаров. Из каждого ящика наугад извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что оба шара черные.

Ответ: 1/15.

17. $P_B(A)=?$, если A и B независимые события.

18. $P(A\cdot B)=?$, если A и B зависимые события.

19. $P(A+B)=?$, если A и B несовместные события.

20. Какова вероятность выпадения «5» или «6» при однократном бросании игральной кости?

Ответ: 1/3.

21. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с первого, пять со второго, семь с третьего и четыре с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или с третьего склада?

Ответ: 11/20.

22. В урне 6 белых и 8 черных шаров. Взято подряд без возвращения два шара. Какова вероятность, что они одного цвета?

Ответ: 86/182=43/91.

23. $P(A+B)=?$, если A и B совместные события

24. $A, B -$ совместные события, $P(A)=P(B)=0,4$. Чему равна вероятность того, что хотя бы одно из них наступило, если $P(\overline{A}\cdot\overline{B})=0,4$? Чему равна вероятность того, что наступили оба события?

Ответ: 0,6; 0,2.

25. $P(A+B)=?$, если A и B совместные и независимые события.

26. Два человека больны заболеванием, для которого коэффициент выздоровления составляет 98%. Найти вероятность того, что, по крайней мере, один из них выздоровеет.

27. Вероятность повреждения клубней картофеля вследствие уборки его картофелеуборочным комбайном равна 0,02. Вероятность повреждения вследствие транспортировки и разгрузки равна 0,01. Какова вероятность повреждения клубней?
Ответ: 0,0298.
28. На сессии студенту предстоит сдать экзамены по трем предметам. Студент освоил 90% вопросов по первому предмету, 80% – по второму и 60% – по третьему предмету. Какова вероятность, что: а) студент сдаст только один экзамен; б) студент сдаст хотя бы один экзамен?
Ответ: а) 0,116; б) 0,992.
29. Вероятность прижиться саженцу яблони одного сорта равна 0,83, другого−0,7. Найти вероятность того, что из двух саженцев разных сортов: а) хотя бы один не приживется; б) не приживется только один.
Ответ: а) 0,419; б) 0,368.
30. Два игрока поочередно извлекают наудачу по одному шару из урны, в которой находятся два белых и четыре черных шара. После каждого извлечения шар не возвращается в урну. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Вычислить вероятность выигрыша для каждого участника.
Ответ: 0,6 и 0,4.
31. В первой урне находится 2 черных и 3 белых шара, во второй урне−2 белых и 3 черных. Два игрока поочередно вынимают шары без возвращения, каждый из своей урны, до тех пор, пока впервые не появится черный шар. Игрок, вынувший его, считается победителем. Какова вероятность, что выиграет 1-й (2-й) игрок?
Ответ: 0,53; 0,47
32. Из колоды в 52 карты наугад извлекаются две карты, без возвращения. Какова вероятность, что вторая карта пиковой масти, если первая карта пиковой масти? Какова вероятность, что первая карта пиковой масти, если вторая карта пиковой масти? Зависимы ли эти события?
Ответ: 12/51; 0,249; зависимы.

Занятие 16. Схема Бернулли. Асимптотические формулы в схеме Бернулли.
Задания для аудиторной работы:
1. Исследование инкубации яиц яичного кросса Беларусь-9 показало, что цыплята выводятся в среднем из 70% заложенных в инкубатор яиц. Из общего количества заложенных в инкубатор яиц случайным образом отобраны и помечены 6. Найти вероятность того, что из помеченных яиц выведутся: а) менее трех цыплят; б) более трех цыплят; в) не менее трех; г) не более трех.
2. Вероятность того, что в течение рабочего дня произойдет сбой в поставке сырья на производство, равна 0.8. Определить вероятности того, что в течение рабочей недели (5 дней): а) три рабочих дня не будет сбоя в поставке сырья; б) сбой в поставках будет в трех рабочих днях; в) сбой будет менее чем в трех рабочих днях; г) сбой будет не более чем в одном рабочем дне; д) сбоя в поставках не будет ни разу; е) сбой будет хотя бы в одном рабочем дне; ж) сбой будет не менее чем в одном и не более чем в трех рабочих днях.
3. При механизированной уборке картофеля повреждается в среднем 10% клубней. Найти вероятность того, что в случайной выборке из 200 клубней повреждено от 15 до 50 клубней.

4. Опытный участок засеян семенами костра безостного. На одной из делянок этого участка в травостое содержится 0,4% сорных растений. Какова вероятность того, что среди 125 растений этой делянки, отобранных случайным образом, имеются; а) ровно 3 сорных; б) не более трех сорных.

5. При скрещивании двух кормовых сортов люпина во втором поколении теоретически ожидаемым отношением алкалоидных растений к безалкалоидным является отношение 9:7. Найти вероятность того, что среди полученных 150 гибридных растений половина растений будут алкалоидными.

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение схемы Бернулли. Приведите пример.

2. Запишите формулу Бернулли. Поясните смысл входящих в нее величин.

3. Что называется биномиальным распределением вероятностей?

4. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41-го размера, равна 1/4. Чему равна вероятность того, что из четырех покупателей обувь этого размера понадобится двоим?

Ответ: 27/128.

5. Три рекламные фирмы участвуют в тендере. Для каждой из них вероятность получения заказа равна 0,4. Найти вероятность того, что хотя бы одна из трех фирм выиграет тендер.

Ответ: 0,784.

6. В магазине 5 холодильников. Вероятность выхода из строя каждого холодильника в течение года равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение года ремонта потребует: а) 4 холодильника; б) не менее 2 холодильников; в) не более 1 холодильника; г) не менее 1 холодильника; д) хотя бы один холодильник.

Ответ: а) 0,0064; б) 0,2627; в) 0,7373; г) 0,6723; д) 0,6723.

7. Сформулируйте теорему Пуассона для схемы Бернулли. Что называется распределением Пуассона?

8. В вузе обучаются 3650 студентов. Вероятность того, что день рождения студента приходится на определенный день года, равна 1/365. Найти вероятность того, что 10 студентов родилось 1 мая.

Ответ: 0,1251.

9. Сформулируйте локальную теорему Муавра-Лапласа.

10. У клевера красного сорта Пермский местный бывает в среднем 84% позднеспелых растений. Какова вероятность того, что 52 растения из 60 растений клевера, отобранных случайным образом, являются позднеспелыми.

Ответ: 0,1201.

11. Сформулируйте интегральную теорему Муавра-Лапласа.

12. При обследовании уставных фондов банков установлено, что пятая часть банков имеют уставной фонд свыше 100 млн. руб. Найти вероятность того, что среди 1800 банков имеют уставной фонд свыше 100 млн. руб. от 300 до 400 включительно.

Ответ: 0,906.

Занятия 17, 18. Дискретная случайная величина.

Задания для аудиторной работы:

1. На птицефабрике три терморегулятора работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы в течение смены первого терморегулятора равна 0,6. Для второго и третьего терморегулятора эти вероятности равны соответственно 0,8 и 0,9. Найти закон распределения случайной величины X – числа терморегуляторов, бесперебойно работающих в течение смены. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и срднеквадратическое отклонение величины X.

2. В результате обработки данных многолетних наблюдений получены распределения случайных величин X и Y – числа хозяйств в каждом из двух районов области, в которых урожайность яровых зерновых культур может превысить 35 ц/га.

Для первого района области

x_i	1	2	3
p_i	0,1	0,6	0,3

Для второго района области

x_i	0	1
p_i	0,2	0,8

Найти математическое ожидание $M(Z)$ и дисперсию $D(Z)$ случайной величины $Z = X + Y$ двумя способами: 1) исходя из закона распределения Z; 2) используя свойства математического ожидания и дисперсии.

3. В партии 12% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 3 детали. Написать биномиальный закон распределения случайной величины X – числа нестандартных деталей среди трех отобранных. Найти $M(X)$ и $D(X)$. Построить многоугольник распределения.

4. а) задан закон распределения дискретной случайной величины X:

x_i	–2	–1	0	3	6
p_i	0,2	0,1	0,2	p_4	p_5

Найти вероятности p_4 и p_5, дисперсию DX, среднеквадратическое отклонение σ, если $MX = 1,3$.

б) случайная величина X (число кустов смородины, зараженных вирусом, из n посаженных) имеет биномиальное распределение. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста смородины равна p. Найти вероятность $P(3 \le X \le 5)$, если математическое ожидание $MX = 2$, а дисперсия $DX = 1,5$. Найти функцию распределения и построить ее график.

5. Команда состоит из двух стрелков. Числа очков, выбиваемых каждым из них при одном выстреле, являются случайными величинами X и Y, которые характеризуются следующими законами распределения:

x_i	3	4	5
p_i	0,3	0,4	0,3

x_i	2	3	4	5
p_i	0,2	0,1	0,2	0,5

Результаты стрельбы одного стрелка не влияют на результаты стрельбы другого. Составить закон распределения числа очков, выбиваемых командой, если стрелки сделают по одному выстрелу. Убедиться в справедливости равенства $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение дискретной случайной величины (ДСВ). Приведите пример.

2. Охарактеризуйте множество возможных значений ДСВ.

3. Что называется распределением вероятностей ДСВ?

4. Что такое ряд распределения?

5.

x_i	-1	0	1
p_i	$0,5$	p_2	$0,2$

$p_2 - ?$

6. Что называется законом распределения случайной величины X?

7. Какое распределение вероятностей называется биномиальным?

8. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлены три светофора, дающие независимо друг от друга зеленый сигнал в течение 30 с, желтый–в течение 5 с, красный–в течение 25 с. Составьте закон распределения случайной величины $X-$ числа остановок автомобиля.

Ответ:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125

9. Что называется многоугольником распределения? Постройте многоугольник распределения для задания **8.**

10. Дайте определение функции распределения СВ X.

11. $P\{X < 2\} = 0,4,\ F(2) = ?$

12. Запишите формулу для ФР ДСВ X и нарисуйте график взяв для простоты число возможных значений X равным 4.

13. Найдите функцию распределения и вероятность события $P\{X \le 2\}$ для задания **8.**

Ответ: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0,125 & 0 < x \le 1 \\ 0,5 & 1 < x \le 2 \\ 0,875 & 2 < x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$, $P\{X \le 2\} = 0,875.$

14. Сформулируйте свойства ФР ДСВ X.

15. Функция распределения дискретной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 2 \\ 0{,}4, 2 < x \le 5 \\ 0{,}9, 5 < x \le 8 \\ 1, x > 8 \end{cases}.$$

Найти $P(3 \le X < 9)$.

Ответ: 0,6.

15. Какие числовые характеристики СВ вы знаете?

16. Что называется математическим ожиданием ДСВ, каков его вероятностный смысл?

17. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной рядом распределения

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	?	0,4	0,2

Ответ: $M(X) = 2{,}7$.

18. Случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	0	x_2	5
p_i	0.1	0.2	0.7

Найти значение x_2, если $M(X) = 5.5.$

Ответ: 10.

18. Перечислите известные вам свойства математического ожидания.

19. Известно, что X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. Чему равно $M(X)$?

20. Дайте определение дисперсии $D(X)$ случайной величины. Каков ее вероятностный смысл? Назовите свойства дисперсии.

21. Запишите расчетные формулы для вычисления дисперсии ДСВ.

22. Если дискретная случайная величина X принимает три значения: -1, 0, 1 с равными вероятностями, то ее дисперсия $D(X)$ равна а) 1/9; б) 2/9; в) 0; г) 2/3; д) 1/3.

Ответ: г.

23. Что называется средним квадратическим отклонением СВ?

24. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0{,}1$ возможного значения x_1, математическое ожидание $M(X) = 3{,}9$ и дисперсия $D(X) = 0{,}09$. Найти закон распределения этой случайной величины.

Ответ:

x_i	3	4
p_i	0,1	0,9

25. Случайные величины X и Y независимы (объясните что это значит). Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины $Z = 2X - 3Y$, если известно что, $D(X) = 3$,

$D(Y)=2$.

Ответ: $\sqrt{30}$.

26. Найти среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной рядом распределения

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	?	0,4	0,2

Ответ: $\sigma(X)=0,9$.

27. Известно, что X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. Чему равна $D(X)$?

28. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течении смены каждый станок потребует внимания рабочего, равна 0.7. Случайная величина X–число станков, потребовавших внимания рабочего в течении смены. Найти ее дисперсию D(X).

Ответ: D(X)=0,63.

28. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X из задания **8.**

Ответ: $M(X)=1,5$, $D(X)=0,75$.

29. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X – выручка фирмы, Y – затраты:

x_i	3	4	5
p_i	1/3	1/3	1/3

y_i	1	2
p_j	1/2	1/2

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z=X-Y$ (Z– прибыль).

Ответ: $M(X)=2,5$; $D(X)=11/12$.

Занятие 19. Непрерывная случайная величина.

Задания для аудиторной работы:

1. Функция распределения задана в виде $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ Cx^2, 0<x\le 1,\\ 1, x>1.\end{cases}$

Найти: а) параметр *C*; б) плотность распределения; в) математическое ожидание и дисперсию; г) вероятности $P\{X=0,5\}$, $P\{X<0,5\}$, $P\{0,5\le X\le 1\}$.

2. Случайная величина определяется плотностью $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, x\ge 0,\\ 0, x<0.\end{cases}$ Найти $M(X)$, $D(X)$ и $P\{|X|<1\}$.

3. Шкала секундомера имеет цену деления 0,2 с. Отсчет делается с округлением до ближайшего целого деления. Какова вероятность сделать по этому секундомеру отсчет времени с ошибкой, превышающей 0,05 с? Найти $M(X)$, $D(X)$. Ошибка округления $X-$ равномерно распределенная на интервале $(0;0,2)$ случайная величина.

4. Случайная величина X имеет нормальное распределение. Плотность распределения $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x+3)^2}{8}}$. Найти параметр $A, M(X), D(X), P(-2<X<3)$.

5. Ошибка измерения длины платформы станции метро подчинена нормальному закону. Математическое ожидание этой ошибки равно 5см, а среднее квадратичное отклонение равно 10см. Найти вероятность того, что измеряемое значение длины платформы будет отклоняться от истинного не более чем на 20см.

6. Средняя масса годовалого осетра 230 г, среднее квадратичное отклонение 5 г. Полагая, что случайная величина X, равная массе годовалого осетра, распределена нормально, найти: а) вероятность того, что масса наудачу выловленного осетра будет заключена в пределах от 220 г до 240 г; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания окажется меньше 3 г; в) по правилу трех сигм найти наименьшую и наибольшую границы предполагаемой массы годовалого осетра.

7. Расход бензина на 100 км для исправного автобуса – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения со средним, равным 15 кг, и средним квадратическим отклонением, равным 2 кг. На автобазе составлена инструкция, согласно которой, автобус отправляется в ремонт, если при испытании он расходует более 20 кг бензина на 100 км. Найти вероятность отправки в ремонт исправного автобуса. Как надо составить инструкцию, чтобы эта вероятность была 0,01?

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение непрерывной случайной величины (НСВ). Приведите пример.

2. Охарактеризуйте множество возможных значений НСВ.

3. Каким свойством обладает функция распределения НСВ, которым не обладает ФР ДСВ?

4. Приведите определение, вероятностный смысл и свойства плотности распределения вероятностей $f(x)$.

5. Какова связь между $F(x)$ и $f(x)$?

6. Приведите определение математического ожидания НСВ.

7. Приведите определение дисперсии НСВ.

8. Когда НСВ имеет равномерное распределение на (a,b)?

9. Когда НСВ имеет нормальное распределение?

10. Что позволяет осуществить «правило трех сигм»?

11. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, x\le 1,\\ C(x-1)^2, 1<x\le 3,\\ 1, x>3.\end{cases}$

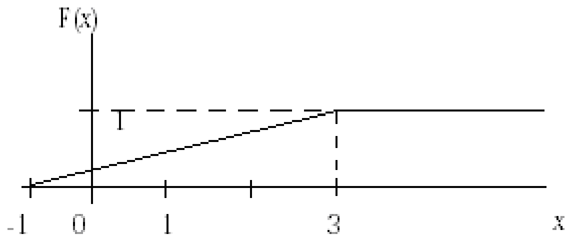
Найти: а) значение параметра C; б) плотность распределения; в) математическое ожидание и дисперсию; г) вероятность $P\{X=0,5\}$, $P\{X<2\}$, $P\{1/2<X<2\}$.

Ответ: а) $C=1/4$; б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{2},\ x\in(1,3);\\ 0,\ x\notin(1,3);\end{cases}$ в) $M(X)=7/3$, $D(X)=2/9$; г) $P\{X=0,5\}=0$, $P\{X<2\}=0,25$, $P\{1/2<X<2\}=0,25$.

12. Цена деления измерительного прибора равна 0,1. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02. Ошибка округления $X-$равномерно распределенная на интервале $(0;0,1)$ случайная величина.

Ответ: 0,6.

13. График функции распределения вероятностей непрерывной случайной величины X**,** имеет вид:



Тогда математическое ожидание X равно?

Ответ: 2.

13. Случайная величина X имеет нормальное распределение. Плотность распределения $f(x)=A\cdot e^{-2x^2}$. Найти параметр $A, M(X), D(X), P(|X|>0,5)$.

Ответ: $A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}, M(X)=0, D(X)=0,25, P(|X|>0,5)=0,3173.$

14. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x+1)^2}{18}}$. Чему равно M (2X - 1)?

Ответ: – 3.

15. Случайная величина распределена по нормальному закону, причем $M(X)=15$.

Известно, что $P(15<X<25.85)=0,485.$ Тогда $D(X)$ равна?

Ответ: 25.

14. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. 1. Найти вероятность того, что цена акции: а) не выше 15,3 ден. ед; б) не ниже 15,4 ден. ед; в) от 14,9 до 15,3. 2) С помощью правила трех сигм найти границы, в которых будет находится текущая цена акции.

Ответ: 1. а) $P(X\le 15,3)=F(15,3)=0,9332$; б) $P(X\ge 15,4)=1-F(15,4)=0,0228$; в) $P(14,9\le X\le 15,4)=0,6246$; 2. $14,4\le X\le 15,6$.

Занятие 20. Выборка и ее представление.

Задания для аудиторной работы:

1. В супермаркете проводились наблюдения над числом *X* покупателей, обратившихся в кассу за один час. Наблюдения в течение 30 часов (15 дней в период с 9 до 10 и с 10 до 11 часов) дали следующие результаты:
70,75,100,120,75,60,100,120,70,60,65,100,65,100,70,75,60,100,100,120,70,75,70,120,65,70,75, 70,100,100. Составить вариационный и статистический ряд.

2. В таблице приведена выборка результатов измерения роста 105 студентов (юношей):

155	170	185	180	188	152	173	178	178	168	185
173	170	183	175	173	170	183	175	180	175	193
178	183	180	197	178	181	187	168	174	179	184
183	178	180	178	163	166	178	175	182	190	167
170	178	183	170	178	181	173	168	185	175	170
155	169	186	179	189	155	174	179	179	169	186
174	171	184	175	193	178	184	180	196	175	181
188	168	179	178	183	184	178	181	177	163	166
178	175	183	190	167	170	178	183	170	178	182
173	168	186	176	171	188					

Измерения проводились с точностью до 1 см. Требуется составить интервальный статистический ряд.

3. По статистическому ряду из **1.** построить выборочную функцию распределения.

4. По интервальному статистическому ряду из **2.** построить кумуляту (график «накопленных относительных частот»).

5. Построить полигон относительных частот по данному статистическому ряду:

x_i	1	4	5	7	9
m_i	10	25	45	20	10

6. Построить гистограмму частот и относительных частот по данному интервальному статистическому ряду:

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	3–5	20
2	5–7	25
3	7–9	15
4	9–11	13
5	11– 13	12
6	13– 15	8
7	15– 17	7

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля:

1. Объясните предмет и перечислите основные задачи математической статистики.

2. В чем суть выборочного метода?

3. Дайте определение генеральной и выборочной совокупности. Что такое объем генеральной совокупности и объем выборки?

4. Дайте определение случайной выборки. Опишите классификацию выборок.

5. Объясните понятие репрезентативности выборки.

6. Что такое статистика?

7. Что такое вариационный ряд?

8. Что такое частота, относительная частота?

9. Что такое статистический ряд?

10. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

x_i	1	2	3	4
n_i	10	9	8	n_4

Найти n_4.

Ответ: $n_4 = 23$.

11. Что такое интервальный статистический ряд?

12. Как определяется рекомендуемое число частичных интервалов?

13. Сколько частичных интервалов можно порекомендовать в случае объема выборки: а) $n = 200$; б) $n = 500$?

Ответ: а) k=8; б) k=9.

14. В городе А для определения сроков гарантийного обслуживания проведено исследование величины среднего пробега автомобилей, находящихся в эксплуатации в течение двух лет с момента продажи автомобиля магазином. Получен следующий результат (тыс. км.):

3,0; 25,0; 18,6; 12,1; 10,6; 18,0; 17,3; 29,1; 20,0; 18,3; 21,5; 26,7; 12,2; 14,4; 7,3; 9,1; 2,9; 5,4; 40,1; 16,8; 11,2; 9,9; 25,3; 4,2; 29,6.

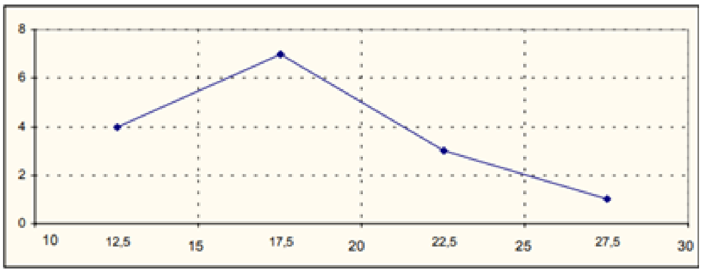
Составить интервальный статистический ряд.

Ответ:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_i < X \leqslant x_{i+1}$	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45
m_i	3	4	5	6	2	4	0	0	1
p_i^*	0,12	0,16	0,20	0,24	0,08	0,16	0	0	0,04

15. Что такое полигон частот, гистограмма, эмпирическая функция распределения выборки, кумулята?

16. Для какой выборки, представленной в виде интервального статистического ряда, построен полигон частот:



а)

Границы интервалов	10-15	15-20	20-25	25-30
Частоты	4	7	3	1

б)

Границы интервалов	0-12,5	12,5-17,5	17,5-22,5	22,5-27,5
Частоты	20	35	15	5

в) нет правильного ответа.

Ответ: а).

17. Как строится гистограмма? О чем она дает представление?

18. Как определяется рекомендуемое число частичных интервалов при построении гистограммы? Запишите формулу Стерджеса.

19. Найти эмпирическую функцию распределения по данному статистическому ряду:

x_i	1	3	7	9	12
m_i	2	10	4	24	10

Ответ:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ 0{,}04, & \text{если } 1 < x \leqslant 3, \\ 0{,}24, & \text{если } 3 < x \leqslant 7, \\ 0{,}32, & \text{если } 7 < x \leqslant 9, \\ 0{,}8, & \text{если } 9 < x \leqslant 12, \\ 1, & \text{если } x > 12; \end{cases}$$

20. Найти кумуляту по данному интервальному статистическому ряду:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i < X \le x_{i+1}$	11–14	14– 17	17–20	20 –23	23– 26	26–29	29– 32	32– 35
m_i	16	24	30	7	8	6	5	4

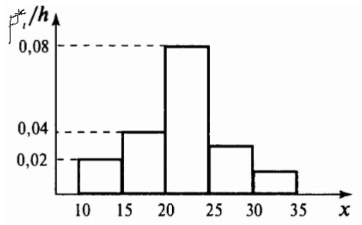
Ответ:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 11, \\ 0{,}16, & \text{если } 11 < x \leqslant 14, \\ 0{,}4, & \text{если } 14 < x \leqslant 17, \\ 0{,}7, & \text{если } 17 < x \leqslant 20, \\ 0{,}77, & \text{если } 20 < x \leqslant 23, \\ 0{,}85, & \text{если } 23 < x \leqslant 26, \\ 0{,}91, & \text{если } 26 < x \leqslant 29, \\ 0{,}96, & \text{если } 29 < x \leqslant 32, \\ 1, & \text{если } x > 32. \end{cases}$$

21. Построить гистограмму относительных частот по наблюдениям:

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	10–15	2
2	15–20	4
3	20–25	8
4	25–30	4
5	30–35	2

Ответ:



22. Статистическим аналогом каких объектов в теории вероятностей являются статистический ряд, эмпирическая функция распределения, полигон и гистограмма?

Занятия 21, 22. Точечные и интервальные оценки числовых характеристик генеральной совокупности.

Задания для аудиторной работы:

1. По статистическим данным распределение магазинов города по годовому товарообороту (млн. руб.) имеет следующий вид:

Товарооборот	Менее 1	1 – 3	3 – 7	7 – 13	13 – 23	23 – 35	Свыше 35
Число магазинов (% к итогу)	35	40	10	6	4	4	1

Найти: средний товарооборот, моду и медиану ряда, размах вариации, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

2. По данному статистическому распределению выборки методом произведений вычислить числовые характеристики выборки: а) выборочную среднюю; б) выборочную и исправленную дисперсию; в) выборочное среднее квадратическое отклонение.

x_i	110	115	120	125	130	135	140
m_i	3	7	11	40	19	12	8

В задачах **3.** и **4.** дано распределение признака X (случайной величины X), полученного по n наблюдениям. Необходимо: 1) построить полигон (гистограмму), кумуляту и эмпирическую функцию распределения X; 2) найти: выборочное среднее, выборочную дисперсию, исправленную дисперсию, с.к.о.

3. X – число задач, решенных абитуриентами на вступительном экзамене (экзаменационный билет по математике содержит 10 задач); n=300 (абитуриентов).

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_i	13	17	15	35	10	9	40	51	45	33	32

4. X –удой коров на молочной ферме за лактационный период (в ц), n=100 (коров).

x_i	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18	18 –20	20–22	22–24	24–26
m_i	1	3	6	11	15	20	14	12	10	6	2

5. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено 10%-ное обследование предприятий одной из отраслей экономики в отчетном году. Результаты обследования представлены в таблице:

Выпуск продукции, млн. руб.	Менее 30	30–40	10–50	50–60	60–70	70–80	80–90	Более 90
Число предприятий	6	9	19	29	20	18	5	2

Найти несмещенные точечные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии.

6. При обследовании выработки 1000 рабочих цеха в отчетном году по сравнению с предыдущим по схеме собственно-случайной выборки было отобрано 100 рабочих. Получены следующие данные:

i	*Выработка в отчетном году в процентах к предыдущему x*	*Частота (количество рабочих) n_i*	*Частость (доля рабочих) $w_i = \frac{n_i}{n}$*
1	94,0—100,0	3	0,03
2	100,0—106,0	7	0,07
3	106,0—112,0	11	0,11
4	112,0—118,0	20	0,20
5	118,0—124,0	28	0,28
6	124,0—130,0	19	0,19
7	130,0—136,0	10	0,10
8	136,0—142,0	2	0,02
	Σ	100	1,00

Определить: а) вероятность того, что средняя выработка рабочих цеха отличается от средней выборочной не более чем на 1% (по абсолютной величине); б) границы, в которых с надежностью 0,9545 заключена средняя выработка рабочих цеха; в) определить объем выборки, при котором с вероятностью 0,9973 отклонение средней выработки всех рабочих цеха не превзойдет 1% (по абсолютной величине).

7. Для поступившей партии пшеницы, с целью определения среднего процентного содержания белка, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено 10-% обследование. Результаты анализа приведены в таблице:

Процент содержания белка	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20
Число проб	6	12	15	24	20	18	5

Найти доверительный интервал, в котором с вероятностью 0.95 заключено среднее процентное содержание белка во всей партии.

Задания для самостоятельной работы и вопросы для самоконтроля:

1. Что такое точечные оценки числовых характеристик генеральной совокупности (параметров распределения)?

2. Перечислите требования к оценкам.

3. Статистическим аналогом какой величины в теории вероятностей является выборочная средняя?

4. Приведите расчетные формулы вычисления выборочной средней для повторной и бесповторной выборок. Чем они различаются?

5. Известен доход по 4 фирмам $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, $x_3 = 9$, $x_4 = 6$. Известна также выборочная средняя по 5 фирмам, равная $\bar{x} = 7$. Доход пятой фирмы равен?

Ответ: 8.

6. Что такое выборочная и исправленная дисперсии? Чем они различаются?

7. Какова несмещенная оценка дисперсии, если рассчитанная по выборке объемом 15 наблюдений выборочная дисперсия равна 28?

Ответ: 30.

8. Приведите расчетные формулы вычисления выборочной и исправленной дисперсий для повторной и бесповторной выборок.

9. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n ($n \ll N$). Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, исправленное среднеквадратическое отклонение.

x_i	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5
n_i	2	18	40	25	6	5	4

Ответ: 11,73; 0,4071; 0,411; 0,641.

10. Некоторое сельхозпредприятие закупило удобрения для повышения урожайности. В таблице приведены результаты выборочного обследования 30 земельных участков площадью по 1га каждый для определения роста урожайности в процентах к предыдущему году. Требуется: а) составить интервальный статистический ряд и построить гистограмму частот; б) найти несмещенные точечные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии.

Результаты выборочного обследования				
117	111	113	108	110
123	122	120	115	104
129	109	102	119	127
115	116	109	96	111
122	100	111	131	113
115	112	107	114	108

Ответ: **:** $\overline{X_в} \approx 112.97$**,** $s^2 \approx 50.46$.

11. Что такое интервальные оценки?

12. Дайте определение понятий доверительного интервала и доверительной вероятности.

13. Доверительный интервал–это…: а) интервал, который покрывает известный параметр распределения, б) интервал, который покрывает неизвестный параметр распределения с надежностью, в) интервал, в котором всегда содержится неизвестный параметр распределения, г) интервал, в который с вероятностью 1 попадает неизвестный параметр распределения.

Ответ: б).

14. Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 10. Тогда доверительный интервал для его оценки может иметь вид: а) (10; 10,9), б) (8,4; 10), в) (8,5; 11,5), г) (8,6; 9,6)?

Ответ: в).

15. Объясните понятие точности оценки.

16. Как осуществляется построение доверительного интервала для оценки генеральной средней при известном и неизвестном среднем квадратическом отклонении?

17. Соотношение $P\left(\bar{x}-(\ldots)\frac{s}{\sqrt{n}}<\bar{x}_0<\bar{x}+(\ldots)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=\gamma$ приближенно оценивает математическое ожидание генеральной совокупности с произвольным распределением при большом объеме выборки. Допишите пропущенный множитель в числителе и объясните его смысл.

Ответ: $u_{(1+\gamma)/2}$ – квантиль стандартного нормального распределения уровня $(1+\gamma)/2$.

18. Как определяется потребный объем выборки для оценки генеральной средней с заданной точностью и надежностью?

19. Объем генеральной совокупности равен 10000, объем выборки 1000. В результате измерения интересующего нас признака получено: $\bar{x}=15{,}5$, $\hat{s}^2=3{,}15$. Найти вероятность того, что среднее значение признака отличается от своей оценки

20. Для исследования доходов населения города, составляющего 20 тыс. человек, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки было отобрано 1000 жителей. Получено следующее распределение жителей по месячному доходу (руб.):

x_i	менее 500	500—1000	1000—1500	1500—2000	2000—2500	свыше 2500
n_i	58	96	239	328	147	132

Необходимо: 1. а) найти вероятность того, что средний месячный доход жителя города отличается от среднего дохода его в выборке не более чем на 45 руб. (по абсолютной величине); б) определить границы, в которых с надежностью 0,99 заключен средний месячный доход жителей города. 2. Каким должен быть объем выборки, чтобы те же границы гарантировать с надежностью 0,9973?

Ответ: 1. а) 0,9715; б) $(1599{,}9;1706{,}1)$ (руб.); 2) 1329.

21. Для поступившей партии яблок, с целью определения средней массы плода, по схеме собственно-случайной бесповторной выборки проведено 10-% обследование. Результаты анализа приведены в таблице. Найти 95%-ный доверительный интервал для оценки средней массы плода яблока во всей партии.

Масса плода	125 − 135	135 − 145	145 − 155	155 − 165	165 − 175	175 − 185	185 − 195
Число проб	4	8	18	38	20	10	2

Ответ: **:** $(157.14; 162.86)$.

5. Условия задач для контрольной работы и примеры выполнения

Тема: элементы линейной алгебры, векторного анализа и аналитической геометрии.

Задачи 1-10. Решение системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными с помощью формул Крамера и методом Гаусса.

В задачах **1-10** требуется решить систему уравнений двумя способами: с помощью формул Крамера и методом Гаусса. После решения системы одним из методов выполнить проверку правильности полученного решения.

Указания. Записать систему уравнений в матричном виде. При вычислении определителей производить подробные выкладки. При вычислении определителей можно воспользоваться так же правилом треугольников (Саррюса). При реализации метода Гаусса указывать в пояснительных скобках проделываемые элементарные преобразования.

1. $\begin{cases} 3x+3y+2z=-1, \\ 2x+y-z=3, \\ x-2y-3z=4. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x+y+2z=-1, \\ 2x-y+2z=-4, \\ 4x+y+4z=-2. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 3x+2y-z=3, \\ x-y+2z=-4, \\ 2x+2y+z=4. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 2x-y-z=4, \\ 3x+4y-2z=11, \\ 3x-2y+4z=11. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y-2z=1, \\ 2x+3y+z=0, \\ x-2y-z=7. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 3x+4y+2z=6, \\ 2x-y-3z=-1, \\ x+5y+z=-1. \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 8x+3y-6z=2, \\ 4x+y-3z=3. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 2x+3y-z=2, \\ x+2y+3z=0, \\ x-y-2z=6. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x-4y-2z=-3, \\ 3x+y+z=5, \\ 3x-5y-6z=-9. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} 3x-2y+2z=3, \\ 2x+y-z=-5, \\ 5x-y+3z=4. \end{cases}$

Примеры выполнения задач 1-10

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 5x+8y+z=2, \\ 3x-2y+6z=-7, \\ 2x+y-z=-5. \end{cases}$ используя формулы Крамера.

Решение. Запишем систему в матричной форме $\|A\cdot X=B\|=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы системы $\Delta=\det A=\det\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

(главный определитель системы):

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&8&1\\3&-2&6\\2&1&-1\end{vmatrix}=\left\|\begin{matrix}\text{разложим определитель}\\\text{по первой строке}\end{matrix}\right\|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$$

$$=5(-1)^2\begin{vmatrix}-2&6\\1&-1\end{vmatrix}+8(-1)^3\begin{vmatrix}3&6\\2&-1\end{vmatrix}+1(-1)^4\begin{vmatrix}3&-2\\2&1\end{vmatrix}=\left\|\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right\|=$$

$$=5(2-6)-8(-3-12)+1(3+4)=107\neq 0.$$

Так как $\Delta\neq 0$, система линейных уравнений имеет единственное решение. Составим и вычислим вспомогательные определители. Вспомогательный определитель Δ_1 получается из главного заменой его первого столбца столбцом свободных членов $\begin{pmatrix}2\\-7\\-5\end{pmatrix}$:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2&8&1\\-7&-2&6\\-5&1&-1\end{vmatrix}=\left\|\begin{matrix}\text{разложим определитель}\\\text{по первой строке}\end{matrix}\right\|=2(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-2&6\\1&-1\end{vmatrix}+8(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}-7&6\\-5&-1\end{vmatrix}+$$

$$+1(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-7&-2\\-5&1\end{vmatrix}=2(2-6)-8(7+30)+1(-7-10)=-321.$$

Определитель Δ_2 получается из главного заменой его первого столбца столбцом свободных членов $\begin{pmatrix}2\\-7\\-5\end{pmatrix}$:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}5&2&1\\3&-7&6\\2&-5&-1\end{vmatrix}=\left\|\begin{matrix}\text{разложим определитель}\\\text{по первой строке}\end{matrix}\right\|=5(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-7&6\\-5&-1\end{vmatrix}+2(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}3&6\\2&-1\end{vmatrix}+$$

$$+1(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3&-7\\2&-5\end{vmatrix}=5(7+30)-2(-3-12)+1(-15+14)=214.$$

Определитель Δ_3 получается из главного заменой его первого столбца столбцом свободных членов $\begin{pmatrix}2\\-7\\-5\end{pmatrix}$:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}5&8&2\\3&-2&-7\\2&1&-5\end{vmatrix}=\left\|\begin{matrix}\text{разложим определитель}\\\text{по первой строке}\end{matrix}\right\|=5(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-2&-7\\1&-5\end{vmatrix}+8(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}3&-7\\2&-5\end{vmatrix}+$$

$$+2(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3&-2\\2&1\end{vmatrix}=5(10+7)-8(-15+14)+2(3+4)=107.$$

Тогда получим решение по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-321}{107}=-3,\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{214}{107}=2,\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{107}{107}=1.$$

Выполним проверку правильности полученного решения. Для этого подставим найденные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $\begin{cases} 5\cdot(-3)+8\cdot 2+1=2, \quad 2=2 \\ 3\cdot(-3)-2\cdot 2+6\cdot 1=-7, \quad -7=-7 \\ 2\cdot(-3)+2-1=-5 \quad -5=-5 \end{cases}$.

Так как каждое уравнение системы в результате подстановки обратилось в верное равенство, делаем вывод, что решение получено правильно.

Ответ: $X=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Решить эту же систему $\begin{cases} 5x+8y+z=2, \\ 3x-2y+6z=-7, \\ 2x+y-z=-5. \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение. Для того, чтобы решить систему выпишем расширенную матрицу системы: $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 6 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right)$.

С помощью элементарных преобразований строк будем приводить расширенную матрицу к ступенчатому виду. Сначала получим нули в первом столбце под первым элементом 1-ой строки. Для этого поменяем местами 1-ый и 3-й столбец $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 6 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 5 & 2 \\ 6 & -2 & 3 & -7 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right)$, и затем прибавим к 3-ей строке 1-ю строку умноженную на (-6), а ко 2-ой строке просто 1-ю. Тогда получим $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 6 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 5 & 2 \\ 6 & -2 & 3 & -7 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 5 & 2 \\ 0 & -50 & -27 & -19 \\ 0 & 9 & 7 & -3 \end{array}\right)$. Теперь получим нули во втором столбце под 2-м элементов 2-ой строки. Для этого умножим 3-тью строку на 50 и прибавим к ней 2-ю, умноженную на 9. Получим $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 5 & 2 \\ 6 & -2 & 3 & -7 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 5 & 2 \\ 0 & -50 & -27 & -19 \\ 0 & 9 & 7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 5 & 2 \\ 0 & -50 & -27 & -19 \\ 0 & 0 & 107 & -321 \end{array}\right)$.

Теперь запишем систему уравнений по полученной треугольной матрице $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 5 & 2 \\ 0 & -50 & -27 & -19 \\ 0 & 0 & 107 & -321 \end{array}\right)$ помня о том, что мы меняли столбцы: $\begin{cases} z+8y+5x=2, \\ -50y-27x=-19, \\ 107x=-321. \end{cases}$ Из 3-го уравнения находим $x=\dfrac{-321}{107}=-3$ и подставляем его во 2-е уравнение $-50y-27\cdot(-3)=-19 \Rightarrow y=\dfrac{-19-81}{-50}=2.$ Из 1-го уравнения найдем $z=2-8y-5x=2-8\cdot 2-5\cdot(-3)=1.$ Таким образом получаем решение $\begin{cases} x=-3, \\ y=2, \\ z=1. \end{cases}$ Это решение совпало с решением этой же системы с помощью формул Крамера.

Ответ: $(-3;2;1)$.

Задачи 11-20. Построение уравнений прямой на плоскости.

В задачах **11-20** даны координаты вершин треугольника ABC. Сделать чертеж, составить: уравнения прямых, на которых расположены стороны треугольника и высота CD; уравнение прямой, проходящей через вершину С параллельно стороне АВ.

Указания. На чертеже изобразить треугольник по заданным координатам его вершин и соответствующие прямые.

11. A(8; –1); B(–8; 11); C(–1; –13)

12. A(–10; 5); B(6; –7); C(–1; 17)

13. A(10; –4); B(–6; 8); C(1; –16)

14. A(3; 2); B(–13; –10); C(–6; 14)

15. A(7; 4); B(–9; –8); C(–2; 16)

16. A(7; 3); B(–9; –9); C(–2; 15)

17. A(–13; 3); B(3; –9); C(–4; 15)

18. A(12; –2); B(–4; –14); C(3; 10)

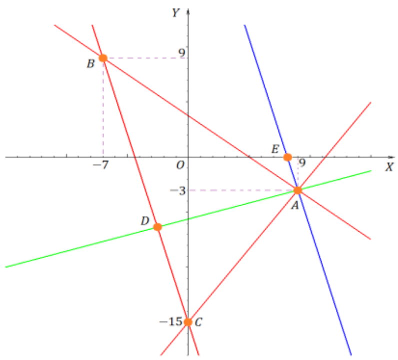
19. A(7; 5); B(–9; –7); C(–2; 17)

20. A(13; 7); B(–3; –5); C(4; 19)

Пример выполнения задач 11-20

Даны координаты вершин треугольника ABC: A (9; –3); B (–7;9); C (0; –15). Сделать чертёж. Составить уравнение прямой, на которой расположена сторона AB треугольника. Составить уравнение прямой, на которой расположена высота треугольника, опущенная из вершины А на сторону ВС. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину А параллельно стороне ВС.

Решение.



Для составления уравнения прямой, на которой расположена сторона AB воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2): $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Тогда AB: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}\Rightarrow \dfrac{x-9}{-7-9}=\dfrac{y-(-3)}{9-(-3)}\Rightarrow\dfrac{x-9}{-16}=\dfrac{y+3}{12}$ или $3x+4y-15=0.$

Аналогично составляются уравнения прямых, на которых расположены стороны BC и CA.

Для составления уравнения прямой, на которой расположена высота треугольника, опущенная из вершины A на сторону BC (прямая AD*)* будем использовать уравнение прямой, которая проходит через заданную точку (опорную) (x_0, y_0) перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{n_x, n_y\}$: $n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)=0.$ Так как высота опущена на сторону BC, то $\vec{n}\parallel\overrightarrow{BC}(x_C-x_B, y_C-y_B)$. $\overrightarrow{BC}(0-(-7);-15-9)\Rightarrow\overrightarrow{BC}(7;-24)\Rightarrow\vec{n}(7;-24)$. Таким образом уравнение прямой AD: $7(x-9)-24(y-(-3))=0\Rightarrow$ $\Rightarrow 7x-63-24y-72=0\Rightarrow 7x-24y-135=0.$

Для составления уравнения прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне CD (прямая AE) воспользуемся уравнением прямой проходящей через опорную точку (x_0, y_0) параллельно вектору $\vec{s}(s_x;s_y)$: $\dfrac{x-x_0}{s_x}=\dfrac{y-y_0}{s_y}$. Так как прямая проходит параллельно стороне BC, то $\vec{s}=\overrightarrow{BC}=(-7;24)$ и

$$AE:\dfrac{x-9}{-7}=\dfrac{y-(-3)}{24}\Rightarrow 24(x-9)=-7(y+3)\Rightarrow 24x+7y-195=0.$$

Ответ: AB: $3x+4y-15=0$; AD: $7x-24y-135=0$; AE: $24x+7y-195=0.$

Тема: математический анализ (производная и интегралы).

Задачи 21-30. Нахождение производной и неопределенного интеграла. Вычисление определенного интеграла.

В **задачах 21-30**: а) найти производную ($y'=?$); б) найти неопределеный интеграл, применив метод интегрирования по частям; в) вычислить определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Указания. При поиске производной нужно воспользоваться основными правилами дифференцирования и правилом вычисления производной от сложной функции. При поиске неопределенного интеграла используется формула интегрирования по частям $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$, где в качестве u берется многочлен. При поиске первообразной следует воспользоваться тем фактом, что если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $\dfrac{1}{k}F(kx+b)$ – первообразная для $f(kx+b)$. При вычислении определенного интеграла пользуемся формулой Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

21. а) $y = \dfrac{\ln(7x)}{\cos x - x^2}$; б) $\int xe^{4x+1}dx$; в) $\int\limits_{-1/4}^{0} e^{4x+1}dx$.

22. а) $y = \dfrac{\sin 3x + 3}{\ln x + 4}$; б) $\int (2x-3)\sin 2x dx$; в) $\int\limits_{0}^{2/5} (5x-2)^2 dx$.

23. а) $y = \dfrac{2 - \mathrm{tg}x}{\sin 5x}$; б) $\int (2x-3)e^{x-1}dx$; в) $\int\limits_{0}^{2/3} \dfrac{dx}{3x+1}$.

24. а) $y = \left(e^{2x} - \cos x\right) \cdot \mathrm{arctg}x$; б) $\int (x-3)\cos 2x dx$; в) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{9x-8}dx$.

25. а) $y = \left(\sqrt[4]{x} + x^2\right) \cdot \sin 3x$; б) $\int xe^{4x}dx$; в) $\int\limits_{0}^{1/4} 2^{4x-1}dx$.

26. а) $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \arcsin 2x$; б) $\int (8x-3)\sin 8x dx$; в) $\int\limits_{0}^{\pi} \cos(2x - \pi)dx$.

27. а) $y = 2^x \cdot \left(\cos\dfrac{x}{2} - \sqrt{x}\right)$; б) $\int (x-3)2^{x-1}dx$; в) $\int\limits_{1}^{3} (2-x)^8 dx$.

28. а) $y = \log_3 x \cdot \left(x + 3^{-2x}\right)$; б) $\int x\cos\dfrac{x}{2}dx$; в) $\int\limits_{-2}^{0} \dfrac{dx}{5+2x}$.

29. а) $y = \dfrac{e^{x-1}}{\sqrt{x}}$; б) $\int (3-x)3^{x-1}dx$; в) $\int\limits_{-1,5}^{0} \dfrac{dx}{\sqrt{1-2x}}dx$.

30. а) $y = 5\mathrm{tg}3x \cdot \left(x^2 - 3\sqrt{x} + 6\right)$; б) $\int (2x+1)2^{x+1}dx$; в) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin(2x - \pi)dx$.

Пример выполнения задач 21-30

Пример 1. Найти производную $y = e^{x+5} \cdot \left(\sqrt[4]{x} + x^2 - 5\right)$.

Решение.

Заданная функция является произведением 2 функций.

Следовательно, нужно применить формулу производной произведения

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

У нас $u = e^{x+5}$, $v = \sqrt[4]{x} + x^2 - 5$.

Прежде, чем применить формулу производной произведения, найдём отдельно производные числителя и знаменателя.

$u' = (e^{x+5})' = \begin{bmatrix} \text{согласно правилу дифференцирования} \\ \text{сложной функции,} \quad (e^t)' = e^t \cdot t' \end{bmatrix} = e^{x+5} \cdot (x+5)' =$

$= \begin{bmatrix} \text{применим правило дифференцирования} \\ \text{суммы/разности} \quad 2 \quad \text{функций} \end{bmatrix} = e^{x+5} \cdot ((x)' + (5)') = e^{x+5} \cdot (1+0) =$

$= e^{x+5} \cdot 1 = e^{x+5}.$

$v' = \left(\sqrt[4]{x} + x^2 - 5\right)' = \left(x^{\frac{1}{4}} + x^2 - 5\right)' = \begin{bmatrix} \text{применим правило дифференцирования} \\ \text{суммы/разности} \quad 2 \quad \text{функций} \end{bmatrix} =$

$= \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' + (x^2)' - (5)' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' + (x^2)' - 0 = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' + (x^2)' = [(x^n)' = n \cdot x^{n-1}] =$

$= \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}-1} + 2 \cdot x^{2-1} = \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}-\frac{4}{4}} + 2 \cdot x^1 = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} + 2 \cdot x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} + 2x = \frac{1}{4 \cdot x^{\frac{3}{4}}} + 2x =$

$= \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^3}} + 2x = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + 2x.$

$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' = e^{x+5} \cdot \left(\sqrt[4]{x} + x^2 - 5\right) + e^{x+5} \cdot \left(\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + 2x\right) =$

$= \mathrm{e}^{\mathrm{x}+5} \cdot \left(\sqrt[4]{\mathrm{x}} + \mathrm{x}^2 - 5 + \frac{1}{4\sqrt[4]{\mathrm{x}^3}} + 2\mathrm{x}\right).$

Ответ: $\mathbf{e^{x+5} \cdot \left(\sqrt[4]{x} + x^2 - 5 + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + 2x\right)}.$

Пример 2. Найти производную $y = \frac{\cos 3x - 5}{\ln x + e^x}$.

Решение.

Заданная функция является отношением 2 функций.

Следовательно, нужно применить формулу производной частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

У нас $u = \cos 3x - 5$, $v = \ln x + e^x$.

Прежде, чем применить формулу производной частного, найдём отдельно производные числителя и знаменателя.

$u' = (\cos 3x - 5)' = \begin{bmatrix} \text{применим правило дифференцирования} \\ \text{суммы/разности} \quad 2 \quad \text{функций} \end{bmatrix} = (\cos 3x)' - (5)' =$

$= (\cos 3x)' - 0 = (\cos 3x)' = \begin{bmatrix} \text{согласно правилу дифференцирования} \\ \text{сложной функции,} \quad (\cos t)' = -\sin t \cdot t' \end{bmatrix} =$

$= -\sin 3x \cdot (3x)' = \begin{bmatrix} \text{константу выносим за} \\ \text{знак производной} \end{bmatrix} = -\sin 3x \cdot 3 \cdot (x)' = -\sin 3x \cdot 3 \cdot 1 =$

$= -3 \sin 3x.$

$v' = (\ln x + e^x)' = \begin{bmatrix} \text{применим правило дифференцирования} \\ \text{суммы/разности} \quad 2 \quad \text{функций} \end{bmatrix} = (\ln x)' + (e^x)' =$

$= \frac{1}{x} + e^x.$

$\boldsymbol{y'} = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \frac{\boldsymbol{-3\sin 3x \cdot (\ln x + e^x) - (\cos 3x - 5) \cdot \left(\frac{1}{x} + e^x\right)}}{\boldsymbol{(\ln x + e^x)^2}}.$

Ответ: $\frac{\boldsymbol{-3\sin 3x \cdot (\ln x + e^x) - (\cos 3x - 5) \cdot \left(\frac{1}{x} + e^x\right)}}{\boldsymbol{(\ln x + e^x)^2}}.$

Пример 3. Найти интеграл $\int(\boldsymbol{8x+2})\cdot\boldsymbol{e^{4x}dx}$ с помощью метода интегрирования по частям.

Решение.

$$\int(\boldsymbol{8x+2})\cdot\boldsymbol{e^{4x}dx}=\begin{bmatrix}\text{интегрируем по частям:} & \\ u=8x+2 & dv=e^{4x}dx \\ du=8dx & v=\frac{1}{4}e^{4x}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}(8x+2)\cdot e^{4x}-\int\frac{1}{4}e^{4x}\cdot 8dx=$$

$$=\left(2x+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{4x}-2\cdot\int e^{4x}dx=\left(2x+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{4x}-2\cdot\frac{1}{4}\cdot e^{4x}+\mathrm{C}$$

$$=\left(2x+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{4x}-\frac{1}{2}\cdot e^{4x}+\mathrm{C}=2x\cdot e^{4x}+\frac{1}{2}\cdot e^{4x}-\frac{1}{2}\cdot e^{4x}+\mathrm{C}=$$

$$=\mathbf{2x\cdot e^{4x}+C}.$$

Ответ: $\boldsymbol{2x\cdot e^{4x}}+\mathbf{C}$.

Пример 4. Найти интеграл $\int(\mathbf{x+2})\cdot\mathbf{cos}\,\mathbf{\frac{x}{2}dx}$ с помощью метода интегрирования по частям.

Решение.

$$\int(\mathbf{x+2})\cdot\mathbf{cos}\,\mathbf{\frac{x}{2}}\boldsymbol{dx}=\begin{bmatrix}\text{интегрируем по частям:} & \\ u=x+2 & dv=\cos\frac{x}{2}dx \\ du=dx & v=2\sin\frac{\mathrm{x}}{2}\end{bmatrix}=2(\mathrm{x}+2)\cdot\sin\frac{\mathrm{x}}{2}-\int 2\cdot\sin\frac{\mathrm{x}}{2}dx=$$

$$=(2\mathrm{x}+4)\cdot\sin\frac{\mathrm{x}}{2}-2\cdot\left(-2\cdot\cos\frac{\mathrm{x}}{2}\right)+\mathrm{C}=(\mathbf{2x+4})\cdot\mathbf{sin}\,\mathbf{\frac{x}{2}}+\mathbf{4}\cdot\mathbf{cos}\,\mathbf{\frac{x}{2}}+\mathbf{C}.$$

Ответ: $(\boldsymbol{2x+4})\cdot\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\frac{x}{2}}+\mathbf{4}\cdot\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\frac{x}{2}}+\boldsymbol{C}$.

Пример 5. Найти интеграл $\int(\boldsymbol{1-x})\cdot\boldsymbol{5^{x+1}dx}$ с помощью метода интегрирования по частям.

Решение.

$$\int(\boldsymbol{1-x})\cdot\boldsymbol{5^{x+1}dx}=\begin{bmatrix}\text{интегрируем по частям:} & \\ \mathrm{u}=1-\mathrm{x} & \mathrm{dv}=5^{\mathrm{x}+1}\mathrm{dx} \\ \mathrm{du}=-\mathrm{dx} & \mathrm{v}=\frac{5^{\mathrm{x}+1}}{ln5}\end{bmatrix}=(1-\mathrm{x})\cdot\frac{5^{\mathrm{x}+1}}{ln5}-\int-\frac{5^{\mathrm{x}+1}}{ln5}dx=$$

$$=(1-\mathrm{x})\cdot\frac{5^{\mathrm{x}+1}}{\ln 5}+\frac{\mathbf{1}}{\ln 5}\cdot\int 5^{\mathrm{x}+1}dx=(\mathbf{1-x})\cdot\frac{\mathbf{5^{x+1}}}{\mathbf{ln5}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ln5}}\cdot\frac{\mathbf{5^{x+1}}}{\boldsymbol{ln5}}+\boldsymbol{C}.$$

Ответ: $(\mathbf{1-x})\cdot\frac{\mathbf{5^{x+1}}}{\mathbf{ln5}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ln5}}\cdot\frac{\mathbf{5^{x+1}}}{\mathbf{ln5}}+\mathbf{C}.$

Пример 6. Вычислить определеный интеграл $\int_0^3 \mathrm{e}^{\mathrm{x}/3}\mathrm{dx}$ с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Решение.

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{3}}\mathbf{e^{x/3}\,dx}=\begin{bmatrix}\text{применяем формулу Ньютона — Лейбница:} & \\ \int_a^b \mathrm{f(x)dx}=\mathrm{F(b)}-\mathrm{F(a)}, & \mathrm{F(x)}-\text{первообразная для f(x)} \\ \mathrm{f(x)}=\mathrm{e}^{\mathrm{x}/3} & \mathrm{F(x)}=3\mathrm{e}^{\mathrm{x}/3}\end{bmatrix}=3\cdot\mathbf{e^{x/3}}\Big|_0^3=$$

$= 3 \cdot \left(\mathbf{e}^{3/3} - \mathbf{e}^{0/3}\right) = \mathbf{3} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{1})$.

Ответ: $\mathbf{3} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{1})$.

Тема: теория вероятностей и математическая статистика (классическая вероятность, представление выборки, точечные и интервальные оценки числовых характеристик генеральной совокупности).

Задачи 31-40. Выбор без возвращения и учета порядка. Поиск вероятности события с помощью формулы классической вероятности.

В задачах **31-40** нужно найти вероятность указанного в условии события, применяя формулу классической вероятности.

Указание. для подсчета числа элементарных исходов следут использовать формулу числа сочетаний $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

31. На полке в почвенной лаборатории случайно смешаны бюксы с различными образцами почвы: 8 бюксов с влажной почвой и 6–с сухой. Найти вероятность того, что три из пяти наудачу взятых с этой полки бюксов будут сухими.

32. В районе 100 поселков. В двадцати пяти из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны два поселка. Какова вероятность того, что в них окажутся пункты проката?

33. Подготовлены для посадки на садовом участке и случайно смешаны саженцы двух сортов черной смородины: 6 саженцев сорта Селеченская и 8– сорта Вологда. Какова вероятность того, что первыми будут посажены 3 саженца смородины сорта Селеченская?

34. На станцию прибыли 10 вагонов разной продукции. Вагоны помечены номерами от одного до десяти. Найти вероятность того, что среди пяти наудачу выбранных для контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 и 5.

35. В отделе работают 8 специалистов, из которых 5– высокой квалификации. В командировку нужно отправить трех специалистов. Каждый специалист имеет равные возможности поехать в командировку. Найти вероятность того, что среди них будет два специалиста высокой квалификации.

36. Фермер содержит 15 коров, 5 из которых дают удои более, чем по 4500 л молока в год. Случайным образом отобраны 4 принадлежащие этому фермеру коровы. Какова вероятность, что среди отобранных коров 3 дают указанные высокие удои.

37. Среди 10 растений некоторой популяции дикорастущей земляники 7 растений имеют красные ягоды, а остальные–розовые. Какова вероятность того, что среди отобранных случайным образом 8-ми растений этой популяции красные ягоды будут иметь 6 растений.

38. На сортировочном пункте имеется 15 контейнеров, причем 10 из них отечественного производства. Найти вероятность того, что при формировании грузового состава среди пяти взятых наудачу контейнеров три будут отечественного производства.

39. Устройство состоит из четырех элементов, из которых один изношен. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

40. Из 18 клубней семенного картофеля половина имеет пятна. Наудачу отобрали 9 клубней. Какова вероятность, что среди них нет клубней с пятнами.

Пример выполнения задач 31-40

Пример. Имеется 20 яблок, из которых 7 красных, остальные – зелёные. Наудачу выбрали 5 яблок. Какова вероятность того, что 2 из них будут красные?

Решение. Как известно, выбрать k однотипных предмета из n можно C_n^k способами, где $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ (считается, что $0! = 1$).

Следовательно, выбрать 5 любых яблок из 20 имеющихся в наличии можно C_{20}^5 способами.

Выбрать же 2 красных яблока из 5 и 3 зелёных яблока из 13 по правилу произведения можно $C_7^2\cdot C_{13}^3$ способами.

Обозначим через A событие, состоящее в том, что из выбранных наудачу 5 яблок будут 2 красных и 3 зелёных.

$\boldsymbol{m} = C_7^2\cdot C_{13}^3 = \frac{7!}{2!\cdot 5!}\cdot\frac{13!}{3!\cdot 10!}$ – количество исходов, благоприятствующих событию A.

$\boldsymbol{n} = C_{20}^5 = \frac{20!}{5!\cdot 15!}$ – количество всевозможных исходов.

Согласно классическому определению вероятности, получим:

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{m}{n} = \frac{\frac{7!}{2!\cdot 5!}\cdot\frac{13!}{3!\cdot 10!}}{\left(\frac{20!}{5!\cdot 15!}\right)} = \frac{7!\cdot 13!\cdot 5!\cdot 15!}{20!\cdot 2!\cdot 5!\cdot 3!\cdot 10!} =$$

$$= \frac{7!\cdot 10!\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 5!\cdot 15!}{15!\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 2!\cdot 5!\cdot 3!\cdot 10!} = \frac{7!\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 2!\cdot 3!} =$$

$$= \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 1\cdot 2\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 1\cdot 2} = \frac{6\cdot 7\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 2} =$$

$$= \frac{7\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{16\cdot 17\cdot 3\cdot 19\cdot 2} = \frac{7\cdot 11\cdot 4\cdot 13}{16\cdot 17\cdot 19\cdot 2} = \frac{7\cdot 11\cdot 13}{4\cdot 17\cdot 19\cdot 2} = \boldsymbol{\frac{1001}{2584}}.$$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{1001}{2584}}$.

Задачи 41-50. Представление выборки. Точечные оценки.

В **задачах 41-50** приведены результаты выборочного обследования 30 сельхозпредприятий региона для определения роста производительности труда в процентах к предыдущему году (таблица 2). Требуется: а) составить интервальный статистический ряд и построить гистограмму частот; б) найти точечные оценки числовых характеристик генеральной совокупности: выборочную среднюю, выборочную и исправленную дисперсии, выборочное среднее квадратическое отклонение.

Указание. Количество интервалов рассчитывается по формуле Стерджесса $n = 1 + [\log_2 N]$. За начало первого частичного интервала берётся наименьшая варианта. Все интервалы имеют вид $[x_i; x_{i+1})$. Последний интервал имеет вид $[x_{n-1}; x_n]$.

Таблица 2.

Номер задачи	Результаты выборочного обследования				
41.	118	128	127	117	117
	113	103	111	114	117
	122	135	120	120	126
	112	116	132	92	124
	113	119	117	128	112
	107	108	126	109	120
42.	126	116	115	111	130
	120	125	127	116	132
	123	122	124	119	104
	114	118	115	120	132
	139	130	119	124	120
	123	125	117	127	123
43.	91	101	100	105	92
	103	104	99	107	115
	105	107	108	109	115
	99	95	97	101	117
	104	105	111	112	108
	107	109	108	113	95
44.	107	105	115	129	122
	116	116	115	134	127
	135	100	141	127	120
	107	118	113	125	115
	120	119	130	127	126
	122	127	125	123	124
45.	105	108	119	104	111
	107	110	111	120	113
	112	101	116	111	112
	113	112	116	114	115
	118	114	122	115	115
	110	112	114	124	113

Продолжение таблицы 2.

46.	108	122	120	106	122
	110	111	115	114	115
	111	124	104	119	113
	108	115	114	117	116
	116	112	123	119	118
	109	103	118	117	126
47.	102	112	114	115	115
	124	117	134	109	128
	104	106	118	119	121
	130	125	122	127	122
	117	110	107	132	113
	99	116	126	118	119
48.	109	133	133	124	115
	117	130	122	120	125
	139	111	140	130	112
	124	105	117	128	125
	117	131	134	145	130
	100	138	123	107	147
49.	122	122	118	105	112
	109	109	117	111	113
	118	119	106	110	116
	113	119	114	114	116
	121	114	106	115	114
	112	109	113	116	115
50.	112	117	118	135	110
	123	120	121	135	126
	124	135	128	132	131
	125	130	126	139	129
	141	127	131	133	140
	145	128	129	138	143

Пример выполнения задач 41-50

Некоторое сельхозпредприятие закупило удобрения для повышения урожайности. В таблице приведены результаты выборочного обследования 30 земельных участков площадью по 1га каждый для определения роста урожайности в процентах к предыдущему году. Будем считать, что объем выборки гораздо меньше объема генеральной совокупности.

Требуется: а) составить интервальный статистический ряд и построить гистограмму частот; б) найти точечные оценки числовых характеристик генеральной совокупности: выборочную среднюю, выборочную и исправленную дисперсии, выборочное среднее квадратическое отклонение.

Результаты выборочного обследования				
117	111	113	108	110
123	122	120	115	104
129	109	102	119	127
115	116	109	96	111
122	100	111	131	113
115	112	107	114	108

Решение. Составим вариационный ряд:

96, 100, 102, 104, 107, 108, 108, 109, 109, 110, 111, 111, 111, 112, 113, 113, 114, 115, 115, 115, 116, 117, 119, 120, 122, 122, 123, 129, 127, 131.

Найдём минимальный элемент выборки, максимальный элементы выборки и размах вариации: $x_{min} = 96$, $x_{max} = 131$, $R = x_{max} - x_{min} = 131 - 96 = 35$.

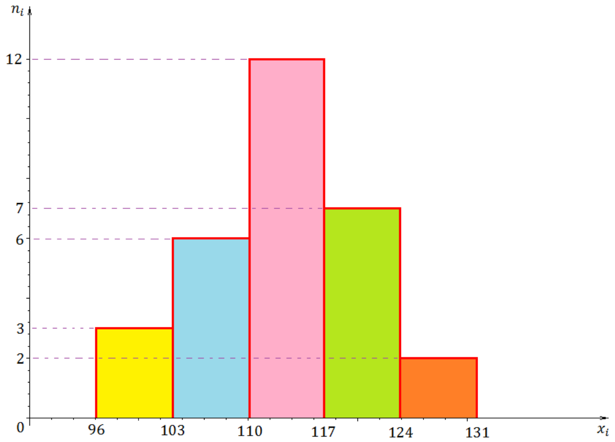
По формуле Стерджесса найдём количество интервалов, на которые мы будем разбивать наши данные: $n = 1 + [\log_2 N] = 1 + [\log_2 30] = 1 + 4 = 5$.

Отсюда получим длину h каждого интервала: $h = \frac{R}{n} = \frac{35}{5} = 7$.

Составим интервальный статистический ряд:

Интервалы $[a_i; a_{i+1})$	$[96; 103)$	$[103; 110)$	$[110; 117)$	$[117; 124)$	$[124; 131]$
Середины интервалов x_i^*	99.5	106.5	113.5	119.5	126.5
Частоты n_i	3	6	12	7	2
Относительные частоты ω_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{15}$

Построим гистограмму частот:



Найдём точечные оценки числовых характеристик генеральной совокупности.

Выборочная средняя:

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{5} x_i^* \cdot n_i = \sum_{i=1}^{5} x_i^* \cdot \frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{5} x_i^* \cdot \omega_i = x_1^*\cdot\omega_1 + x_2^*\cdot\omega_2 + x_3^*\cdot\omega_3 + x_4^*\cdot\omega_4 + x_5^*\cdot$$

$$\cdot\,\omega_5 = 99.5\cdot\frac{1}{10} + 106.5\cdot\frac{1}{5} + 113.5\cdot\frac{2}{5} + 119.5\cdot\frac{7}{30} + 126.5\cdot\frac{1}{15} = \frac{3389}{30} \approx \mathbf{112.97}.$$

Выборочная средняя квадрата случайной величины:

$$\overline{X^2} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{5}(x_i^*)^2\cdot n_i = \sum_{i=1}^{5}(x_i^*)^2\cdot\frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{5}(x_i^*)^2\cdot\omega_i = (x_1^*)^2\cdot\omega_1 + (x_2^*)^2\cdot\omega_2 + (x_3^*)^2\cdot\omega_3 +$$

$$+(x_4^*)^2\cdot\omega_4 + (x_5^*)^2\cdot\omega_5 = 99.5^2\cdot\frac{1}{10} + 106.5^2\cdot\frac{1}{5} + 113.5^2\cdot\frac{2}{5} + 119.5^2\cdot\frac{7}{30} + 126.5^2\cdot\frac{1}{15} =$$

$$= 99.5^2\cdot\frac{1}{10} + 106.5^2\cdot\frac{1}{5} + 113.5^2\cdot\frac{2}{5} + 119.5^2\cdot\frac{7}{30} + 126.5^2\cdot\frac{1}{15} = 9900.25\cdot\frac{1}{10} +$$

$$+11342.25\cdot\frac{1}{5} + 12882.25\cdot\frac{2}{5} + 14520.25\cdot\frac{7}{30} + 16002.25\cdot\frac{1}{15} = \frac{51241}{4}.$$

Выборочная дисперсия:

$$\boldsymbol{D}_{\text{в}} = \overline{X_{\text{в}}^2} - \overline{X_{\text{в}}}^2 = \frac{51241}{4} - \left(\frac{3389}{30}\right)^2 = \frac{51241}{4} - \frac{11485321}{900} = \frac{46116900}{3600} - \frac{45941284}{3600} =$$

$$= \frac{175616}{3600} = \frac{10976}{225} \approx \mathbf{48.78}.$$

Исправленная выборочная дисперсия:

$$\boldsymbol{s}^2 = \frac{n}{n-1}\cdot D_{\text{в}} = \frac{30}{29}\cdot\frac{10976}{225} = \frac{21952}{435} \approx \mathbf{50.46}.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} = \sqrt{\frac{10976}{225}} = \sqrt{\frac{784\cdot 14}{225}} = \sqrt{\frac{784}{225}}\cdot\sqrt{14} = \frac{28}{15}\sqrt{14} \approx \mathbf{6.98}.$$

Ответ: $\overline{X_{\text{в}}} \approx \mathbf{112.97}$, $D_{\text{в}} \approx \mathbf{48.78}$, $s^2 \approx \mathbf{50.46}$, $\sigma_{\text{в}} \approx \mathbf{6.98}$.

6. Список вопросов для подготовки к экзамену

Элементы линейной алгебры, векторного анализа и аналитической геометрии

1. Матрицы и действия над ними.
2. Определители 2-го и 3-го порядка. Способы вычисления.
3. Системы линейных уравнений, основные понятия и определения.
4. Система n линейных уравнений с n переменными. Правило Крамера. Метод Гаусса.
5. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли (без доказательства). Исследование системы m линейных уравнений с n переменными на совместность.
6. Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами.
7. Базис на плоскости и в пространстве. Ортонормированный базис. Декартова прямоугольная система координат. Действия над векторами в координатной форме. Критерий коллинеарности векторов в координатной форме.
8. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения. Вычисление скалярного произведения в ортонормированном базисе. Критерий ортогональности векторов.
9. Расстояние между двумя точками на плоскости. Деление отрезка в данном отношении.
10. Прямая на плоскости. Виды уравнений прямой на плоскости. Взаимное расположения двух прямых. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой на плоскости.

Математический анализ: пределы, производная и ее применение, неопределенный и определенный интегралы

11. Понятие предела последовательности.
12. Функция, способы задания, область определения, отрезок, интервал, полуинтервал, окрестность точки.
13. Понятие предела функции. Основные теоремы о пределах.
14. Бесконечно малая величина и бесконечно большая величина. Теорема о связи бесконечно большой и бесконечно малой.
15. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.
16. Непрерывность функции в точке и на отрезке. Односторонние пределы. Классификация точек разрыва функции.
17. Асимптоты графика функции.
18. Производная функции. Геометрический и физический смысл производной. Основные правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Правило дифференцирования сложной функции.
19. Дифференциал функции. Связь производной и дифференциала.
20. Производные высших порядков.
21. Необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) функции на отрезке.
22. Необходимое условие существования экстремума функции одной переменной.
23. Достаточные условия существования экстремума функции одной переменной.
24. Необходимое и достаточное условие выпуклости графика функции на отрезке.
25. Достаточное условие существования точки перегиба.
26. Правило Лопиталя.

27. Первообразная. Теоремы о первообразных. Неопределенный интеграл. Свойства неопределённого интеграла. Таблица основных интегралов. Простейшие приемы интегрирования.
28. Метод замены переменной. Метод интегрирования по частям.
29. Понятие определенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница.
30. Свойства определённого интеграла.
31. Методы вычисления определённых интегралов.
32. Несобственные интегралы.
33. Некоторые геометрические приложения определённых интегралов.

Теория вероятностей и математическая статистика

34. Основные правила комбинаторики: сложения и умножения. Схемы выбора, число перестановок (факториал), число сочетаний, число размещений.
35. Случайный эксперимент. Пространство элементарных исходов. Случайное событие. Невозможное и достоверное события. Противоположные события. Совместные и несовместные (попарно несовместные) события. Полная группа событий.
36. Операции над случайными событиями.
37. Дискретное пространство элементарных исходов. Классическое определение вероятности. Основные свойства вероятности.
38. Статистическая устойчивость. Статистическое определение вероятности.
39. Условная вероятность. Независимость событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
40. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Биномиальное распределение вероятностей
41. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
42. Теорема Пуассона.
43. Понятие случайной величины. Дискретная случайная величина (ДСВ). Закон распределения ДСВ. Распределение вероятностей. Ряд распределения. Функция распределения.
44. Операции над случайными величинами. Числовые характеристики ДСВ: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение (с.к.о.) и их свойства.
45. Биномиальное распределение (БР – схема «число успехов»). Математическое ожидание и дисперсия БР.
46. Непрерывная случайная величина (НСВ). Плотность и функция распределения НСВ.
47. Числовые характеристики НСВ: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.
48. Нормальное распределение (НР). Математическое ожидание и дисперсия НР.
49. Равномерное распределение (РР). Математическое ожидание и дисперсия РР.
50. Показательное распределение (ПР). Математическое ожидание и дисперсия ПР.
51. Закон больших чисел: неравенство Чебышева, теорема Чебышева, теорема Бернулли.
52. Предмет и основные задачи статистики.
53. Генеральная совокупность и выборка. Случайная выборка. Классификация выборок.
54. Варианта. Вариационный ряд. Частота и относительная частота. Статистический ряд. Интервальный статистический ряд.

55. Эмпирическая функция распределения и гистограмма. Кумулята, гистограмма частот, полигон.
56. Квантиль.
57. Точечные оценки числовых характеристик генеральной совокупности (параметров распределения). Требования к оценкам (несмещенность, состоятельность, эффективность). Выборочное среднее, выборочная и исправленная дисперсии, выборочное с.к.о.
58. Расчетные формулы вычисления выборочной средней, дисперсии и исправленной дисперсий для повторной и бесповторной выборок.
59. Интервальные оценки числовых характеристик генеральной совокупности (параметров распределения). Доверительный интервал и доверительная вероятность (надежность). Предельная ошибка выборки. Доверительный интервал для генеральной средней по большой выборке (повторной и бесповторной).

6.1. Критерии оценки знаний студентов на экзамене

– отметка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал монографической литературы, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.

– отметка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.

– отметка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, демонстрирует недостаточно систематизированы теоретические знания программного материала, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.

– отметка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки при его изложении, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы.

7. Литература

Список основной литературы

1. Шипачев В.С. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. — Москва: ИНФРА-М, 2023. — 479 с. — (Высшее образование).— DOI 10.12737/5394. - ISBN 978-5-16-010072-2. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1894562
2. Коган, Е. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.А. Коган, А.А. Юрченко. — Москва: ИНФРА-М, 2023. — 250 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/textbook_5cde54d3671a96.35212605. - ISBN 978-5-16-014235-7. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1920312

Список дополнительной литературы

1. Ячменев, Л. Т. Высшая математика: учебник / Л. Т. Ячменёв. - Москва: РИОР: ИНФРА-М, 2020. - 752 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-369-01032-7. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1056564
2. Шнейдер, В. Е. Курс высшей математики. В 2 книгах. Книга 1: учебное пособие для вузов / В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов. - 3-е изд., перераб. и испр. - Москва: Мир и Образование, 2022. - 544 с. - ISBN 978-5-94666-523-0. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1993567
3. Шнейдер, В. Е. Курс высшей математики. В 2 книгах. Книга 2: учебное пособие для вузов / В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов. - 3-е изд., перераб. и испр. - Москва: Мир и Образование, 2022. - 480 с. - ISBN 978-5-94666-524-7. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1993568
4. Хуснутдинов, Р. Ш. Математическая статистика: Учебное пособие / Хуснутдинов Р.Ш. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 205 с. (Высшее образование: Бакалавриат) (Обложка. КБС)ISBN 978-5-16-009520-2. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1002159
5. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики: учебник / А.Н. Бородин. – 8-е изд. – М.: Лань, 2021. – 256 с. (ЭБС «Лань»)
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. — 10-е изд., испр.- М.:Айрис-пресс, 2011. - 608 с.: ил.- (Высшее образование).
7. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 538 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10004-4. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/517540

Составители **Тарсис Екатерина Юрьевна, Журавская Светлана Александровна, Шарлов Артур Игоревич**

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы

Печатается в авторской редакции

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160