ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

Теоретическая механика

Методические указания по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению расчетно-графической работы

23.03.01 *Технология транспортных процессов*
23.03.03 *Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов*

Новосибирск 2022

Кафедра математики и физики
УДК 531. 011 (07)
ББК 22.21, я7
Т 338

Составитель: канд. техн. наук, доц. Е.Ю. Тарсис

Рецензент: кандидат техн. наук, доцент С.Н. Бурков.

Теоретическая механика: методические указания по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению расчетно-графической работы/ Новосиб. гос. аграр. ун-т; сост. Е. Ю. Тарсис – Новосибирск, 2022. –90 с.

В методических указаниях представлены задания для выполнения на практических занятиях и самостоятельной работы, вопросы для подготовки к занятиям и подготовки к экзамену, рекомендации по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению расчетно-графической работы, список основной и рекомендуемой литературы.

Методическое пособие предназначено для студентов Инженерного института очной и заочной форм обучения по направлению подготовки:

23.03.01 Технология транспортных процессов (профиль: Организация и безопасность движения);

23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов (профиль: Автомобильный сервис).

Утверждены и рекомендованы к изданию учебно-методическим советом Инженерного института (протокол № 11 от 28 июня 2022 г.).

Содержание

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

В основе курса теоретической механики лежит изучение общих законов движения и равновесия материальных тел и возникающих при этом взаимодействий между ними. Теоретическая механика является важнейшей дисциплиной в образовании любого инженера, развивает логическое мышление, приводит к пониманию широкого круга явлений, относящихся к простейшей форме движения материи – к механическому движению. Теоретическая механика является базовой научной основой общеинженерных и специальных технических дисциплин, изучаемых будущими инженерами.

Целью преподавания теоретической механики в вузе для студентов инженерных специальностей является:

– ознакомление студентов с основными положениями теоретической механики, которые необходимы для решения практических инженерных задач и изучения других инженерных дисциплин;

– формирование у студентов умения самостоятельного изучения учебной и специальной литературы по теоретической механике и ее приложениям;

– развитие логического и алгоритмического мышления;

– повышение общего уровня математической культуры;

– выработка навыков математического исследования прикладных вопросов.

Задачи дисциплины состоят:

– в овладении студентами понятиями, определениями, законами и методами, изложенными в курсе теоретической механики;

– в формировании навыков изучения, моделирования и анализа движения и механического взаимодействия различных тел;

– в овладении методами и способами теоретической механики, необходимыми для решения практических задач механики и изучения других инженерных дисциплин;

– в развитии у студентов абстрактно-логического мышления;

– в приобретении студентами опыта решения технических задач с использованием математических методов;

– в приобретении студентами опыта работы с учебной и научной литературой.

1.2. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент ***должен***:

Знать:

- основные положения и законы теоретической механики, необходимые для последующего изучения математических, естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин;

- основные положения и законы теоретической механики, необходимые для решения типовых задач в сфере профессиональной деятельности.

Уметь:

- применять знания из области механики в профессиональной деятельности.

- использовать знание основных законов математических, естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин, необходимых для решения типовых задач в сфере профессиональной деятельности

Владеть:

- элементами расчета теоретических схем механизмов, транспортных и транспортно-технологических машин и оборудования;
- методами решения типовых задач профессиональной деятельности;

2. Методические рекомендации по самостоятельной работе

Успешное освоение компетенций, формируемых данной учебной дисциплиной, предполагает оптимальное использование времени самостоятельной работы.

Подготовка к лекционным занятиям включает выполнение всех видов заданий, рекомендованных к каждой лекции, т. е. задания выполняются еще до лекционного занятия по соответствующей теме. Целесообразно дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой [1-5].

Все задания к практическим занятиям, а также задания, вынесенные на самостоятельную работу, рекомендуется выполнять непосредственно после соответствующей темы лекционного курса, что способствует лучшему усвоению материала, позволяет своевременно выявить и устранить «пробелы» в знаниях, систематизировать ранее пройденный материал, на его основе приступить к получению новых знаний и овладению навыками.

Самостоятельная работа во внеаудиторное время состоит из:

- повторения лекционного материала;
- подготовки к практическим занятиям;
- изучения учебно-методической и научной литературы;
- решения задач, выданных на практических занятиях;
- подготовки к защите заданий из РГР, тестированию и т. д.;
- проведение самоконтроля путем ответов на вопросы текущего контроля знаний, решения представленных в учебно-методических материалах дисциплины задач.

2.1 Методические указания по выполнению расчетно-графической работы

Студенты, обучающиеся по направлениям подготовки **23.03.01 Технология транспортных процессов** и **23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов** выполняют расчетно-графическую работу (РГР) по следующим темам:

статика - задачи 1-20, 21-40

кинематика - задачи 41-60, 61-80, 81-100, 101-120

динамика - задачи 121-140, 141-160.

Каждая серия задач содержит условия, исходные данные для их выполнения и примеры выполнения.

Прежде, чем выполнять РГР рекомендуется внимательно прочитать соответствующий раздел в учебнике, выбранном из списка основной и рекомендуемой литературы; ознакомиться с методическими указаниями к каждой серии задач, приведенных в настоящем пособии; составить краткий конспект, записав основные определения, теоремы и формулы; ответить на вопросы для подготовки к практическим занятиям, приведенные к каждому практическому занятию в настоящем пособии (стр. 8-28); разобрать решение типовых задач на примерах, приведенных в настоящем пособии.

При выполнении расчетно-графической работы студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1) Расчетно-графическая работа выполняется в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны РГР, название дисциплины, ФИО студента, номер курса и группы, полный шифр, специальность.

2) Задачи расчетно-графической работы следует располагать в порядке номеров, указанных в задании. Перед решением каждой задачи надо записать ее номер, далее сделать чертеж и записать, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывать).

3) Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; на нем все углы, действующие силы; число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. Чертеж должен быть аккуратным и достаточно крупным, на нем должны быть ясно показаны все силы и векторы скоростей и ускорений и др.

4) Решение задачи должно быть изложено последовательно с краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, как получаются те или иные результаты) соответствующими ссылками на вопросы теории и указанием необходимых формул, теорем); в конце необходимо привести численные значения с размерностями определяемых величин.

5) При решении задач надо учесть, что все нити (веревки, тросы) считаются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, не скользят, катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано оговорок, считаются идеальными.

6) На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной около 3 см для замечаний преподавателя.

7) Работы, не отвечающие перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются на переделку.

8) Студентам заочной формы обучения следует зарегистрировать выполненную расчетно-графическую работу в установленные сроки в деканате у методиста.

9) Получив прорецензированную работу (как зачтенную, так и не зачтенную), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. В случае незачета по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования преподавателя, и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

10) Из приведенных в таблице на стр.7, студент выполняет тот вариант РГР, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра его учебного шифра есть число нечётное (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для соответствующего варианта даны в левой части таблицы. Если предпоследняя цифра учебного шифра есть число чётное или ноль (2, 4, 6, 8, 0), то номера задач даны в правой части таблицы.

№ вари-анта	Номер задачи для РГР															
	предпоследняя цифра 1, 3, 5, 7, 9								предпоследняя цифра 2, 4, 6, 8, 0							
1	**1**	**21**	**41**	**61**	**81**	**101**	**121**	**141**	**11**	**31**	**51**	**71**	**91**	**111**	**131**	**151**
2	**2**	**22**	**42**	**62**	**82**	**102**	**122**	**142**	**12**	**32**	**52**	**72**	**92**	**112**	**132**	**152**
3	**3**	**23**	**43**	**63**	**83**	**103**	**123**	**143**	**13**	**33**	**53**	**73**	**93**	**113**	**133**	**153**
4	**4**	**24**	**44**	**64**	**84**	**104**	**124**	**144**	**14**	**34**	**54**	**74**	**94**	**114**	**134**	**154**
5	**5**	**25**	**45**	**65**	**85**	**105**	**125**	**145**	**15**	**35**	**55**	**75**	**95**	**115**	**135**	**155**
6	**6**	**26**	**46**	**66**	**86**	**106**	**126**	**146**	**16**	**36**	**56**	**76**	**96**	**116**	**136**	**156**
7	**7**	**27**	**47**	**67**	**87**	**107**	**127**	**147**	**17**	**37**	**57**	**77**	**97**	**117**	**137**	**157**
8	**8**	**28**	**48**	**68**	**88**	**108**	**128**	**148**	**18**	**38**	**58**	**78**	**98**	**118**	**138**	**158**
9	**9**	**29**	**49**	**69**	**89**	**109**	**129**	**149**	**19**	**39**	**59**	**79**	**99**	**119**	**139**	**159**
0	**10**	**30**	**50**	**70**	**90**	**110**	**130**	**150**	**20**	**40**	**60**	**80**	**100**	**120**	**140**	**160**

Критерии оценивания результатов выполнения расчетно-графической работы для студентов очной формы обучения:

оценка «отлично» – задания расчетно-графической работы выполнены в полном объеме, полностью правильно или с допущением несущественных ошибок. Количество ошибок – не более 2-х;

оценка «хорошо» – задания расчетно-графической работы выполнены в полном объеме, полностью правильно или с допущением несущественных ошибок. Количество ошибок – не более 4-х;

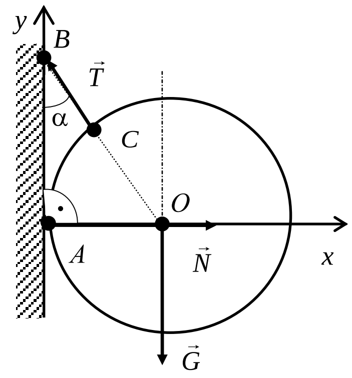
оценка «удовлетворительно» – задания расчетно-графической работы выполнены в объеме не менее 0,8, с допущением несущественных ошибок (не более пяти) или одной существенной ошибки;

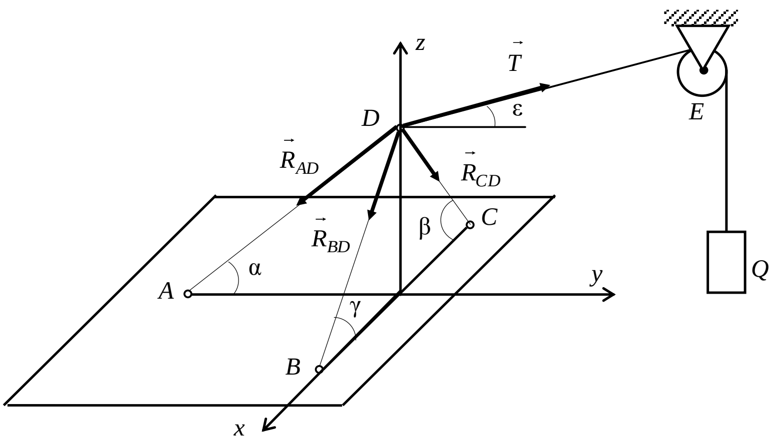
оценка «неудовлетворительно» – задания расчетно-графической работы выполнены не в полном объеме, с допущением существенных ошибок, либо количество несущественных ошибок более пяти. Расчетно-графическая работа возвращается студенту для дальнейшей работы над ней.

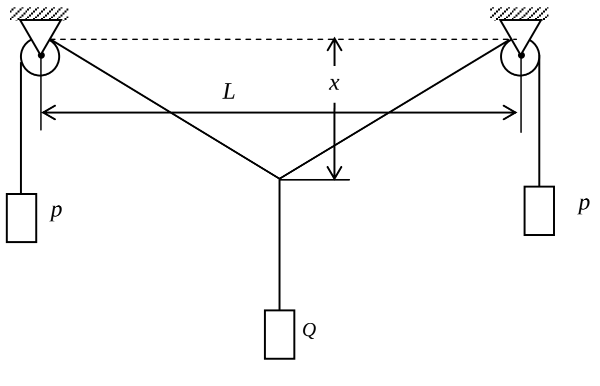
3. Задания для проведения практических занятий и самостоятельной работы

Раздел 1. Статика

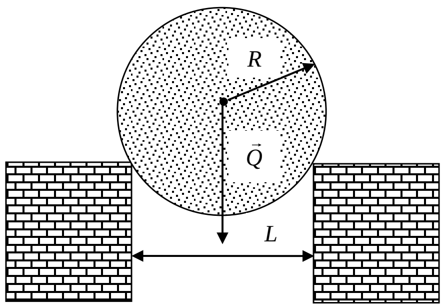
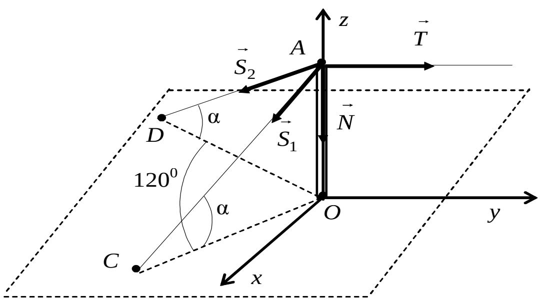
Занятие 1. Виды связей и их реакции. Определение реакций связей тела при действии на него плоской и пространственной сходящейся системы сил.

<table>
<tr>
<td>1.


</td>
<td>Шар весом G подвешен на нити BC, составляющей с вертикалью угол α, и опирается в точке A на гладкую вертикальную стену. Определить реакции стены N и нити T.</td>
</tr>
<tr>
<td>2.


</td>
<td>Груз Q весом 100 кН с помощью троса, переброшенного через неподвижный блок E, прикреплен к точке D и удерживается в равновесии тремя идеальными стержнями, которые шарнирно присоединены к этой точке. Определить усилия в стержнях AD, BD и CD, если $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 30^0$, $\varepsilon = 30^0$. Трением в блоке пренебречь.</td>
</tr>
<tr>
<td>3.


</td>
<td>Через два неподвижных блока (без трения) переброшен невесомый трос, к которому прикреплены два одинаковых груза весом p. Посередине пролета, длиной L, к тросу подвешен груз весом Q. Определить, пренебрегая размерами блоков, расстояние x в положении равновесия.</td>
</tr>
</table>

4. 	Котел с равномерно распределенным по длине весом лежит на выступах каменной кладки. Пренебрегая трением найти давление котла на кладку в точках контакта, если $Q = 10$ кН, $R = 1$ м, $L = 1.2$ м.
5. 	На столб AO (идеальный стержень) высотой 6 м, укрепленный оттяжками AC и AD, которые симметрично расположены относительно плоскости yOz, действует сила натяжения провода T = 300 Н, которая направлена параллельно оси y. При этом $\angle COD$ = 120^0, а OC = OD = 4,5 м. Определить натяжения тросов в оттяжках и усилие, действующее на столб.

Вопросы для подготовки к занятиям и самоконтроля:

1.Что изучают в разделе статика курса теоретической механики?

2.Что называют абсолютно твердым телом?

3. Как определяют понятия силы и системы сил в статике?

4. Какие соотношения существуют между силами и системами сил? Приведите классификацию сил. (Какие системы сил называют эквивалентными ? Какая сила называется равнодействующей системы сил? Какую систему сил называют уравновешенной? Что такое сосредоточенные и распределенные силы?)

5. На каких аксиомах базируются теоретические положения статики?

6. Какое свойство силы, действующей на абсолютно твердое тело следует из первых двух аксиом?

7. Какие тела называют свободными и несвободными?

8. Что называют связью?

9. Какие силы называют активными силами и реакциями связей и чем они принципиально отличаются?

10. Какие основные связи могут быть наложены на абсолютно твердое тело? Какие реакции возникают в этих связях?

11. Какую совокупность сил называют системой сходящихся сил?

12. Как сформулировать условие равновесия системы сходящихся сил в векторной форме?

13. Как записать аналитические условия равновесия системы сходящихся сил?

14. Как определяют проекцию силы на ось?

15. В чем заключается способ двойного проецирования вектора?

16. Какую совокупность сил называют системой сходящихся сил?

17. Из каких условий определяются реакции связей?

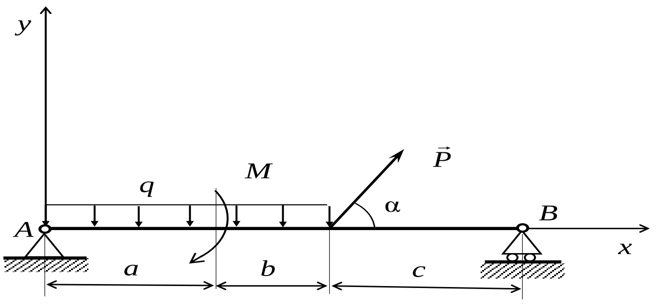
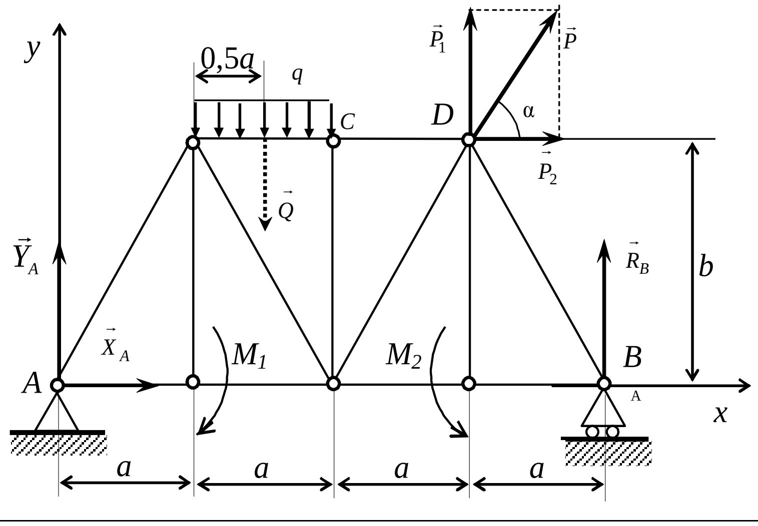
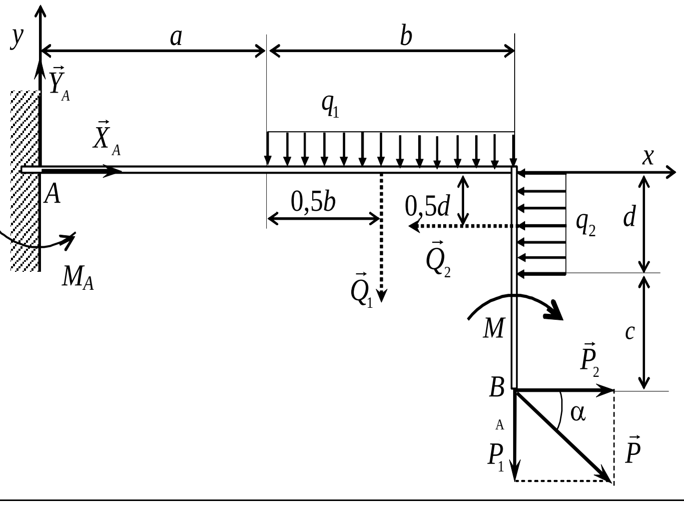
18. При выполнении каких условий задача поиска реакций связей является статически определенной?

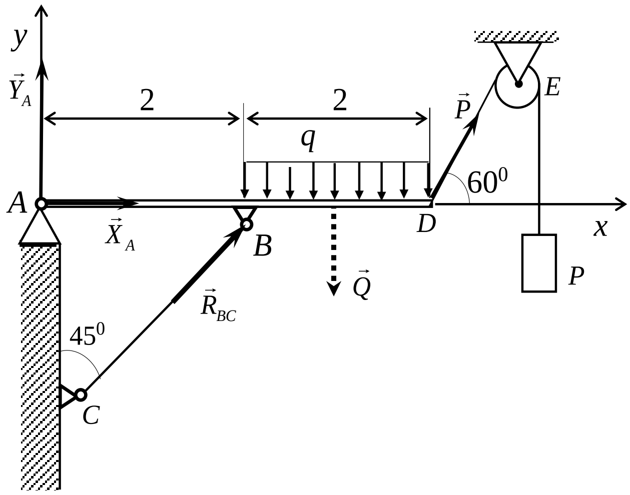
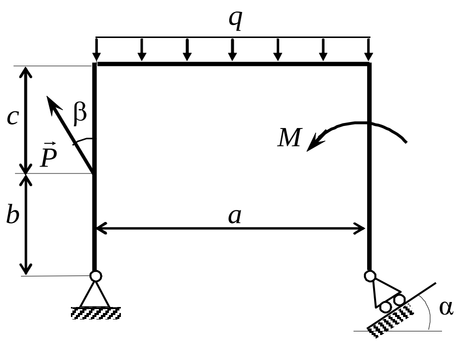
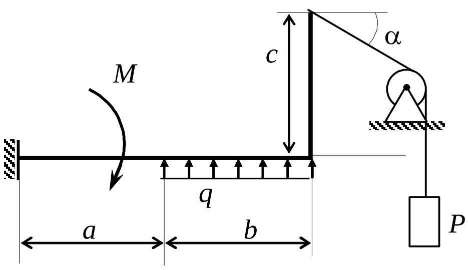
19. В каких случаях задача поиска реакций связей является статически неопределенной?

20. Какова последовательность решения задач об определении реакций связей?

21. Какой вывод следует сделать, если реакции некоторых связей оказались со знаком «минус»?

Занятие 2. Определение реакций связей тела при действии на него произвольной плоской системы сил.

6. 	Определить реакции связей A и B двухопорной балки, на.которую действуют: равномерно распределенная нагрузка q = 8 кН/м, сосредоточенная сила P = 30 кН и пара сил з алгебраическим моментом M = 20 кН·м, если: a = 3 м; b = 2 м; $\alpha = 60^0$.
7. 	Определить реакции связей A и B мостовой фермы , на которую действуют: равномерно распределенная нагрузка q = 5 кН/м, сосредоточенная сила P = 20 кН и две пары сил з алгебраическими моментами M_1 = 30 кН·м, M_2 = 15 кН·м, если a = 2 м; b = 3 м; $\alpha = 60^0$.
8. 	Определить реакции жесткой заделки A в ломаном стержне на который действуют: распределенные нагрузки q_1 и q_2, модули которых $q_1 = 2$ кН/м, $q_2 = 5$ кН/м, сила $\vec{P}$, $\lvert\vec{P}\rvert = 30$ кН, и пара сил с алгебраическим моментом M = 8 кНм. Геометрические параметры имеют значения: a = 2 м, b = 3 м, c = 1 м, d = 2 м, α = 30°.

9. 	Определить реакции плоского неподвижного шарнира A и идеального стержня BC балки, на которую действует равномерно распределенная нагрузка $q=4$ кН/м и сила $P=6$ кН. В данном случае эта сила передається на объект равновесия с помощью троса, который удерживает груз P. Трос переброшен через неподвижный блок E, трение в котором отсутствует. Размеры даны в метрах. Точки A, B и D считать расположенными на одной прямой.
10. 	Определить реакции связей рамы, на которую действует равномерно распределенная нагрузка $q=5$ кН/м, сила $P=4$кН и пара сил с алгебраическим моментом M = 6 кНм. $a=1$ м, $b=4$ м, $c=1.5$ м; $\alpha=30^0$, $\beta=60^0$.
11. 	Определить реакции связей конструкции, на которую действует равномерно распределенная нагрузка $q=7$ кН/м , сила $P=5$ кН и пара сил с алгебраическим моментом M =8 кНм. $a=2$ м, $b=4$ м, $c=1$ м; $\alpha=30^0$.

Вопросы для подготовки к занятиям и самоконтроля:

1. Какую совокупность сил называют произвольной плоской системой сил?
2. Чему равен момент силы относительно точки (центра)?
3. Чем характеризуется вращательное действие силы на тело, имеющее неподвижную ось? (Что называют моментом силы относительно оси?)
4. Как определить момент силы относительно оси?
5. Как определяют алгебраический момент силы относительно точки?
6. Что называют плечом силы относительно точки?
7. Как принято устанавливать знак алгебраического момента силы относительно точки?

8. Сформулируйте теорему Вариньона о моменте равнодействующей. Когда удобно использовать теорему Вариньона для нахождения момента силы относительно точки?

9. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?

10. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?

11. Какую систему сил называют парой сил, чему равен векторный момент пары и как определяют алгебраический момент пары сил?

12. Какие пары сил эквивалентны друг другу?

13. Какими основными свойствами обладает пара сил?

14. Каковы условия равновесия системы пар сил?

15. Какую эквивалентную замену применяют для равномерно распределенной нагрузки?

16. Каким образом можно осуществить параллельный перенос силы в произвольную точку абсолютно твердого тела?

17. Что называют главным вектором и главным моментом произвольной системы сил?

18. В чем состоит основная теорема статики о приведении произвольной системы сил к данному центру?

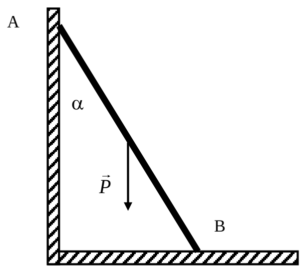
19. К чему приводятся силы реакции заделки к точке?

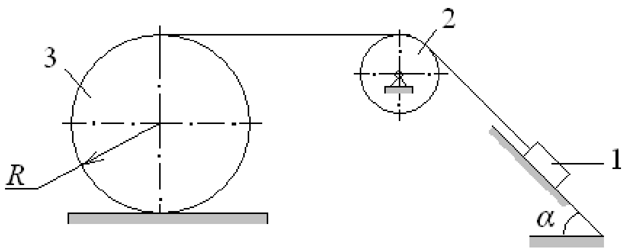
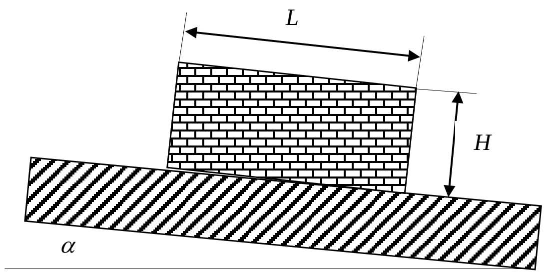
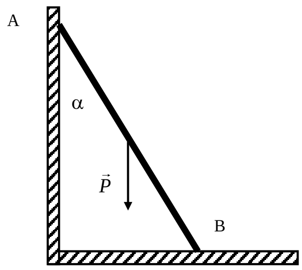
20. Как формулируются условия равновесия произвольной системы сил в векторной и аналитической форме?

21. Как записывают условия равновесия произвольной плоской системы сил в основной и в дополнительных формах?

22. Каким образом можно проверить правильность решения задачи и оценить его точность?

Занятие 3. Определение реакций связей тела при действии на него произвольной плоской системы сил. Равновесие тела при наличии трения.

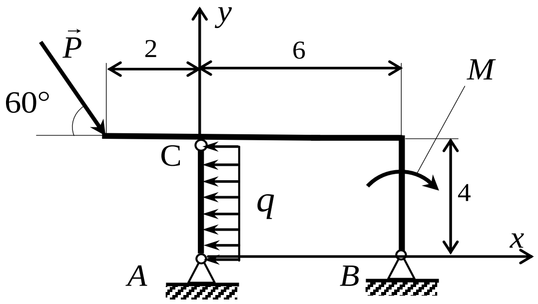
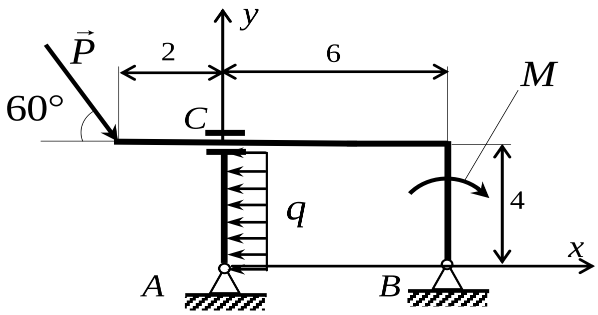
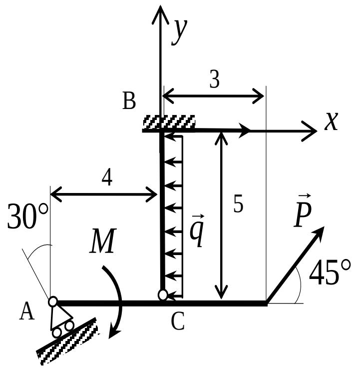
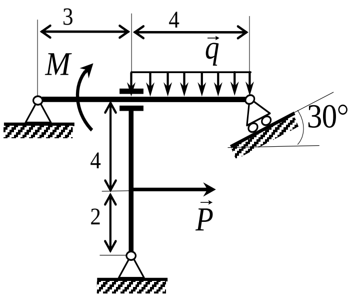
12. 	К вертикальной стене приставлена лестница, опирающаяся своим концом на горизонтальный пол. Коэффициент трения лестницы о стену равен f_1, о пол f_2. Вес лестницы вместе с человеком равен P и приложен посередине лестницы. Определить наибольший угол α, составляемый лестницей со стеной в положении равновесия, а также нормальные составляющие реакций стены N_1 и пола N_2 для этого значения α.

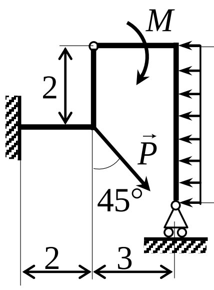
13. 	На шероховатой наклонной плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, находится тело 1, которое связано нерастяжимой невесомой нитью с катком 3. Нить перекинута через неподвижный невесомый блок 2. Коэффициент трения скольжения между брусом и наклонной плоскостью *f*, коэффициент трения качения между катком и горизонтальной плоскостью - δ. Считая массу катка равной *m*, определить максимальную массу тела 1, при которой система тел останется в равновесии.
14. 	На шероховатой наклонной плоскости находится груз (однородный параллелепипед). Коэффициент трения скольжения равен f. При каком наименьшем наклоне плоскости к горизонтали (угле α) призойдет скольжение груза или его опрокидывание (груз потеряет статическую устойчивость)?
15. 	К вертикальной стене приставлена лестница, опирающаяся своим концом на горизонтальный пол. Коэффициент трения лестницы о стену равен $f_1 = 0$ (стена гладкая), о пол f_2. Вес лестницы вместе с человеком равен P и приложен посередине лестницы. Определить наибольший угол α, составляемый лестницей со стеной в положении равновесия, а также нормальные составляющие реакций стены N_1 и пола N_2 для этого значения α.

Вопросы для подготовки к занятиям и самоконтроля:

1. Как определяют радиус-вектор и координаты центра тяжести тела?
2. Каким образом в статике учитывают действие сил сухого трения на твердое тело?
3. Что такое конус трения?
4. В чем заключаются особенности решения задач статики при наличии сил трения?

Занятие 4. Определение реакций связей системы двух тел при действии на нее произвольной плоской системы сил.

<table>
<tr><td>16.

</td><td>Конструкция состоит из двух тел, которые соединены между собой цилиндрическим неподвижным плоским шарниром C. Размеры приведены в метрах. $P = 10$ кН; $M = 12$ кНм; $q = 5$ кН/м.
Определить реакции внешних и внутренних связей.</td></tr>
<tr><td>17.

</td><td>Решить предыдущую задачу при условии, что тела конструкции соединены скользящей заделкой.</td></tr>
<tr><td>18.

</td><td>Определить реакции внешних связей для конструкции, состоящей из двух тел. Размеры даны в метрах. Нагрузки: $P = 14$ кН; $M = 6$ кНм; $q = 3$ кН/м.</td></tr>
<tr><td>19.

</td><td>Определить реакции внешних связей для конструкции, состоящей из двух тел. Размеры даны в метрах. Нагрузки: $P = 8$ кН; $M = 20$ кНм; $q = 3$ кН/м.</td></tr>
</table>

20. 	Определить реакции внешних связей для конструкции, состоящей из двух тел. Размеры даны в метрах. Нагрузки: $P = 20$ кН; $M = 5$ кНм; $q = 2$ кН/м.

Вопросы для подготовки к занятиям и самоконтроля:

1. Что понимают под системой тел?
2. Какие связи называют внешними?
3. Какие связи называют внутренними?
4. На основе какого принципа из равновесия системы тел следует равновесие каждого тела в отдельности?
5. Каким условиям отвечают реакции внутренних связей, действующих на тела системы?
6. Какая последовательность решения задачи определения реакций внешних и внутренних связей?

Раздел 2. Кинематика

Занятие 5. Исследование кинематических характеристик точки по заданному закону ее движения.

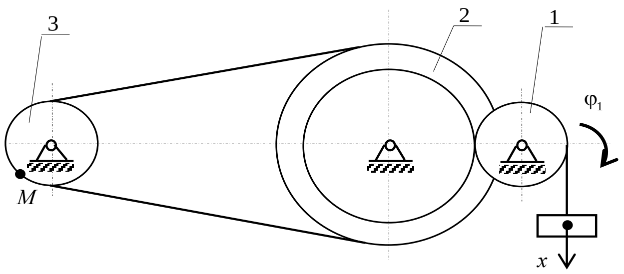
21. Точка *M* движется в плоскости *xOy* в соответствии с уравнениями: $$\begin{cases} x = 4\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) + 6, \text{ см} \\ y = -2\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) + 4, \text{ см} \end{cases}.$$ Для момента времени t_1= 0,5с найти положение точки *M* на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.	22. Точка *M* движется в плоскости *xOy* в соответствии с уравнениями: $$\begin{cases} x = -6t, \text{ см} \\ y = 2t^2 - 4, \text{ см} \end{cases}.$$ Для момента времени t_1= 1 с найти положение точки *M* на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.
23. Точка *M* движется в плоскости *xOy* в соответствии с уравнениями: $$\begin{cases} x = 8\cos^2\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) + 2, \text{ см} \\ y = -8\sin^2\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) - 7, \text{ см} \end{cases}.$$ Для момента времени t_1= 0,5 с найти положение точки *M* на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.	24. Точка *M* движется в плоскости *xOy* в соответствии с уравнениями: $$\begin{cases} x = 4t + 4, \text{ см} \\ y = -\dfrac{4}{t+1}, \text{ см} \end{cases}.$$ Для момента времени t_1= 2с найти положение точки *M* на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Вопросы для подготовки к занятиям и самоконтроля:

1. В чем заключаются задачи кинематики точки?
2. Что такое система отчета?
3. Что такое закон и траектория движения точки?
4. Какие способы применяют для задания движения точки? Как задается закон движения в каждом из них?
5. Какая связь существует между координатным и естественным способом задания движения точки?
6. По каким формулам определяют скорость точки при различных способах задания ее движения?
7. По каким формулам определяют ускорение точки при различных способах задания ее движения?
8. Как определить уравнение траектории, если движение задано координатным способом?
9. Как определить кривизну траектории движения точки, если закон движения задан координатным способом (в декартовых координатах)?

Занятие 6. Преобразование простейших движений твердых тел.

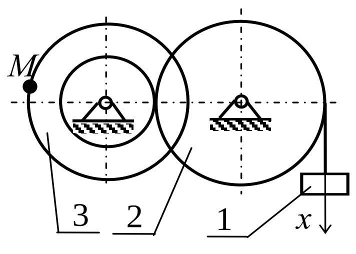
25.



Для механизма, где ведущим звеном является груз определить кинематические характеристики тел 1,2 и 3, а также скорость и ускорение точки M для момента времени $t = t_1 = 1$ c.

Закон изменения вертикальной координаты груза $x(t) = 30 + 10t^2$, см; радиусы колес $R_1 = R_3 = 10$ см, $R_2 = 30$ см, $r_2 = 20$ см.

26.

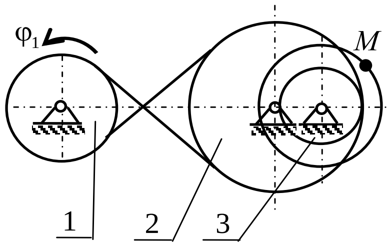


$x = 5t^2 - 4$

R_1, см	R_2, см	r_2, см	R_3, см	r_3, см	Момент времени, с
–	40	–	40	20	1

$t = t_1 = 1$ с.

27.

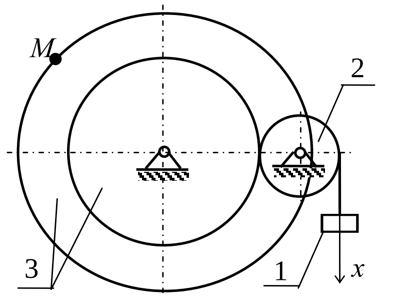


$\varphi_1 = 3 + 2t^2$

R_1, см	R_2, см	r_2, см	R_3, см	r_3, см	Момент времени, с
30	60	–	30	20	2

$t = t_1 = 1$ с.

28.



$x = 4 + t^2$

R_1, см	R_2, см	r_2, см	R_3, см	r_3, см	Момент времени, с
–	10	–	80	40	1

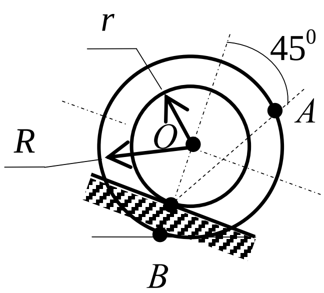
$t = t_1 = 1$ с.

Вопросы для подготовки к занятиям и самоконтроля:

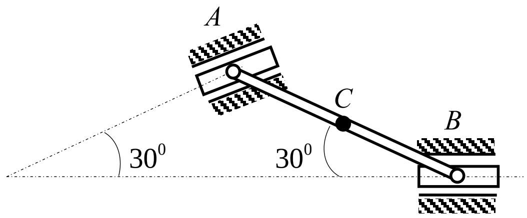
1. В чем заключаются задачи кинематики абсолютно твердого тела?
2. Что называют степенями свободы твердого тела?
3. Сколько степеней свободы имеет твердое тело в общем случае его движения в пространстве?
4. Какие виды движения твердого тела называют простейшими?
5. Какое движение твердого тела называют поступательным? Каковы его основные свойства?
6. Какое движение твердого тела называют вращением вокруг неподвижной оси? Как задается закон этого движения?
7. Каковы основные кинематические характеристики движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
8. Как связаны между собой угол поворота тела, угловая скорость и угловое ускорение при вращательном движении?
9. Как направлены векторы угловой скорости и углового ускорения при вращательном движении?
10. По каким формулам определяются скорости и ускорения точек тела при его вращательном движении?
11. Что называют механизмом и кинематической цепью?
12. При каких условиях вращательное движение одного тела превращается во вращательное движение другого тела?
13. При каких условиях поступательное движение одного тела преобразуется во вращательное движение другого тела и наоборот?

Занятие 7. Плоскопараллельное движение твердого тела. Определение скоростей точек и угловой скорости тела.

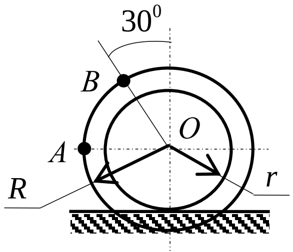
<table>
<tr>
<td>
29.



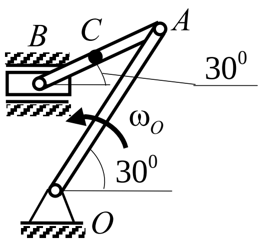
</td>
<td>Катушка катится без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному пути. Найти угловую скорость катушки и скорости точек O и B, если в рассматриваемый момент времени $v_A = 2$ м/с, $r = 0.6$ м, $R = 1$ м.</td>
</tr>
<tr>
<td>
30.



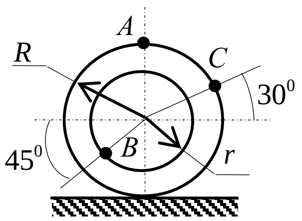
</td>
<td>Стержень AB имеет на концах ползуны, один из которых A скользит по прямолинейной направляющей со скоростью $v_A = 1$ м/с. Найти в заданном положении угловую скорость стержня, скорости точек B и C, если $AB = 1{,}2$ м, $AC = BC$.</td>
</tr>
<tr>
<td>
31.



</td>
<td>Дано: $r = 2$ см, $R = 4$ см, $v_B = 10$ см/с.
Найти: ω, v_O, v_A.</td>
</tr>
<tr>
<td>
32.



</td>
<td>Дано:
$\omega_0 = 2$ рад/с; $OA = 2$ м; $AB = 1$ м; $AC = 0.4$ м.
Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.</td>
</tr>
<tr>
<td>
33.



</td>
<td>Дано: $r = 3$ см, $R = 4$ см, $v_C = 6$ см/с.
Найти: ω, v_A, v_B.</td>
</tr>
</table>

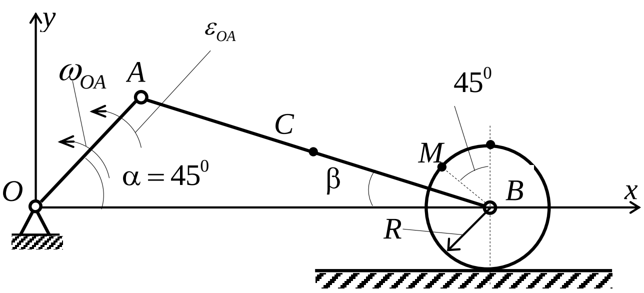
Вопросы для подготовки к занятиям и самоконтроля:

1. Какое движение твердого тела называют плоскопараллельным?
2. На какие простейшие движения можно разложить плоскопараллельное движение?
3. Какие уравнения описывают плоскопараллельное движение?
4. По каким формулам определяется угловая скорость тела, которое совершает плоское движение?
5. Как определяют скорость произвольной точки плоской фигуры, если известна скорость полюса?
6. Какую точку плоской фигуры называют мгновенным центром скоростей (МЦС)?
7. Как распределены скорости точек тела по отношению к МЦС?
8. Какие существуют способы определения положения МЦС?
9. Что такое мгновенно-поступательное движение?
10. Какие вы знаете приемы нахождения угловой скорости при плоском движении тела?

Занятие 8. Кинематический анализ плоского механизма.

<table>
<tr>
<td>

34.

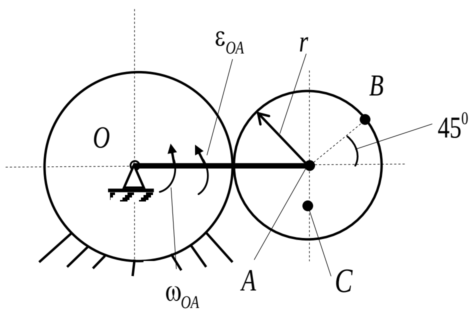


</td>
<td>

Механизм состоит из кривошипа OA, шатуна AB и колеса, которое может катиться без скольжения по горизонтальной плоскости. Длина кривошипа $OA = r = 0.2$ м; длина шатуна $AB = l = 0.4$ м; $AC = 0.2$ м; радиус колеса $R = 0.1$ м; угловая скорость кривошипа ω_{OA}=2 рад/с.; угловое ускорение кривошипа $\varepsilon_{OA} = 4$ рад/с^2. Для заданного положения механизма найти угловые скорости и угловые ускорения остальных звеньев механизма, а также скорости и ускорения точек A, B, C и M.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

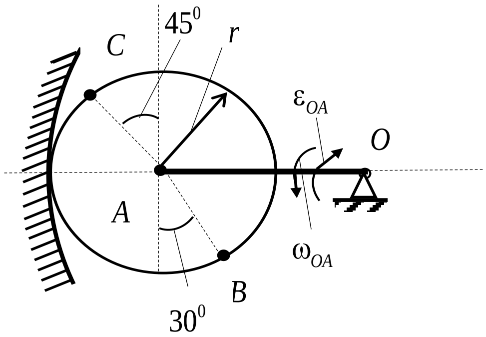
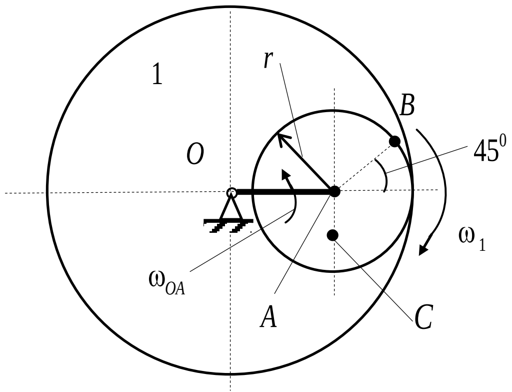
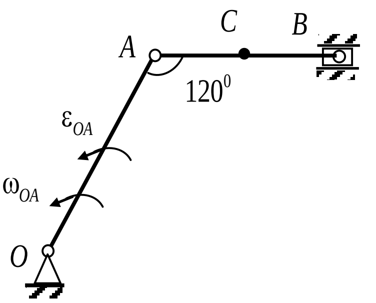
35.



</td>
<td>

$OA = 1.8$ м; $AC = 0.2$ м; радиус колеса $r = 0.5$ м; ω_{OA}=1.5 рад/с.; $\varepsilon_{OA} = 3$ рад/с^2. Для заданного положения механизма найти угловую скорость и угловое ускорение колеса, а также скорости и ускорения точек A, B, C .

</td>
</tr>
</table>

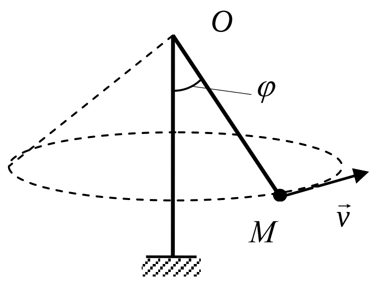
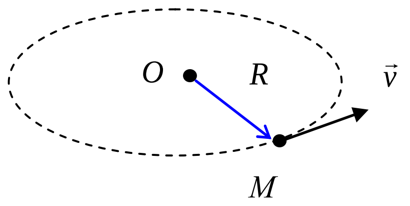
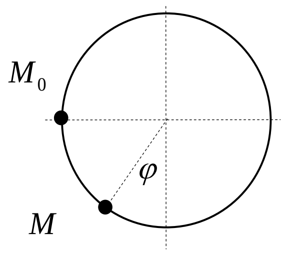
36. 	$OA = 1.2$ м; радиус колеса $r = 0.5$ м; ω_{OA} =1.2 рад/с.; $\varepsilon_{OA} = 2.5$ рад/с^2. Для заданного положения механизма найти угловую скорость и угловое ускорение колеса, а также скорости и ускорения точек A, B, C.
37. 	$OA = 0.6$ м; радиус колеса $r = 0.4$ м; ω_{OA} =1.2 рад/с.; $\omega_1 = 2.5$ рад/с. Для заданного положения механизма найти угловую скорость и угловое ускорение колеса, а также скорости и ускорения точек A, B, C.
38. 	$OA = 1.6$ м; $AB = 1.2$ м; $AC = 0.4$ м; ω_{OA} =1 рад/с.; $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2. Для заданного положения механизма найти угловую скорость и угловое ускорение колеса, а также скорости и ускорения точек A, B, C.

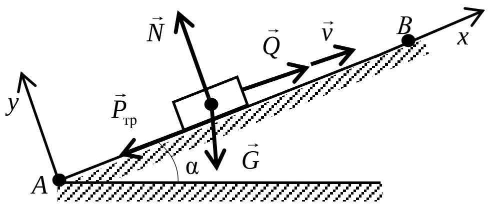
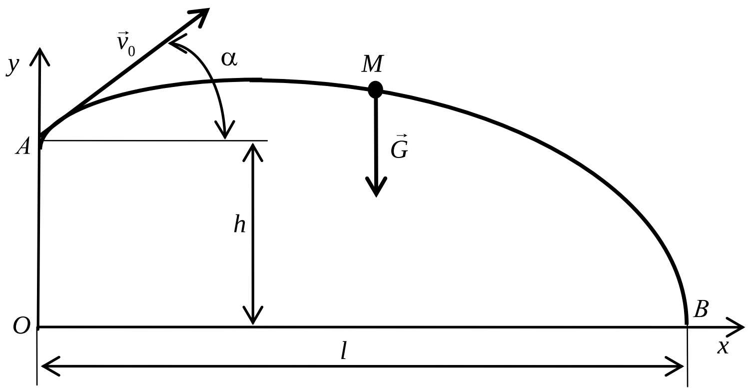
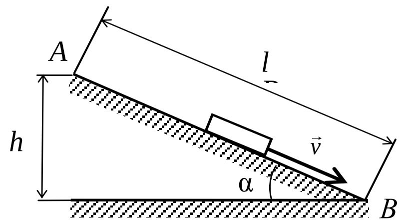
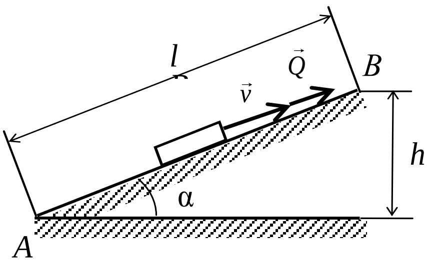
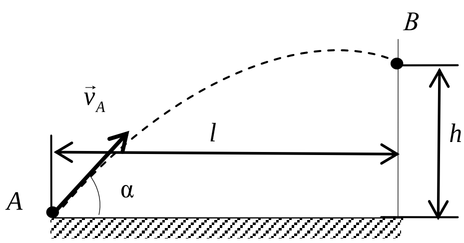
Вопросы для подготовки к занятиям и самоконтроля:

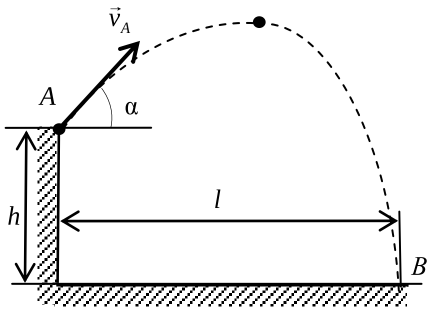
1. По какой формуле определяется угловое ускорение тела, которое совершает плоское движение?
2. По каким формулам можно определить ускорения точек тела, совершающего плоское движение?
3. Какие вы знаете способы нахождения углового ускорения при плоском движении тела?

Раздел 3. Динамика

Занятие 9. Задачи на определение сил по заданному закону движения (первая задача динамики). Интегрирование дифференциального уравнения движения точки (вторая задача динамики).

<table>
<tr><td>39.

</td><td>Груз М массой 0.102 кг, подвешенный на нити длиной 0.3 м в неподвижной точке О, представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости. Нить составляет с вертикалью угол $\varphi = 60^0$. Скорость груза $v = const$. Определить величину скорости груза и натяжение нити.</td></tr>
<tr><td>40.

</td><td>Мотоцикл едет по горизонтальной шероховатой плоскости, описывая дугу окружности радиусом R, с постоянной скоростью v. Определить но максимальное значение скорости, при котором мотоцикл не будет сносить с дороги, если коэффициент трения скольжения равен f ?</td></tr>
<tr><td colspan="2">41. Тело массой m падает в воздухе без начальной скорости. Сопротивление воздуха $R = k^2 mgv^2$ (величина k^2 характеризует зависимость силы сопротивления от формы тела). Определить: 1) зависимость скорости падения от времени; 2). Найти предельное значение скорости.
Ответ: $v = \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{kgt} - e^{-kgt}}{e^{kgt} + e^{-kgt}}; v_\infty = \frac{1}{k}$.</td></tr>
<tr><td>42.

</td><td>Точка М массы m движется под действием силы тяжести по гладкой внутренней поверхности полого цилиндра радиуса r. В начальный момент времени угол $\varphi = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, а скорость точки равнялась нулю. Определить скорость точки и реакцию поверхности при угле $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
Ответ: $v = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{gr}; T = \frac{3\sqrt{3}}{2} mg$.</td></tr>
</table>

43. 	Тело движется из точки A вверх по участку AB наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом, под действием силы Q, равной 1.5 веса груза. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости f = 0,1. В начальный момент скорость тела $v_0 = 10\,\text{м/с}$. Определить путь s, пройденный телом, и его скорость v за время t = 5 с.
44. 	Снаряд вылетает из орудия, находящегося на высоте h = 10 м под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту, с начальной скоростью v_0 = 600 м/с. Составить уравнения движения снаряда и уравнение его траектории, определить дальность полета, максимальную высоту полета, время полета, скорость снаряда в момент его падения, пренебрегая сопротивлением воздуха.
45. 	Дано $v_A = 10\,\text{м/с};\ \alpha = 30^0;\ t_1 = 3\,\text{с};\ f = 0{,}1$ Определить $v_B;\ h$
46. 	Дано $v_A = 6\,\text{м/с};\ v_B = 2\,\text{м/с};\ l = 10\,\text{м};\ Q = 0$ Определить $\alpha;\ t_1$
47. 	Дано $v_A = 100\,\text{м/с};\ \alpha = 45^0;\ h = 0$ Определить $l;\ x = f(t);\ y = f(t)$

48. 	Дано $l = 50000$ м; $h = 8000$ м; $t_1 = 70$ с Определить v_A; α

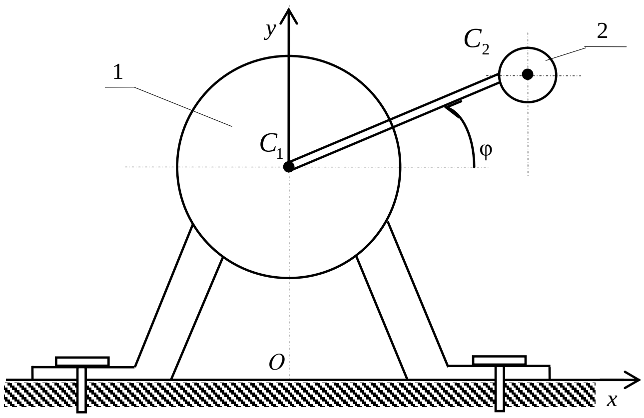
Вопросы для подготовки к занятиям и самоконтроля:

1. Что изучает динамика?
2. На каких законах базируется динамика?
3. Как записать дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме?
4. Как записать дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекциях на оси декартовой и естественной системы координат?
5. В чем суть принципа независимости действия сил на материальную точку?
6. Чем отличаются дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальных точек?
7. Как формулируется первая задача динамики материальной точки?
8. Какая методика применяется при решении первой задачи динамики точки?
9. Как формулируется вторая задача динамики материальной точки? Чем она отличается от первой?
10. Как записать общие решения системы дифференциальных уравнений движения точки в декартовой системе координат?
11. Как формулируются начальные условия движения точки?
12. Что такое постоянные интегрирования? Из каких условий они находятся?
13. Как получить уравнения действительного движения точки?
14. Какая методика применяется при решении второй задачи динамики точки?

Занятие 10. Задачи на применение теоремы о движении центра масс системы материальных точек. Задачи на применение теоремы об изменении главного вектора импульса системы.

49. В лодке диной 4 м, находящейся в покое, на средней скамейке (посредине лодки) сидят два человека. Один из них массой 50 кг переместился вправо на нос лодки. В каком направлении и на какое расстояние должен переместиться второй человек массой 70 кг, чтобы лодка осталась в покое? Сопротивлением воды пренебречь.

50-53.



Электродвигатель 1 весом G_1 установлен вертикально на идеально гладкой плоскости фундамента и закреплен на ней болтами. На его валу под прямым углом одним концом прикреплен невесомый стержень с грузом 2 весом G_2, расположенным на другом конце. Длина стержня $C_1C_2 = l$, угловая скорость ω вращения вала постоянна, уравнение вращения вала относительно проходящей через точку C_1 горизонтальной оси $\varphi = \omega t$.

50. Определить наибольшее горизонтальное усилие, действующее на болты.

51. Определить наибольшее вертикальное усилие, действующее со стороны двигателя на плоскость.

52. Записать уравнение движения электродвигателя по горизонтальной плоскости при отсутствии крепления болтами с учетом того, что механическая система в начальный момент времени была неподвижной.

53. Определить критическое значение угловой скорости, при увеличении которого незакрепленный в вертикальном направлении двигатель начнет отрываться от плоскости.

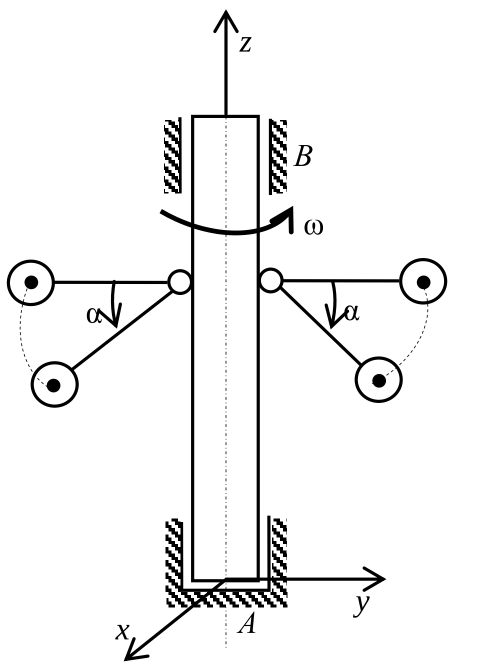
Вопросы для подготовки к занятиям и самоконтроля:

1. Что называется механической системой?
2. Какие существуют виды связей?
3. Как классифицируют силы, действующие на механическую систему?
4. Какие свойства имеют внутренние силы?
5. Запишите дифференциальные уравнения движения механической системы.
6. Как определить радиус-вектор центра масс механической системы?
7. Какие существуют меры механического движения и меры действия силы?
8. Что такое элементарный и полный импульс силы?
9. Что называют импульсом точки и главным вектором импульса механической системы?
10. Как формулируется теорема о движении центра масс?
11. Как формулируется теорема об изменении главного вектора импульса системы в дифференциальной форме?
12. Как формулируется теорема об изменении главного вектора импульса системы в интегральной форме?
13. Благодаря чему теореми про изменение главного вектора импульса ситемы и про движение цента масс позволяют исключить из рассмотрения внутренние силы системы?

14. В чем заключаются законы сохранения главного вектора импульса системы и движения центра масс?

15. Как формулируются дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела?

Занятие 11. Задачи на применение теоремы об изменении главного момента импульса системы.

54. 	Два невесомых стержня с точечными грузами на концах массой m и длиной l каждый закреплены шарнирами на вертикальном валу. Вал при горизонтальном расположении стержней вращается с угловой скоростью ω_0, его момент инерции относительно оси вращения I. В некоторый момент времени стержни начинают отклоняться от горизонтального положения. Определить угловую скорость вала в зависимости от угла α отклонения стержней от горизонтали. Сопротивление воздушной среды, подшипника и подпятника, в которых установлен вал, не учитывать.
55. Для определения момента трения в подшипниках вала на вал насажен маховик массы 500 кг. Радиус инерции маховика равен 1.5 м. Маховику сообщена угловая скорость 240 об/мин. Предоставленный самому себе он остановился через 10 минут. Определить момен6т трения, считая его постоянным.	56. Получить дифференциальное уравнение малых колебаний плоского математического маятника массой m и длиной нити, равной l. Для малых колебаний положить $\sin\varphi \approx \varphi$, где φ угол отклонения маятника от вертикали.

Вопросы для подготовки к занятиям и самоконтроля:

1. Дайте определение осевых и центробежных моментов инерции твердого тела. Что характеризуют моменты инерции?

2. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера (про моменты инерции тела относительно параллельных осей).

3. Какие оси называют главными центральными осями инерции?

4. По каким формулам определяют осевые моменты инерции некоторых простейших однородных тел?

5. Какая величина называется радиусом инерции и как с его помощью найти момент инерции?

6. Что называют моментом импульса точки и главным моментом импульса

системы?

7. Чему равен главный момент импульса твердого тела, которое вращается вокруг неподвижной оси, относительно оси вращения?

8. Как формулируется теорема об изменении момента импульса точки и главного момента импульса системы в векторной форме?

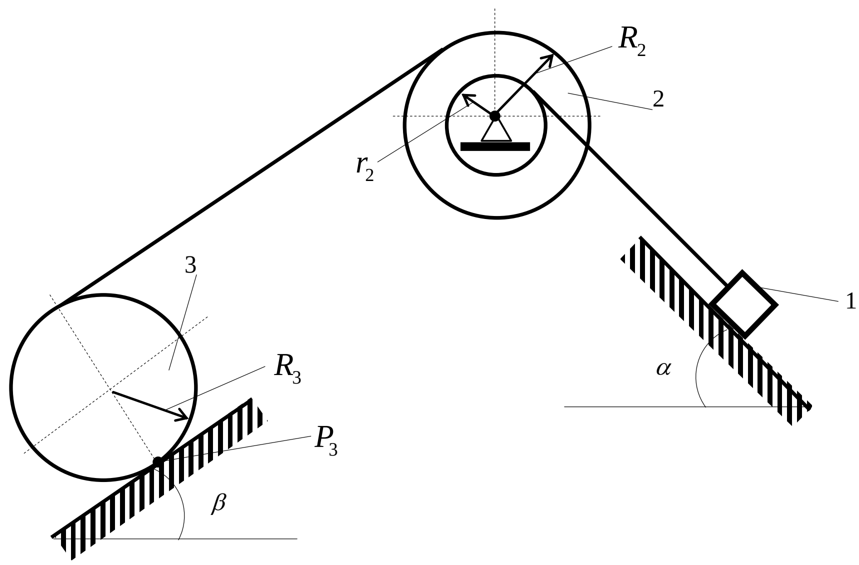
9. В чем состоит закон сохранения главного момента импульса системы?

10. Как записывается дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси?

11. Как записываются дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела?

Занятие 12. Задачи на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы.

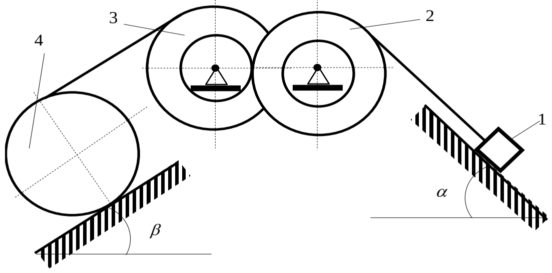
57.



m_1	m_2	m_3	m_4	ρ_2	ρ_3	δ	f
кг				м			
200	20	40	-	0,3	–	0.02	0,2

R_2	r_2	R_3	r_3	R_4	α	β	s	найти
м					град		м	-
0,5	0,35	0,4	–	–	30	45	0.5	ω_3

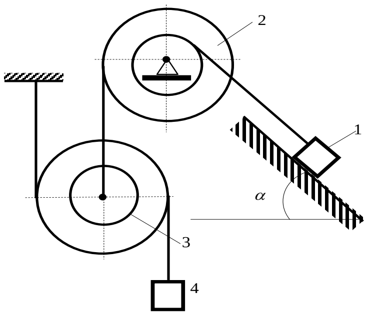
58.



m_1	m_2	m_3	m_4	ρ_2	ρ_3	δ	f
кг				м			
170	50	40	50	0,2	0,25	0,02	0.05

R_2	r_2	R_3	r_3	R_4	α	β	s	найти
м					град		м	-
0,5	0,25	0,4	0,2	0,4	45	30	0.6	v_1

59.



m_1	m_2	m_3	m_4	ρ_2	ρ_3	δ	f
кг				м			
200	45	50	60	0,35	0,2	–	0,1

R_2	r_2	R_3	r_3	R_4	α	β	s	найти
м					град		м	-
0,4	0,25	0,5	0,25	–	60	–	1.5	v_4

Указания. Механическая система приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести из положения указанного в расчетной схеме. m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел, входящих в систему (если тело не имеет номера, то его масса равна нулю). ρ_2, ρ_3– радиусы инерции тел *2* и *3*. Если радиус инерции тела, которое совершает вращательное или плоскопараллельное движение не указан, то тело является сплошным однородным цилиндром или диском. Величины δ – коэффициенты трения качения, которые катятся без скольжения по негладкой плоскости, а величины f – коэффициенты трения скольжения соответствующих тел, которые движутся поступательно по негладкой плоскости, а также тормозных колодок. R_2, r_2, R_3, r_3, R_4 – радиусы больших и малых ступеней ступенчатых тел, или тел простой формы. Углы α, β – углы наклона плоскостей.

Найти указанную величину в момент времени, когда путь, ройденный телом 1 равен s.

Вопросы для подготовки к занятиям и самоконтроля:

1. Какие величины называются кинетической энергией точки и механической системы?

2. Чему равна кинетическая энергия тела, которое совершает поступательное движение?

3. Чему равна кинетическая энергия тела, которое вращается вокруг неподвижной оси?

4. Чему равна кинетическая энергия тела, которое совершает плоское движение?

5. Как определяется элементарная и полная работа силы?

6. Чему равна полная работа силы тяжести?

7. Чему равна полная работа линейной силы упругости?

8. Чему равны полные работы сил трения скольжения и качения и какой знак они имеют?

9. Какая величина называется потенциальной энергией механической системы и для каких сил она определяется?

10. Чему равна полная работа силы, приложенной к телу, которое вращается вокруг неподвижной оси, на конечном угле поворота?

11. Какая величина называется мощностью силы?

12. Как формулируется теорема об изменении кинетической энергии материальной точки?

13. Как формулируется теорема об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме?

14. Как формулируется теорема про изменение кинетической энергии механической системы в интегральной форме?

15. Что такое полная механическая энергия?

16. Какая механическая система называется консервативной?

17. В чем состоит закон сохранения полной механической энергии для консервативных систем?

3. Условия задач для расчетно-графической работы

Тема: статика

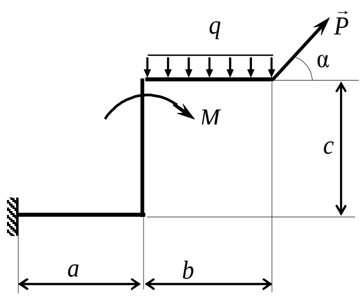
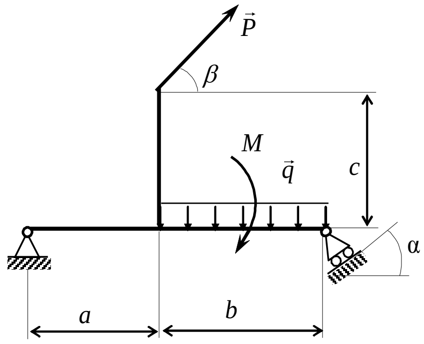
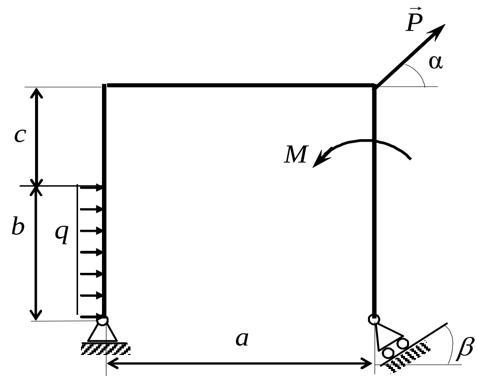
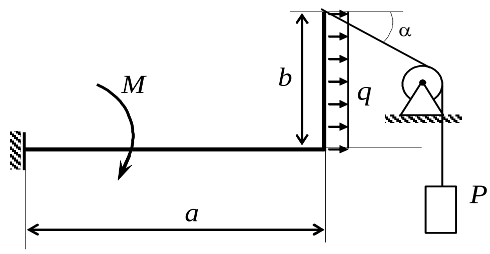
Задачи 1-20. Определение реакций связей тела при действии на него произвольной плоской системы сил.

В задачах 1-20 определить реакции связей и поизвести проверку правильности решения.

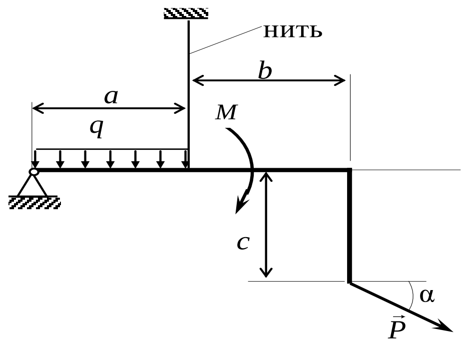
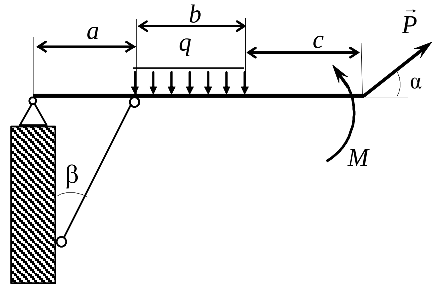
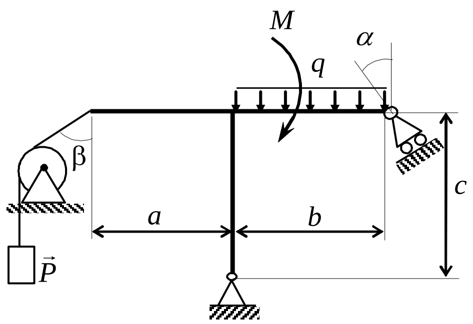
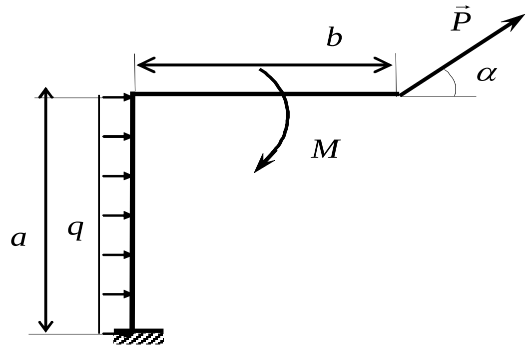
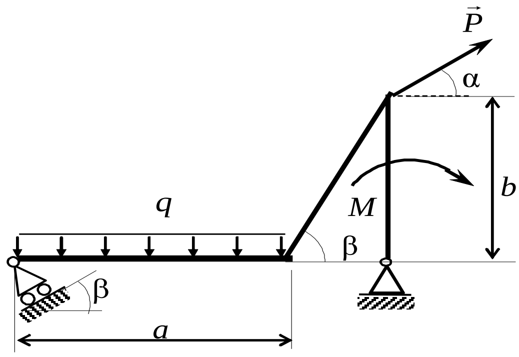
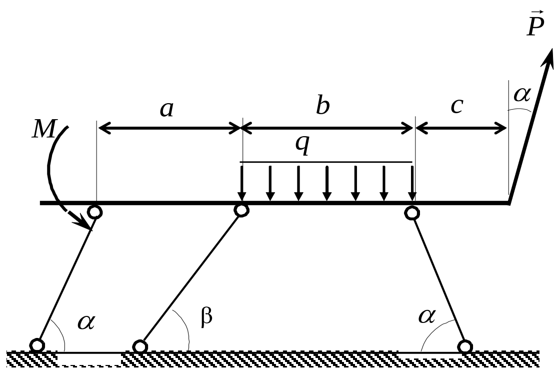
Расчетные схемы и исходные данные для каждой из задач 1-20 приведены в таблице 1 (номера задач указаны в верхнем левом углу ячейки).

Указания. В некоторых задачах нагрузка на рассматриваемое тело передается через неполвижный блок без трения. В этом случае величина силы, действующей на объект равновесиятся не меняется. Меняется только ее направление. Для проверки правильности решения следует записать дополнительное уравнение равновесия, не вошедшее в основную систему уравнений, записанных для решения и подставить в него полученные значения реакций.

Таблица 1

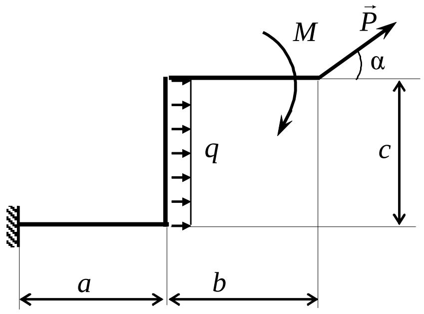
1.  *P=5*кН, q=*8*кН/м, *M=10*кНм, a=*1*м, b=*2*м, c=*1*м, α =*45* град.	2.  *P=10*кН, q=*4*кН/м, *M=5*кНм, a=*2*м, b=*1*м, c=*2*м, α =*30* град., β =*45* град.
3.  *P=12*кН, q=*2*кН/м, *M=15*кНм, a=*1*м, b=*2*м, c=*2*м, α =*60* град., β =*30* град.	4.  *P=15*кН, q=*3*кН/м, *M=6*кНм, a=*2*м, b=*1*м, c=1м, α =*45* град.

Продолжение таблицы 1

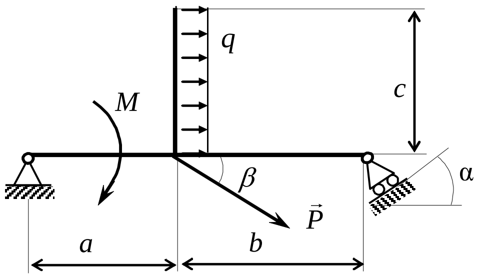
5.  *P*=6кН, q=5кН/м, *M*=4кНм, a=1м, b=1м, c=2м, α =30 град.	6.  *P*=8кН, q=7кН/м, *M*=3кНм, a=2м, b=2м, c=1м, α =60 град., β =30 град.
7.  *P*=4кН, q=8кН/м, *M*=10кНм, a=1м, b=2м, c=1м, α =45 град., β =60 град.	8.  *P*=10кН, q=4кН/м, *M*=5кНм, a=2м, b=1м, c=2м, α =30 град.
9.  *P*=12кН, q=2кН/м, *M*=15кНм, a=1м, b=2м, c=2м, α =60 град., β =45 град.	10.  *P*=5кН, q=3кН/м, *M*=6кНм, a=2м, b=1м, c=1м, α =45 град., β =60 град.

Продолжение таблицы 1

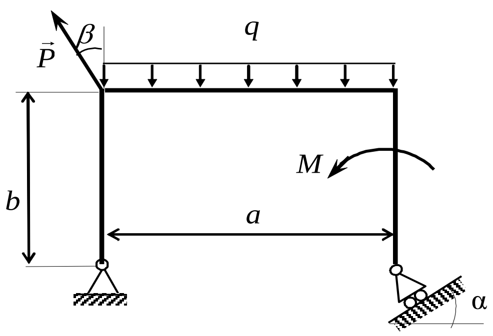
<table>
<tr>
<td>11.



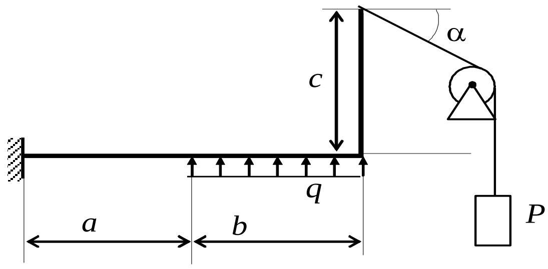
$P=7$кН, $q=5$кН/м, $M=4$кНм, $a=1$м, $b=1$м, $c=2$м, $\alpha=30$ град.</td>
<td>12.



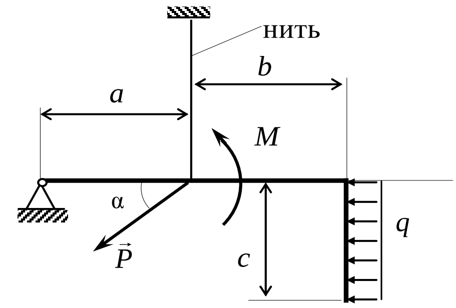
$P=9$кН, $q=7$кН/м, $M=3$кНм, $a=2$м, $b=2$м, $c=1$м, $\alpha=60$ град., $\beta=30$ град.</td>
</tr>
<tr>
<td>13.



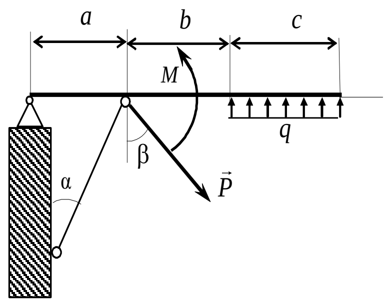
$P=12$кН, $q=8$кН/м, $M=10$кНм, $a=1$м, $b=2$м, $c=1$м, $\alpha=45$ град., $\beta=30$ град.</td>
<td>14.



$P=15$кН, $q=4$кН/м, $M=5$кНм, $a=2$м, $b=1$м, $c=2$м, $\alpha=30$ град.</td>
</tr>
<tr>
<td>15.

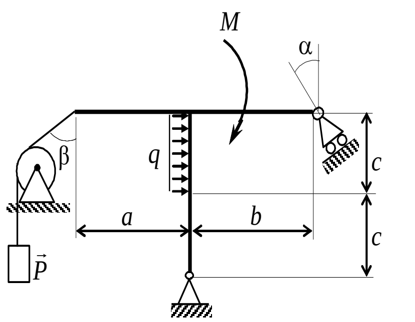
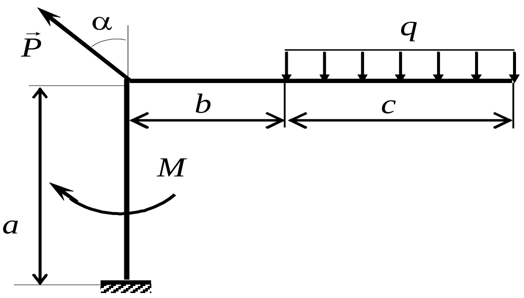
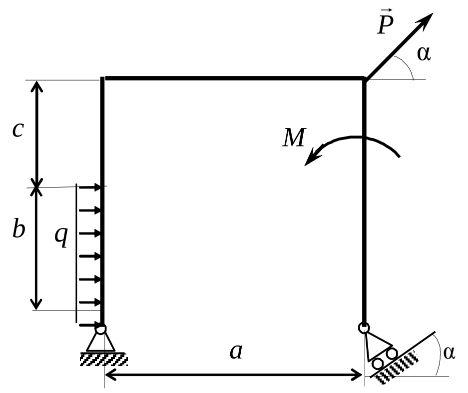
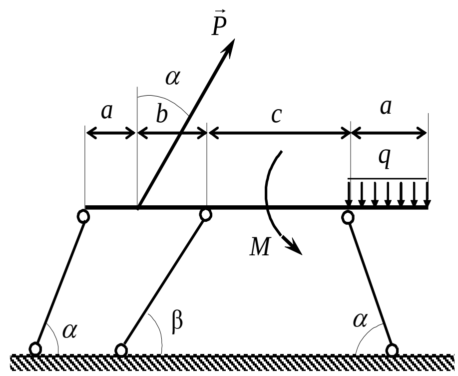


$P=4$кН, $q=2$кН/м, $M=15$кНм, $a=1$м, $b=2$м, $c=2$м, $\alpha=60$ град.</td>
<td>16.



$P=8$кН, $q=3$кН/м, $M=6$кНм, $a=2$м, $b=1$м, $c=1$м, $\alpha=45$ град., $\beta=60$ град.</td>
</tr>
</table>

Продолжение таблицы 1

17.  *P*=*6*кН, q=*5*кН/м, *M*=*4*кНм, a=*1*м, b=*1*м, c=*2*м, α =*30* град., β =*45* град.	18.  *P*=*12*кН, q=*7*кН/м, *M*=*3*кНм, a=*2*м, b=*2*м, c=*1*м, α =*60* град.
19.  *P*=*15*кН, q=*8*кН/м, *M*=*10*кНм, a=*1*м, b=*2*м, c=*1*м, α =*45* град.	20.  *P*=*4*кН, q=*4*кН/м, *M*=*5*кНм, a=*2*м, b=*1*м, c=*2*м, α =*30* град., β =*60* град.

Примеры выполнения задач 1-20

Пример 1. Определить реакции связей A и B мостовой фермы (рис.1), на которую действуют: равномерно распределенная нагрузка q = 5 кН/м, сосредоточенная сила P = 20 кН и две пары сил з алгебраическими моментами M_1 = 30 кН·м, M_2 = 15 кН·м, если a = 2 м; b = 3 м; α = 60^0.

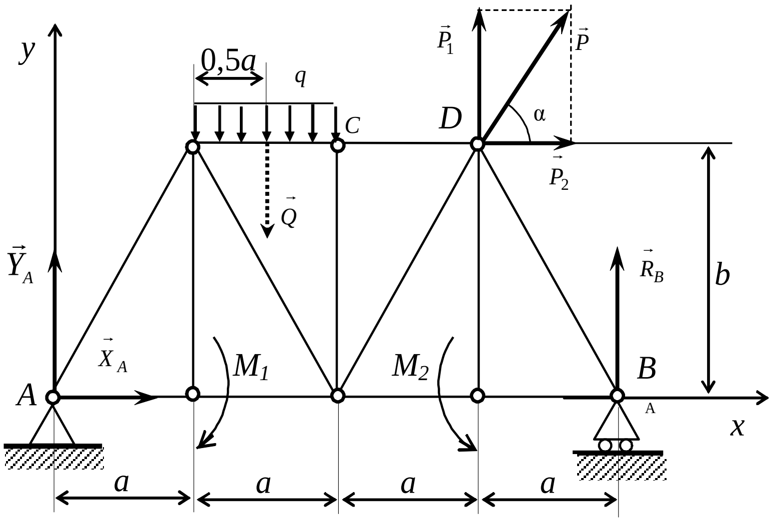


Рис. 1

Решение.

1) Объект равновесия – ферма, которая согласно принципу отвердевания считается абсолютно твердым телом.

2) Активные силы $-\vec{P}$, $\vec{Q}$ и пары сил M_1, M_2. Сила $\vec{Q}$ является равнодействующей распределенной нагрузки $\vec{q}$, модуль которой равен $Q = q \cdot a = 10$ кН. Приложена она посередине отрезка длиною a. Силу $\vec{P}$ разложим на составляющие $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, которые параллельны координатним осям:

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2.$$

Их модули равны:

$$P_1 = P\sin\alpha = 20\sin 60° = 17,32 \text{ кН};$$

$$P_2 = P\cos\alpha = 20\cos 60° = 10 \text{ кН}.$$

3) Отбрасывая связи (подшипник A и каток B), заменим их действие реакциями $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$. Реакция подшипника $\vec{R}_A$ представлена составляющими $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$.

4) Запишем уравнения равновесия полученной произвольной системы сил в выбранной системе координат.

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad X_A + P_2 = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0; \qquad Y_A + R_B + P_1 - Q = 0;$$
$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0; \qquad R_B \cdot 4a + P_1 \cdot 3a - P_2 \cdot b - Q \cdot 1{,}5a - M_1 + M_2 = 0.$$

5) Получаем систему трех уравнений з тремя неизвестными. Система статически определена.

6) Решаем систему уравнений и определяем реакции связей. Из первого уравнения: $X_A = -P_2 = -10\,\text{кН}$,

Из третьего: $$R_B = \frac{-P_1 \cdot 3a + P_2 \cdot b + Q \cdot 1{,}5a + M_1 - M_2}{4a} = -3{,}62\,\text{кН};$$

Из второго: $$Y_A = -R_B - P_1 + Q = -3{,}7\,\text{кН}.$$

Знаки «минус» у всех реакциях указывают на то, что их действительные направления противоположны принятым (см. рис. 1).

По полученным составляющим реакции в подшипнике A можно опрежелить модуль и направление реакции $\vec{R}_A$:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 10{,}66\,\text{кН}, \quad \cos\beta = \frac{X_A}{R_A} = -0{,}9381,$$

где β – угол между вектором реакции $\vec{R}_A$ и положительным направлением оси x.

Для проверки полученного решения запишем виражение для суммы моменов всех сил относительно, например, точки D (см. рис. 1):

$$\sum M_D(\vec{P}_k) = X_A \cdot b - Y_A \cdot 3a + R_B \cdot a + Q \cdot 1{,}5a - M_1 + M_2 =$$
$$= -30 + 22{,}2 - 7{,}24 + 30 - 30 + 15 = 67{,}2 - 67{,}24 = -0{,}04 \approx 0.$$

Определим относительную погрешность:

$$\delta = \frac{|-0{,}04|}{67{,}2} \cdot 100\,\% = 0{,}059\,\%,$$

которая не превышает 1% и связана с точностью расчетов.

Пример 2. Определить реакции жесткой заделки A в ломаном стержне (рис. 2), на который действуют: распределенные нагрузки q_1 и q_2, модули которых $q_1 = 2$ кН/м, $q_2 = 5\,$кН/м, сила $\vec{P}$, $|\vec{P}| = 30\,$кН, и пара сил с алгебраическим моментом M = 8 кНм. Геометрические параметры имеют значения: a = 2 м, b = 3 м, c = 1 м, d = 2 м, α = 30°.

Решение.

1) объект равновесия – ломаный стержень AB.

2) Активные силы: $\vec{P}$, $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ и пара сил M. Силы $\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2$ заменяют распределенные нагрузки q_1 и q_2. Их модули равны, соответственно, $Q_1 = q_1 \cdot b = 2 \cdot 3 = 6$

кН; $Q_2 = q_2 \cdot d = 5 \cdot 2 = 10$ кН. Приложены они посредине отрезков длиною b и d (рис. 2). Сила $\vec{P}$ разложена на составляющие $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$:

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2.$$

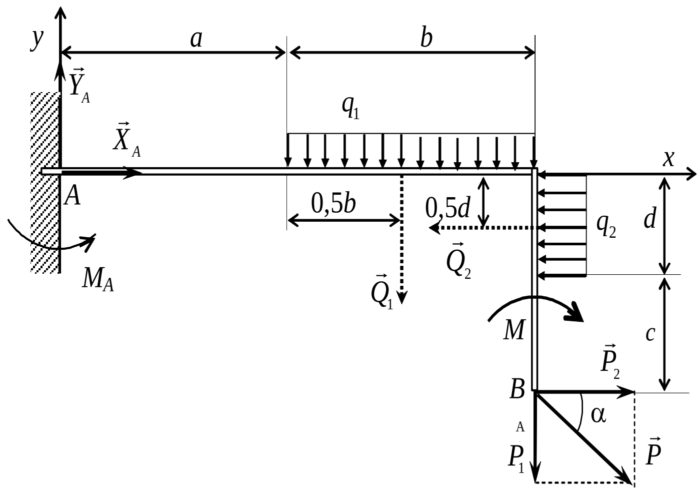


Рис. 2

Модули этих составляющих:

$$P_1 = P\sin\alpha = 30\sin 30^\circ = 15\,\text{кН}$$

$$P_2 = P\cos\alpha = 30\cos 30^\circ = 25{,}98\,\text{кН}.$$

Отбросим связь – жесткую заделку A и заменим ее действие на объект ровесия реакциями $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и парой сил M_A.

Запишем уравнения равновесия полученной произвольной плоской системы сил в выбранной системе координат:

$$X_A + P_2 - Q_2 = 0;$$

$$Y_A - P_1 - Q_1 = 0;$$

$$M_A - P_1 \cdot (a+b) + P_2 \cdot (d+c) - Q_1 \cdot (a + b/2) - Q_2 \cdot d/2 - M = 0.$$

3) Имеем статически определенную систему трех уравнений с тремя неивестными.

4) Решаем систему уравнений и определяем реакции связей.

Из первого уравнени получаем: $X_A = -P_2 + Q_2 = -15{,}98$ кН;

Из второго: $Y_A = P_1 + Q_1 = 21$ кН;

И из третьего:

$$M_A = P_1 \cdot (a+b) - P_2 \cdot (d+c) + Q_1 \cdot (a + b/2) + Q_2 \cdot d/2 + M = 36{,}06\ \text{кНм}.$$

Для проверки полученного решения запишем выражение суммы моментов всех сил, например, относительно точки B:

$$\sum M_B(\vec{P}_k) = -X_A \cdot (c+d) - Y_A \cdot (a+b) + Q_1 \cdot b/2 +$$
$$+Q_2 \cdot (c+d/2) - M + M_A = 113 - 113 = 0.$$

В этом примере относительная погрешность равна нулю.

Пример 3. Определить реакции плоского неподвижного шарнира A и идеального стержня BC балки (рис.3), на которую действует равномерно распределенная нагрузка $q = 4$ кН/м и сила $P = 6$ кН. В данном случае эта сила передається на объект равновесия с помощью троса, который удерживает груз P. Трос переброшен через неподвижный блок E, трение в котором отсутствует. Размеры даны в метрах. Точки A, B и D считать расположенными на одной прямой.

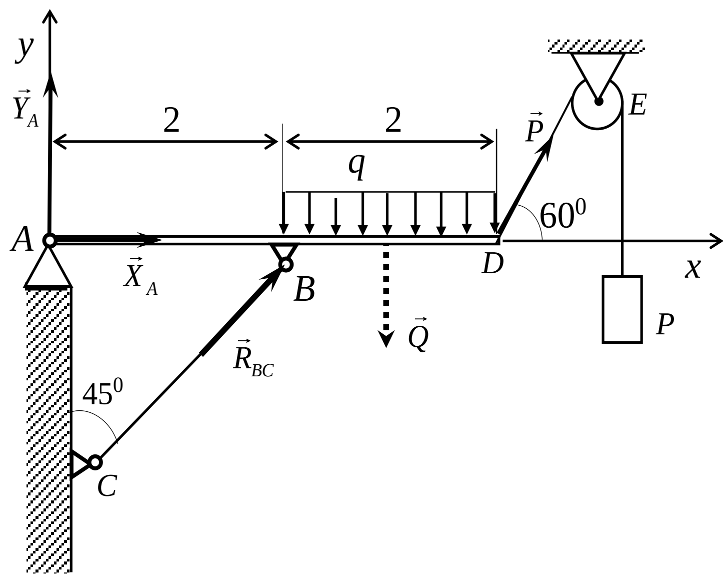


Рис. 3

Решение. Выполним последовательно пункты методики (см. предыдущие примеры) и запишем уравнения равновесия. В данном примере мы используем эквивалентную форму уравнений равновесия: суммы моментов относительно двух точек и сумму проекций на ось, которая не перпендикулярна прямой, проходяей через эти точки. Уравнения имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad X_A + R_{BC}\sin 45° + P\cos 60° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0; \qquad R_{BC} cos 45° \cdot 2 + P\sin 60° \cdot 4 - Q \cdot 3 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0; \qquad -Y_A \cdot 2 + P\sin 60° \cdot 2 - Q \cdot 1 = 0.$$

Решаем систему уравнений и определяем реакции связей. Из второго уравнения получаем: $R_{BC} = \dfrac{-P\sin 60° \cdot 4 + Q \cdot 3}{\sin 45° \cdot 2} = 2,274\,$кН;

из первого: $X_A = -R_{BC}\sin 45° - P\cos 60° = -4,608\,$кН;

и из третього: $$Y_A = \frac{P\sin 60^\circ \cdot 2 - Q\cdot 1}{2} = 1{,}196\,\text{кН}.$$

Для проверки запишем выражение суммы проекций всех сил на ось y:

$$\sum \vec{P}_{ky} = Y_A + R_{BC}\cos 45^\circ + P\sin 60^\circ - Q =$$
$$= 1{,}196 + 1{,}608 + 5{,}196 - 8 = 8 - 8 = 0.$$

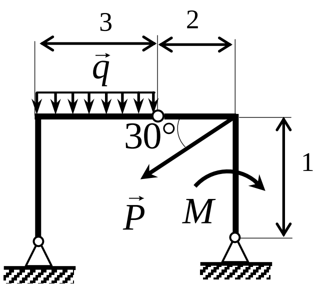
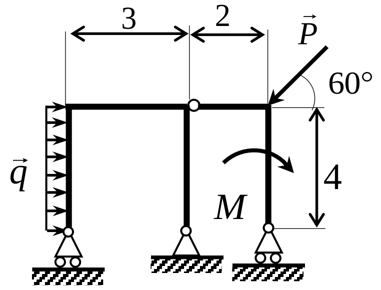
Задачи 21-40. Определение реакций связей системы двух тел при действии на нее произвольной плоской системы сил.

В задачах 21-40 определить реакции внешних и внутренних связей и поизвести проверку правильности решения.

Расчетные схемы и исходные данные каждой из задач 21-40 приведены в таблице 2 (номера задач укзаны в левом верхнем углу ячейки).

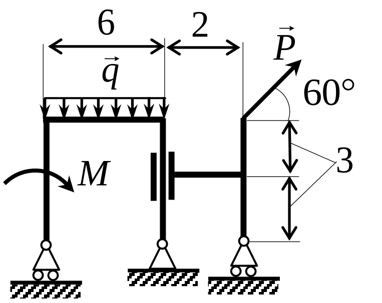
Указания. ***Системой тел*** называют совокупность двух и более абсолютно твердых тел, которые связаны между собой так, что могут совершать перемещения одно относительно другого, благодаря наличию допускающих эти перемещения ***внутренних связей***. Внутренние связи соединяют между собой тела системы в отличие от ***внешних связей***, соединяющих систему тел с телами, не входящими в систему. Если мысленно разделить систему тел на отдельные абсолютно твердые тела, то их взаимодействие определяется реакциями внутренних связей, которые, являются для этих тел силами действия и противодействия. Поэтому на основании 3-го закона Ньютона (см. аксиомы статики), эти реакции попарно равны по величине и противоположны по направлению. Если в равновесии находится система тел, взаимодействующих между собой за счет внутренних связей, то в равновесии находится и каждое тело системы в отдельности под действием приложенных к нему активных сил и реакций внешних и внутренних связей.

Таблица 2

21.  P=12кН, q=4кН/м, M=8кНм	22.  P=10кН, q=3кН/м, M=12кНм

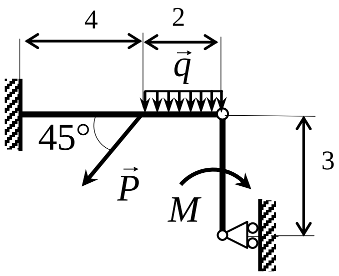
Продолжение таблицы 2

23.



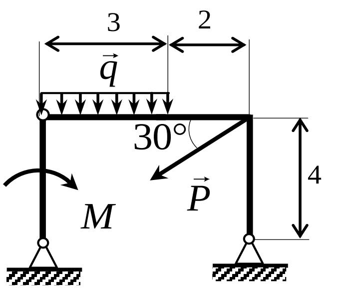
$P=8$кН, q=2кН/м, $M=15$кНм

24.



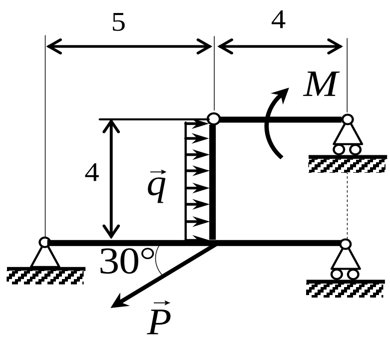
$P=6$кН, q=5кН/м, $M=10$кНм

25.



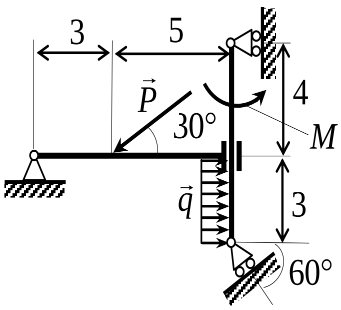
$P=12$кН, q=4кН/м, $M=8$кНм

26.



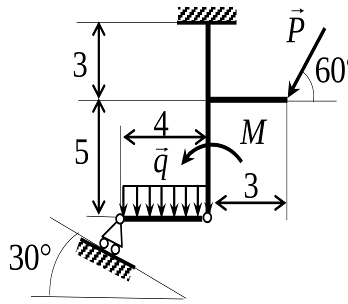
$P=10$кН, q=3кН/м, $M=12$кНм

27.



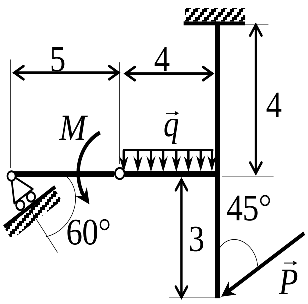
$P=8$кН, q=2кН/м, $M=15$кНм

28.



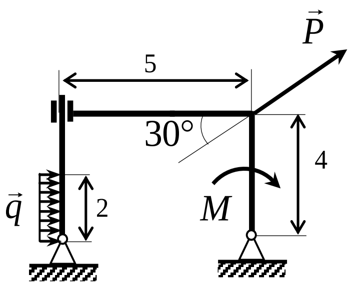
$P=6$кН, q=5кН/м, $M=10$кНм

29.



$P=12$кН, q=4кН/м, $M=8$кНм

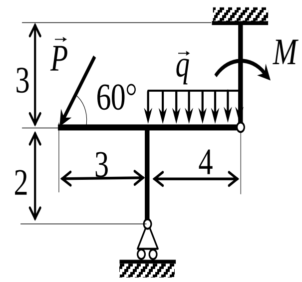
30.



$P=10$кН, q=3кН/м, $M=12$кНм

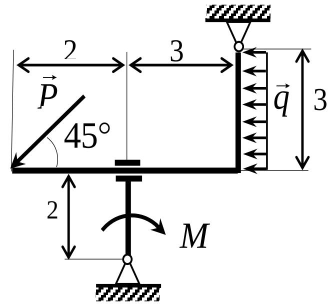
Продолжение таблицы 2

31.



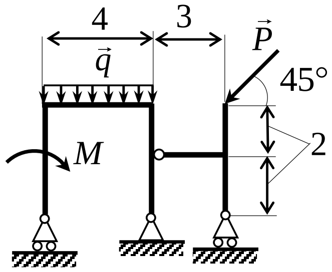
*P=8*кН, q=*2*кН/м, *M=15*кНм

32.



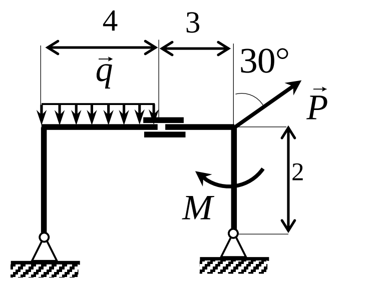
*P=6*кН, q=*5*кН/м, *M=10*кНм

33.



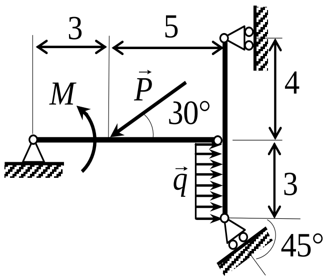
*P=12*кН, q=*4*кН/м, *M=8*кНм

34.



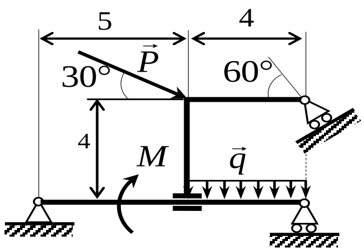
*P=10*кН, q=*3*кН/м, *M=12*кНм

35.



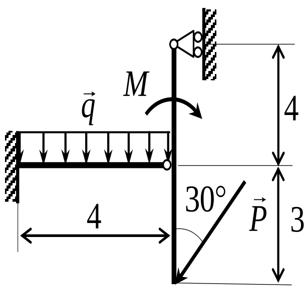
*P=8*кН, q=*2*кН/м, *M=15*кНм

36.



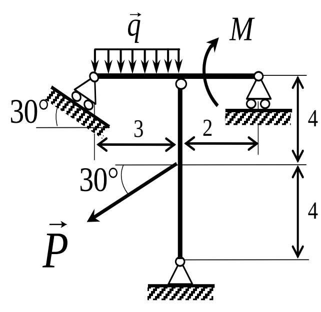
*P=6*кН, q=*5*кН/м, *M=10*кНм

37.



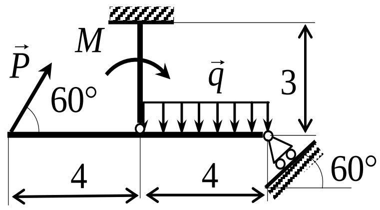
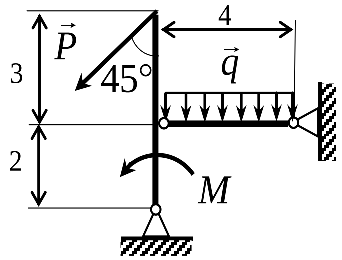
*P=12*кН, q=*4*кН/м, *M=8*кНм

38.



*P=10*кН, q=*3*кН/м, *M=12*кНм

Продолжение таблицы 2

39.	40.
 P=*8*кН, q=*2*кН/м, M=*15*кНм	 P=*6*кН, q=*5*кН/м, M=*10*кНм

Способы решения задачи. Можно сформулировать способы решения задачи об определении реакций связей для системы тел.

<u>Способ 1.</u>

1) система тел разбивается на отдельные тела;

2) к каждому из тел прикладываются активные силы, а также реакции внешних и внутренних связей. Напомним, что реакции внутренних связей, действующие на соседние тела, имеют одинаковые значения и противоположные направления;

3) для каждого тела записывается система уравнений равновесия;

4) проводится анализ существования единственного решения полученной совокупной системы уравнений: общее количество неизвестных реакций должно быть равно числу уравнений, а основная матрица системы уравнений должна быть неособенной. Положительные результаты анализа свидетельствует о том, что рассматриваемая задача является статически определенной и имеет единственное решение;

5) решается полученная система уравнений, и определяются все неизвестные реакции;

6) производится проверка полученных результатов. Для проверки необходимо составить дополнительные уравнения равновесия, которые не были использованы при решении задачи. Например, можно составить уравнения равновесия всей системы тел как одного твердого тела. При этом реакции внутренних связей не войдут в эти уравнения, а при подстановке в эти уравнения реакций внешних связей последние удовлетворятся с заданной точностью вычислений.

<u>Способ 2.</u>

1) рассматривается равновесие системы тел как одного абсолютно твердого тела;

2) к этому телу прикладываются активные силы, а также реакции внешних связей.

3) для рассматриваемого тела записывается система уравнений равновесия. Естественно, такая система уравнений не может быть решена, поскольку число неизвестных внешних реакций больше числа уравнений;

4) далее рассматриваются задачи о равновесии отдельных тел, число которых на единицу меньше общего числа тел системы (для системы двух тел рассматривается равновесие одного из них). К каждому из тел прикладываются активные силы, а также реакции внешних и внутренних связей и записываются соответствующие уравнения равновесия;

5) аналогично предыдущему способу проводится анализ существования единственного решения полученной совокупной системы уравнений;

6) решается система уравнений и определяются все неизвестные реакции;

7) производится проверка полученных результатов. Для проверки необходимо составить дополнительные уравнения равновесия, которые не были использованы при решении задачи.

Способ 3.

1) рассматривается равновесие системы тел как одного абсолютно твердого тела;

2) к этому телу прикладываются активные силы, а также реакции внешних связей.

3) для рассматриваемого тела записывается система уравнений равновесия. Естественно, такая система уравнений не может быть решена, поскольку число неизвестных внешних реакций больше числа уравнений;

4) далее составляются дополнительные уравнения, учитывающие характер внутренних связей. Смысл этих уравнений заключается в следующем. Поскольку каждая внутренняя связь допускает взаимные перемещения тел системы, а в действительности система тел находится в равновесии (неподвижна), то совокупность сил, действующих на систему по одну сторону от связи не вызывает соответствующего перемещения. Например, если рассматривается система двух тел, соединенных цилиндрическим плоским шарниром, то одно тело может вращаться относительно другого вокруг оси шарнира. Для отсутствия этого вращения необходимо, чтобы сумма моментов всех сил (включая реакции связей), расположенных по одну сторону от шарнира относительно оси шарнира равнялась нулю. Если два тела соединены скользящей заделкой, то должна быть равна нулю сумма проекций всех сил, приложенных по одну сторону от заделки на ось, вдоль которой не запрещено взаимное перемещение тел;

5) аналогично предыдущим способам проводится анализ существования единственного решения полученной совокупной системы уравнений;

6) решается система уравнений, определяются все неизвестные внешние реакции. Заметим, что если определение реакций внутренних связей не требуется, то этот способ наиболее экономичный, так как требует составления наименьшего числа уравнений;

7) производится проверка полученных результатов. Для проверки необходимо составить дополнительные уравнения равновесия, которые не были использованы при решении задачи.

Примеры выполнения задач 21-40

Пример 1. Конструкция состоит из двух тел, которые соединены между собой цилиндрическим неподвижным плоским шарниром C (рис. 4). Размеры приведены в метрах.

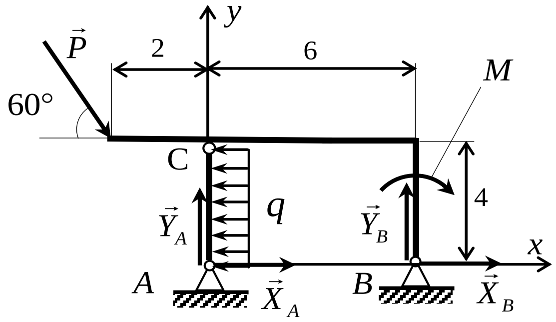


Рисунок 4

Нагрузка:

$$P = 10\text{ кН};\quad M = 12\text{ кНм};\quad q = 5\text{ кН/м}.$$

Определить реакции внешних и внутренних связей (соединение в точке C).

Способ 1.

1) разбиваем систему на два тела (рис. 5);

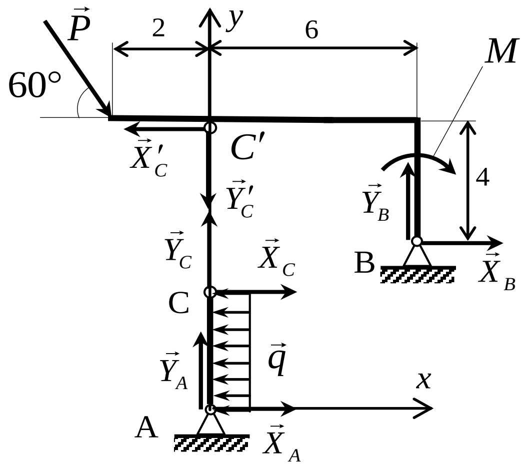


Рис. 5

2) к каждому из тел прикладываем активные силы, а также реакции внешних и внутренних связей. Напомним, что реакции внутренних связей, действующие на соседние тела, имеют противоположные направления;

3) для каждого тела записываем систему уравнений равновесия:

для тела AC

$$\sum F_{kx} = X_A + X_C - q\cdot 4 = 0;$$
$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0;$$
$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -X_C\cdot 4 + q\cdot 4\cdot 2 = 0;$$

для тела CB

$$\sum F_{kx} = X_B - X'_C + P\cdot\cos 60° = 0;$$
$$\sum F_{ky} = Y_B - Y'_C - P\cdot\sin 60° = 0;$$
$$\sum M_B(\vec{F}_k) = X'_C\cdot 4 + Y'_C\cdot 6 - P\cdot\cos 60°\cdot 4 + P\cdot\sin 60°\cdot 8 - M = 0.$$

Заметим, что

$$\left|\vec{X}'_C\right| = \left|\vec{X}_C\right|, \quad \left|\vec{Y}'_C\right| = \left|\vec{Y}'_C\right|,$$

а их противоположные направления учтены при составлении уравнений.

4) число неизвестных реакций и число уравнений совпадает и равно шести. В том, что решение единственное убедимся в процессе решения системы.

5) Решаем систему уравнений и определяем реакции внешних и внутренних связей.

Из третьего уравнения 1-й системы: $X_C = q\cdot 2 = 10$ кН.

Из первого уравнения 1-й системы: $X_A = q\cdot 4 - X_C = 10$ кН.

Из первого уравнения 2-й системы: $X_B = X'_C - P\cdot\cos 60° = 5$ кН.

Из третьего уравнения 2-й системы:

$$Y'_C = \frac{-X'_C\cdot 4 + P\cdot\cos 60°\cdot 4 - P\cdot\sin 60°\cdot 8 + M}{6} = -12{,}88 \text{ кН}.$$

Из второго уравнения 1-й системы: $Y_A = -Y_C = 12{,}88$ кН.

Из второго уравнения 2-й системы: $Y_B = Y'_C + P\cdot\sin 60° = -4{,}22$ кН.

6) Для проверки полученных результатов запишем уравнения равновесия для всей системы (см. рис 4) и подставим в них полученные значения реакций внешних связей.

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B + P\cdot\cos 60° - q\cdot 4 = 10 + 5 + 5 - 20 = 0;$$
$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_B - P\cdot\sin 60° = 12.88 - 4.22 - 8.66 = 0;$$
$$\sum M_A(\vec{F}_k) = Y_B\cdot 6 - P\cdot\cos 60°\cdot 4 + P\cdot\sin 60°\cdot 2 - M + q\cdot 4\cdot 2 =$$
$$= -25.36 - 20 + 17.32 - 12 + 40 \approx 0.$$

Таким образом, задача решена правильно.

<u>Способ 2 для примера 1.</u>

1) Запишем уравнения равновесия для системы тел как одного абсолютно твердого тела (см. рис. 4).

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B + P\cdot\cos 60° - q\cdot 4 = 0;$$
$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_B - P\cdot\sin 60° = 0;$$
$$\sum M_A(\vec{F}_k) = Y_B\cdot 6 - P\cdot\cos 60°\cdot 4 + P\cdot\sin 60°\cdot 2 - M + q\cdot 4\cdot 2 = 0.$$

2) Запишем уравнения равновесия для тела CB (см. рис. 5)

$$\sum F_{kx} = X_B - X'_C + P\cdot\cos 60° = 0;$$
$$\sum F_{ky} = Y_B - Y'_C - P\cdot\sin 60° = 0;$$
$$\sum M_B(\vec{F}_k) = X'_C\cdot 4 + Y'_C\cdot 6 - P\cdot\cos 60°\cdot 4 + P\cdot\sin 60°\cdot 8 - M = 0.$$

3) Решаем полученную систему уравнений и определяем все неизвестные реакции. Из третьего уравнения 1-й системы:

$$Y_B = \frac{P\cdot\cos 60°\cdot 4 - P\cdot\sin 60°\cdot 2 + M - q\cdot 4\cdot 2}{6} =$$
$$= \frac{20 - 17,32 + 12 - 40}{6} = -4,22 \text{ кН.}$$

Из второго уравнения 1-й системы:

$$Y_A = -Y_B + P\cdot\sin 60^0 = 4,22 + 8,66 = 12,88 \text{ кН.}$$

Из второго уравнения 2-й системы:

$$Y_{C'} = Y_B - P\cdot\sin 60^0 = -4,22 - 8,66 = -12,88 \text{ кН.}$$

Из третьего уравнения 2-й системы определяем

$$X'_C = \frac{-Y'_C\cdot 6 + P\cdot\cos 60°\cdot 4 - P\cdot\sin 60°\cdot 8 + M}{4} =$$
$$= \frac{77,28 + 20 - 69,28 + 12}{4} = 10 \text{ кН.}$$

Из первого уравнения 2-й системы

$$X_B = X_{C'} - P\cdot\cos 60° = 10 - 5 = 5 \text{ кН.}$$

И, наконец, из первого уравнения 1-й системы

$$X_A = -X_B - P\cdot\cos 60° + q\cdot 4 = -5 - 5 + 20 = 10 \text{ кН.}$$

Как видно, все результаты совпали с результатами, полученными первым способом.

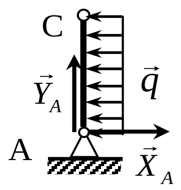
4) Проверку можно провести, составив, например, уравнения равновесия для тела АС и подставив в них полученные значения реакций.

<u>Способ 3 для примера 1</u>

1) Как и во втором способе рассмотрим равновесие всей системы тел и запишем уравнения равновесия (см. рис. 4).

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B + P\cdot\cos 60° - q\cdot 4 = 0;$$
$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_B - P\cdot\sin 60° = 0;$$
$$\sum M_A(\vec{F}_k) = Y_B\cdot 6 - P\cdot\cos 60°\cdot 4 + P\cdot\sin 60°\cdot 2 - M + q\cdot 4\cdot 2 = 0.$$

Этих трех уравнений недостаточно для определения четырех неизвестных реакций внешних связей. Однако, если отбросить эти связи, то конструкция, которая останется, становится системой двух тел. Эти тела могут совершать одно относительно другого вращение вокруг оси шарнира C. Отсутствие такого вращения приводит к дополнительному условию: сумма алгебраических моментов относительно точки C всех сил, включая реакции внешних связей, действующих на любое из тел по одну сторону шарнира должна равняться нулю. Проще всего записать такое условие для тела АС:



$$\sum M_C(\vec{F}_k^{(1)}) = X_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0.$$

Теперь можно совместно решить систему 4-х уравнений с 4-мя неизвестными. Из последнего получим:

$$X_A = 2 \cdot q = 10 \text{ кН}.$$

Из первого уравнения:

$$X_B = -X_A - P \cdot \cos 60° + q \cdot 4 = 5 \text{ кН}.$$

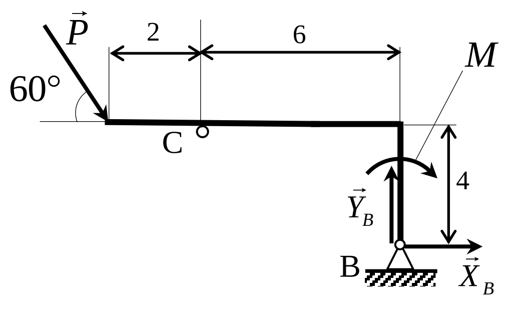
Из третьего уравнения:

$$Y_B = \frac{P \cdot \cos 60° \cdot 4 - P \cdot \sin 60° \cdot 2 + M - q \cdot 4 \cdot 2}{6} = -4{,}22 \text{ кН}.$$

И, наконец, из второго:

$$Y_A = -Y_B + P \cdot \sin 60° = 12{,}88 \text{ кН}.$$

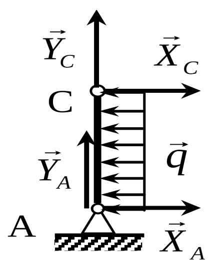
Проверку решения можно, например, выполнить, записав аналогично сумму алгебраических моментов относительно точки C для тела CB:



$$\sum M_C(\vec{F}_k^{(2)}) = X_B \cdot 4 + Y_B \cdot 6 - M + P \cdot \sin 60° \cdot 2 = 20 - 25{,}32 - 12 + 17{,}32 = 0.$$

Таким образом, реакции внешних связей определены правильно. Еще раз заметим, что для определения реакций только внешних связей этот способ наиболее эффективный, поскольку требует составления и решения минимального количества уравнений.

Для определения реакций внутренних связей можно рассмотреть равновесие любого из тел, которое находится под действием активных сил, а также реакций внешних и внутренних связей, отдельно. Рассмотрим, например, тело *AC:*



Для определения реакций внутренних связей достаточно записать два уравнения (реакции внешних связей уже определены):

$$\sum F_{kx} = X_A + X_C - q \cdot 4 = 0;$$
$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0,$$

Отсюда имеем:

$$X_C = q \cdot 4 - X_A = 10 \text{ кН}; \quad Y_C = -Y_A = -12.88 \text{ кН}.$$

Пример 2. Рассмотрим предыдущую задачу при условии, что тела конструкции соединены скользящей заделкой (рис.6).

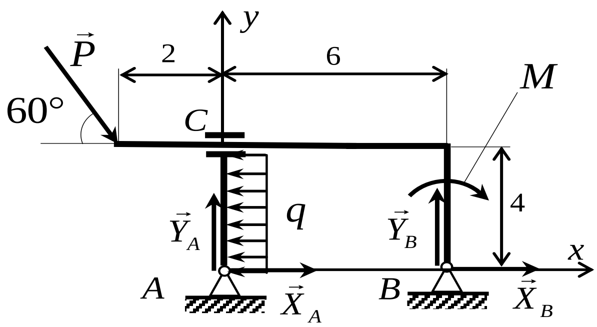


Рис. 6

Разобьем конструкцию на два тела (рис. 7). Запишем две системы уравнений равновесия для тел AC и CB:

$$\sum F_{kx} = X_A - q \cdot 4 = 0; \sum F_{ky} = Y_A + Y_C = 0; \quad \sum M_A(\vec{F}_k) = -M_C + q \cdot 4 \cdot 2 = 0,$$

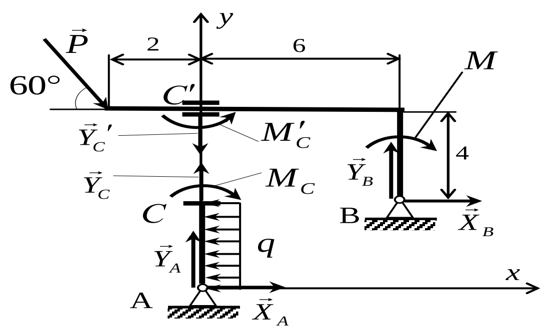


Рис. 7

$$\sum F_{kx} = X_B + P\cdot\cos 60° = 0;$$
$$\sum F_{ky} = Y_B - Y_C' - P\cdot\sin 60° = 0;$$
$$\sum M_B(\vec{F}_k) = Y_C'\cdot 6 + M_C' - P\cdot\cos 60°\cdot 4 + P\cdot\sin 60°\cdot 8 - M = 0.$$

Решаем совместно обе системы.

Из 1-го уравнения 1-й системы: $X_A = q\cdot 4 = 20$ кН.

Из 3-го уравнения 1-й системы: $M_C = q\cdot 4\cdot 2 = 40$ кНм.

Из 1-го уравнения 2-й системы: $X_B = -P\cdot\cos 60^0 = -5$ кН.

Из 3-го уравнения 2-й системы:

$$Y_C' = \frac{-M_C' + P\cdot\cos 60°\cdot 4 - P\cdot\sin 60°\cdot 8 + M}{6} = -12{,}88 \text{ кН}.$$

Из 2-го уравнения 1-й системы: $Y_A = -Y_C = 12.88$ кН.

Из 2-го уравнения 2-й системы: $Y_B = Y_C' + P\cdot\sin 60° = -4{,}22$ кН.

Для проверки используем условия равновесия всей конструкции.

$$X_A + X_B + P\cdot\cos 60° - q\cdot 4 = 20 - 5 + 5 - 20 = 0;$$
$$Y_A + Y_B - P\cdot\sin 60° = 12{,}88 - 4{,}22 - 8{,}66 = 0;$$
$$Y_B\cdot 6 - P\cdot\cos 60°\cdot 4 + P\cdot\sin 60°\cdot 2 - M + q\cdot 4\cdot 2 =$$
$$= -25{,}32 - 20 + 17{,}32 - 12 + 40 = 0.$$

Результаты проверки показывают, что задача решена правильно.

Пример 3. Рассмотрим задачу определения реакций внешних связей для конструкции, состоящей из двух тел (рис. 8). Размеры даны в метрах. Нагрузки: $P = 10$ кН; $M = 5$ кНм; $q = 2$ кН/м

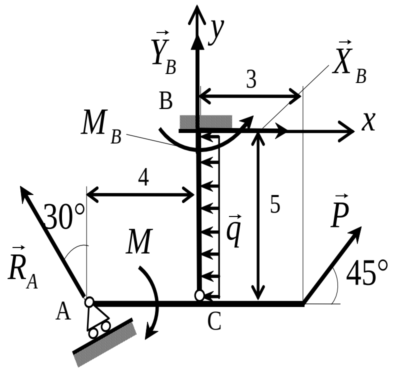


Рис. 8

Для решения задачи ограничимся третьим способом. Рассмотрим равновесие всей системы тел и запишем уравнения равновесия.

$$\sum F_{kx} = -R_A \sin 30^0 + X_B + P\cdot\cos 45° - q\cdot 5 = 0;$$
$$\sum F_{ky} = R_A\cdot\cos 30^0 + Y_B + P\cdot\sin 45° = 0;$$
$$\sum M_B = -R_A\cdot\cos 30^0\cdot 4 - R_A\cdot\sin 30^0\cdot 5 + P\cdot\cos 45^0\cdot 5 +$$
$$+P\cdot\sin 45^0\cdot 3 - M + M_B - q\cdot 5\cdot 2,5 = 0.$$

Этих трех уравнений недостаточно для определения четырех неизвестных реакций внешних связей. Дополнительное уравнение будет получено, если приравнять нулю сумму алгебраических моментов относительно точки C всех сил, включая реакции внешних связей, которые действуют на любое из тел по одну сторону шарнира. Проще всего записать такое условие для тела AC.

$$\sum M_C^{(AC)} = -R_A\cdot\cos 30^0\cdot 4 + P\cdot\sin 45^0\cdot 3 - M = 0.$$

Теперь можно совместно решить систему 4-х уравнений с 4-мя неизвестными. Из последнего получим:

$$R_A = \frac{P\cdot\sin 45^0\cdot 3 - M}{\cos 30^0\cdot 4} = \frac{21,21-5}{3,46} = 4,68 \text{ кН}.$$

Из первого уравнения:

$$X_B = R_A \sin 30^0 - P\cdot\cos 45° + q\cdot 5 = 2,34 - 7,07 + 10 = 5,27 \text{ кН}.$$

Из второго уравнения:

$$Y_B = -4,67 R_A\cdot\cos 30^0 - P\cdot\sin 45° = -4,04 - 7,07 = -11,11 \text{ кН}.$$

И, наконец, из третьего:

$$M_B = R_A\cdot\cos 30^0\cdot 4 + R_A\cdot\sin 30^0\cdot 5 - P\cdot\cos 45^0\cdot 5 - P\cdot\sin 45^0\cdot 3 + M + q\cdot 5\cdot 2,5 =$$
$$= 16,21 + 11,7 - 35,35 - 21,21 + 5 + 25 = 1,35 \text{ кНм}.$$

Проверку решения выполним, записав аналогично сумму алгебраических моментов относительно точки C для тела CB:

$$\sum M_C^{(CB)}(\vec{F}_k) = -M_B - X_B\cdot 5 + q\cdot 5\cdot 2,5 = 1,35 - 26,35 + 25 = 0.$$

Тема: кинематика

Задачи 41-60. Исследование кинематических характеристик точки по заданному закону ее движения.

По заданным координатным способом уравнениям движения точки в плоскости установить вид ее траектории и для заданного момента времени определить положение точки на траектории, ее скорость и ускорение. Далее переходя к естественному способу описания движения определить полное, нормальное и касательное ускорения точки, а также радиус кривизны ее траектории. С помощью графического анализа подтвердить правильность решения задачи. Уравнения движения и заданный момент времени для каждой задачи приведены в таблице 3.

Указания. Для установления вида траектории необходимо исключить время из уравнений ее движения. Скорость и ускорение точки определяются при координатном способе с помощью определения проекций вектора скорости на оси координат. После графического представления траектории для выбранного масштаба определяется ее положение на траектории по значениям соответствующих координат в заданный момент времени. Векторы скорости и ускорения точки следует показать на графическом представлении траектории по их проекциям. При этом масштабы для скоростей и ускорений могут быть выбраны произвольно. После построения этих векторов следует убедиться в его правильности: вектор скорости должен быть направлен по касательной к траектории в сторону ее движения, а вектор ускорения не может быть направлен в сторону выпуклости траектории. Для перехода к характеристикам движения точки при естественном способе задания ее движения (касательному, нормальному ускорению и радиусу кривизны траектории в заданный момент времени), необходимо воспользоваться следующими формулами:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n};\ a_\tau = |\vec{a}| \cdot |\vec{\tau}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{\tau});\ |\vec{\tau}| = 1;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = |\vec{a}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{v}) = a_x v_x + a_y v_y;$$

$$a_\tau = \frac{a_x v_x + a_y v_y}{|\vec{v}|}.$$

Если числитель в последней формуле положителен, то вектор касательного ускорения совпадает по направлению с вектором скорости. В противном случае эти векторы имеют противоположные направления. Далее определяются:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau{}^2};\ \rho = \frac{v^2}{a_n}.$$

Таблица 3

Номер задачи	Уравнения движения		Время t_1, с
	$x = f_1(t)$, см	$y = f_2(t)$, см	
41	$4\cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right) + 2$	$4\sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	1

Продолжение таблицы 3

42	$-\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)+3$	$\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)-1$	1
43	$2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-3\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)+4$	1
44	$3t^2+2$	$-4t$	0,5
45	$3t^2-t+1$	$5t^2-\frac{5t}{3}-2$	1
46	$7\sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)+3$	$2-7\cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)$	1
47	$-4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)-3$	1
48	$\frac{-2}{t+1}$	$2t+2$	0,5
49	$5\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$-5\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)-3$	1
50	$5\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)$	$-5\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)$	1
51	$4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-3\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	1
52	$3t$	$4t^2+1$	0,5
53	$7\sin^2\left(\frac{\pi\ \ t}{6}\right)-5$	$-7\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	1
54	$1+3\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)$	$3\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)+3$	1
55	$-5t^2-4$	$3t$	1
56	$2-3t-6t^2$	$3-\frac{-3t}{2}-3t^2$	0
57	$6\sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)-2$	$6\cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)+3$	1
58	$7t^2-3$	$5t$	0,25

Продолжение таблицы 3

59	$3-3t^2+t$	$4-5t^2+\dfrac{5t}{3}$	1
60	$-4\cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)-1$	$-4\sin\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$	1

Пример выполнения задач 41-60

Точка M движется в плоскости xOy в соответствии с уравнениями:

$$\begin{cases} x = 4\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)+6, \text{ см} \\ y = -2\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)+4, \text{ см} \end{cases}.$$

Для момента времени $t_1 = 0{,}5$ с найти положение точки M на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Решение. Исключим время t из уравнений движения и получим уравнение траектории точки в виде:

$$\frac{(x-6)^2}{4^2}+\frac{(y-4)^2}{2^2}=1.$$

Таким образом, траекторией точки M является эллипс со смещенным центром, изображенный на рисунке. Отметим на траектории положение точки M_1 (x_1, y_1) в момент времени $t_1 = 0{,}5$ с (рис. 9).

$$x_1 = x(t=t_1) = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0.5\right)+6 = 8{,}83 \text{ см};$$

$$y_1 = y(t=t_1) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0.5\right)+4 = 2{,}59 \text{ см}.$$

Определяем скорость и ускорение точки:

$$v_x = \dot{x} = 2\pi\cos\frac{\pi t}{2};\ v_y = \dot{y} = \pi\sin\frac{\pi t}{2};\ v_x(t_1) = 4{,}44\frac{\text{см}}{\text{с}};\ v_y(t_1) = 2{,}22\frac{\text{см}}{\text{с}};$$

$$v(t_1) = \sqrt{v_x^2(t_1)+v_y^2(t_1)} = 4{,}97\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

$$a_x = \dot{v}_x = -\pi^2\sin\frac{\pi t}{2};\ a_y = \dot{v}_y = \frac{\pi^2}{2}\cos\frac{\pi t}{2};\ a_x(t_1) = -6{,}98\frac{\text{см}}{\text{с}^2};\ a_y(t_1) = 3{,}49\frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

$$a(t_1) = \sqrt{a_x^2(t_1)+a_y^2(t_1)} = 7{,}80\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

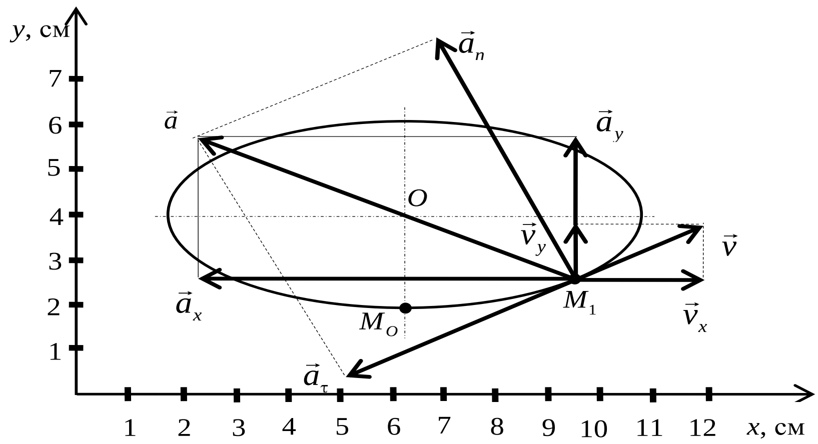


Рис. 9

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ строим по двум взаимно перпендикулярным проекциям $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ в соответствии с выбранным масштабом

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y .$$

Далее определяем касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны: траектории.

$$a_\tau(t_1) = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} = \frac{4,44(-6,97) + 2,22 \cdot 3,49}{4,96} = -4,68 \, \text{см} / \text{с}^2;$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{7,79^2 - (-4,67)^2} = 6,24 \, \text{см/с}^2; \ \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4,96^2}{6,23} = 3,95 \text{ см}.$$

Значение касательного ускорения a_τ имеет отрицательный знак, следовательно, вектор касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен в сторону противоположную направлению вектора скорости точки $\vec{v}$.

Замечание. Нормальное ускорение a_n можно вычислить по формуле $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, если известен радиус кривизны траектории. Например, если точка движется по окружности радиусом R, то в любой точке траектории $\rho = R$. Если же траекторией движения точки является прямая, то $\rho = \infty$, следовательно, $a_n = 0$.

В рассматриваемом случае радиус кривизны траектории заранее не известен, поэтому нормальное ускорение и радиус кривизны траектории определяем по приведенным выше формулам.

Построим векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ в соответствии с уже выбранным масштабом, а затем сложим их геометрически (см. рис.7). В результате получим тот же вектор полного ускорения точки $\vec{a}$, который ранее уже был получен геометрической суммой составляющих $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$. Этот факт служит контролем правильности решения.

Приведем результаты всех вычислений для заданного момента времени.

x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
8,83	2,59	4,44	2,22	4,97	–6,98	3,49	7,80	–4,68	6,24	3,95

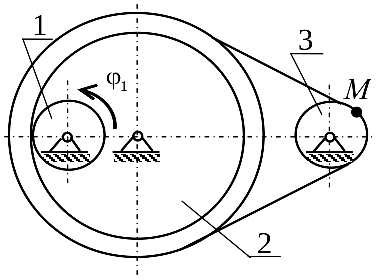
Задачи 61-80. Преобразование простейших движений твердых тел.

Задан закон движения ведущего звена механизма. В одних задачах ведущим звеном является груз и задан закон изменения его вертикальной координаты x(t) в сантиметрах, в других ведущим звеном является одно из колес и задан закон изменения его угла поворота φ(t) в радианах. Определить кинематические характеристики тел механизма, а также скорость и ускорение точки M для момента времени $t = t_1 = 1$ c. Расчетные схемы для задач 61-80 представлены таблице 4 (номера задач в левом верхнем углу ячейки), а уравнения движения ведущих звеньев и числовые исходные данные – в таблице 5.

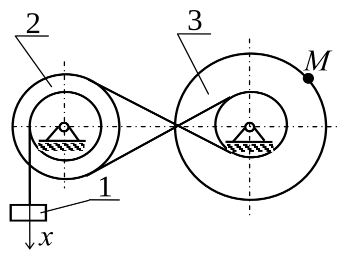
Указания. Механизмы состоят из абсолютно твердых тел. Движения тел связаны между собой либо с помощью непосредственного контакта (зубчатая или фрикционная передача), либо с помощью нерастяжимой нити (ременная передача). Механизмы имеют одну степень свободы и движения всех тел взаимосвязаны. По заданному движению ведущего звена могут быть определены кинематические характеристики всех тел и кинематические характеристики точек, принадлежащих этим телам.

Таблица 4

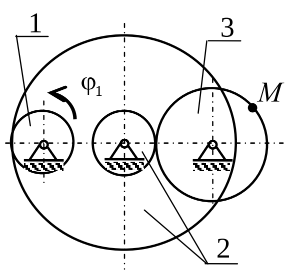
61.



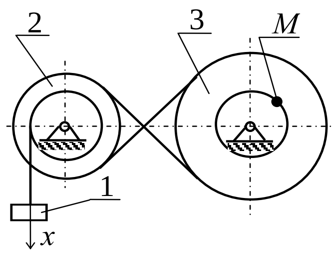
62.



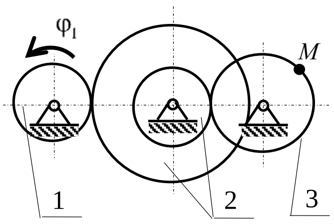
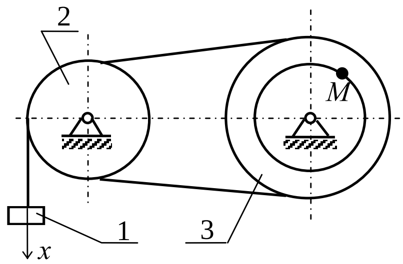
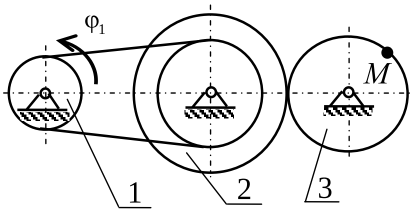
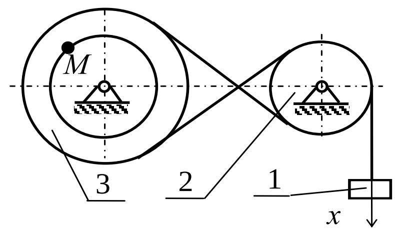
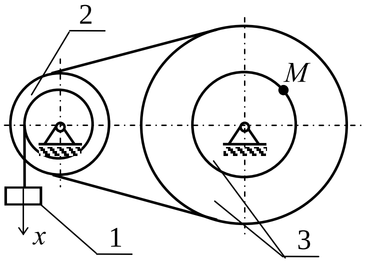
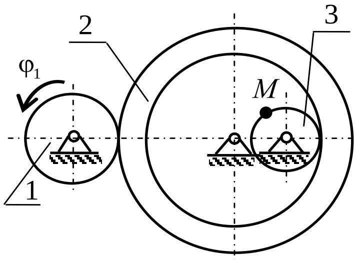
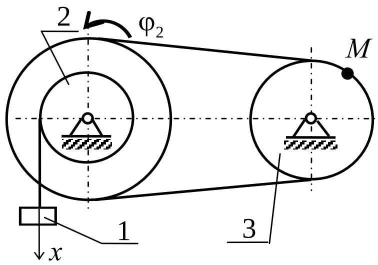
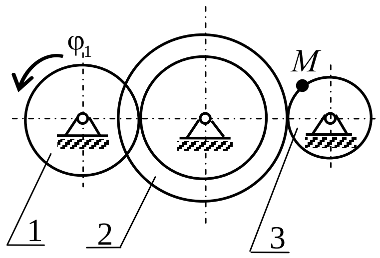
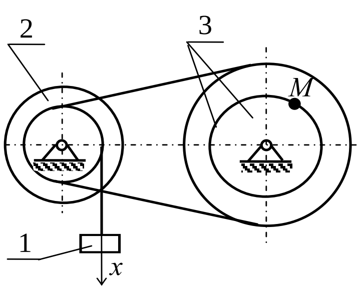
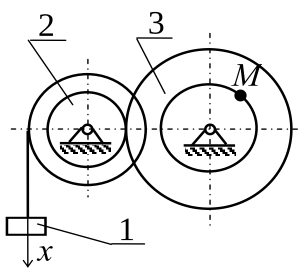
63.



64.

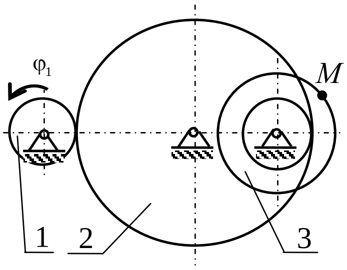


Продолжение таблицы 4

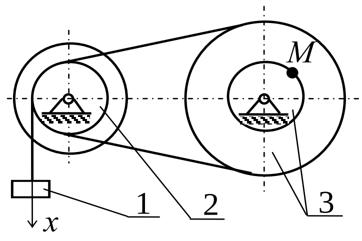
<table>
<tr>
<td>65.

</td>
<td>66.

</td>
</tr>
<tr>
<td>67.

</td>
<td>68.

</td>
</tr>
<tr>
<td>69.

</td>
<td>70.

</td>
</tr>
<tr>
<td>71.

</td>
<td>72.

</td>
</tr>
<tr>
<td>73.

</td>
<td>74.

</td>
</tr>
</table>

Продолжение таблицы 4

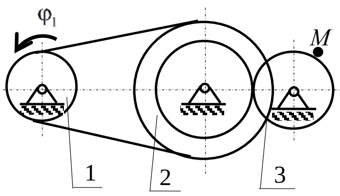
75.



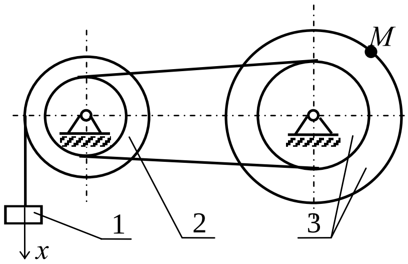
76.



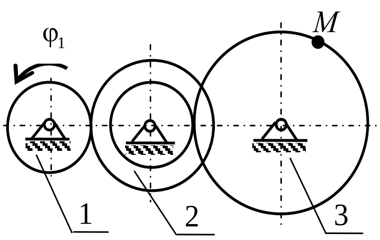
77.



78.



79.



80.

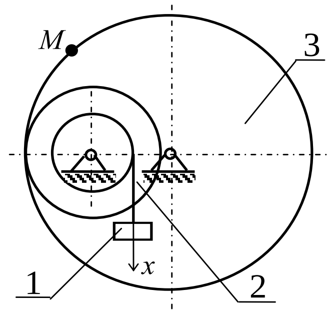


Таблица 5

Номер задачи	Уравнение движения ведущего звена	R_1, см	R_2, см	r_2, см	R_3, см	r_3, см	Момент времени, с
61	$\varphi_1 = 3 + t^2$	10	50	30	15	–	0,5
62	$x = 2+3t^2$	–	40	30	50	40	1
63	$\varphi_1 = 3+t^2$	10	40	15	30	–	1
64	$x = 4t^2$	–	20	15	40	20	0,5
65	$\varphi_1 = 1+ t^2$	10	30	10	15	–	0,5
66	$x = 4t^2$	–	10	–	20	10	0,5
67	$\varphi_1 = 4+2t^2$	20	50	40	30	–	1
68	$x = t^2$	–	20	–	40	30	1
69	$x = 2t^2$	–	20	10	50	20	1
70	$\varphi_1 = 2 + 2t^2$	10	40	20	15	–	0,5

Продолжение таблицы 5

71	$x = 5 + t^2$	–	40	20	30	–	0,5
72	$\varphi_1 = t^2 + 2$	15	40	20	10	–	1
73	$x = 3t^2 + t$	–	30	15	50	30	1
74	$x = 10 + t^2$	–	20	10	30	20	1
75	$\varphi_1 = 3t^2 + 2$	10	30	–	25	15	2
76	$x = 5t^2 + 5$	–	40	30	50	40	1
77	$\varphi_1 = 4t^2 + 2$	10	30	20	10	–	1
78	$x = 6t^2$	–	20	10	50	20	2
79	$\varphi_1 = 4t^2 - 2$	15	30	10	40	–	2
80	$x = 4 + t^2$	–	20	10	60	–	1

Пример выполнения задач 61-80

Рассмотрим пример решения задания для механизма (рис. 10), где ведущим звеном является груз. Задано: закон изменения вертикальной координаты груза $x(t) = 30 + 10t^2$, см; радиусы колес $R_1 = R_3 = 10$ см, $R_2 = 30$ см, $r_2 = 20$ см. Определить кинематические характеристики тел 1,2 и 3, а также скорость и ускорение точки M для момента времени $t = t_1 = 1$ c.

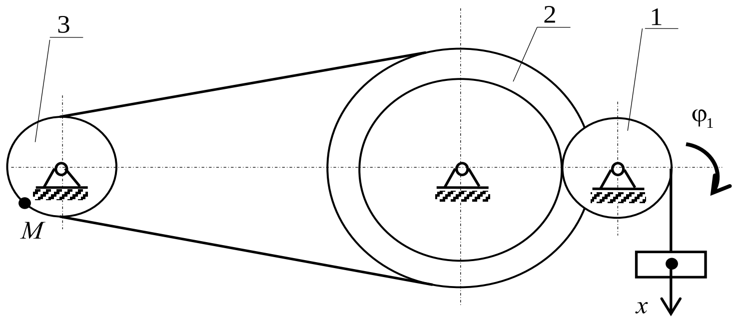


Рис. 10

Решение. Обозначим и покажем точки механизма A, B, D_1, D_2, через которые передается движение от одного звена к другому (рис. 11).

Решение задачи начнем с определения кинематических характеристик ведущего звена (груза). Поскольку груз совершает поступательное движение, его можно считать точкой, движение которой задано координатным способом, и которая движется только вдоль оси x. Определяем скорость и ускорение груза:

$$v_{гр} = \dot{x} = 20t \text{ см/с}; a_{гр} = \ddot{x} = 20 \text{ см/с}^2; v_{гр}(t_1) = 20 \text{ см/с}.$$

Поскольку знак проекции скорости груза на ось x положительный, вектор скорости направлен вниз, т.е. в положительном направлении оси x.

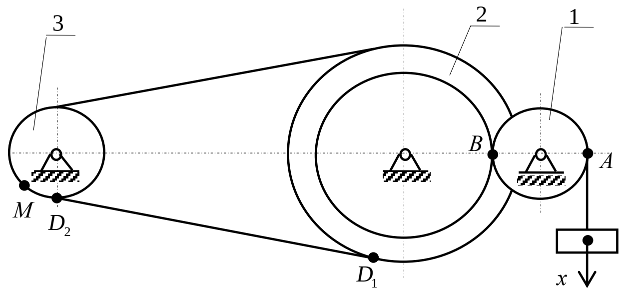


Рис. 11

Скорости всех точек нити, на которой висит груз, одинаковы. Поэтому скорость точки схода нити с барабана (колеса 1) равна скорости груза. Но точка *A* схода нити в данный момент времени принадлежит и колесу 1, совершающему вращательное движение вокруг неподвижной оси, что позволяет определить его угловую скорость. Направление алгебраической угловой скорости колеса 1 (по часовой стрелке) соответствует направлению скорости точки *A* колеса 1. Определим алгебраические значения угловой скорости и углового ускорения колеса 1

$$\omega_{1z} = -\frac{v_{гр}}{R_1} = -\frac{20t}{10} = -2t \text{ рад/с}; \varepsilon_{1z} = \dot{\omega}_{1z} = -2 \text{ рад/с}^2; \omega_{1z}(t_1) = -2 \text{ рад/с}.$$

Замечание. Введем правило знаков для алгебраических угловых скоростей и угловых ускорений. Эти величины являются проекциями соответствующих векторов на оси вращения тел. Поэтому будем считать их положительными, если их дуговые стрелки направлены против направления часовой стрелки, а отрицательными в противном случае.

Колеса 1 и 2 находятся во внешнем зацеплении и имеют общую точку *B* (см. рис. 11). Поэтому скорости контактирующих точек одинаковы. При записи алгебраического значения угловой скорости колеса 2 учтем, что внешнее зацепление меняет направление вращения на противоположное

$\omega_{2z} = -\omega_{1z}R_1 / r_2 = 2t\dfrac{10}{20}$=t рад/с; $\omega_{2z}(t_1) = 1$ рад/с; $\varepsilon_{2z} = \dot{\omega}_{2z} = 1$ рад/с^2., при t_1 = 1 с ω_{2z} = 1 рад/с.

Одинаковы также скорости точек D_1 и D_2, расположенных на шкивах ременной передачи. Однако здесь направление вращения не изменяется, поэтому

$\omega_{3z} = \omega_{2z}R_2 / R_3 = 3t$ рад/с; $\omega_{3z}(t_1) = 3$ рад/с; $\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{2z} = 3$ рад/с^2., при t_1=1с $\omega_{3z} = 3$ рад/с.

Определим теперь скорость точки *M* колеса 3 в момент времени t_1 = 1 с. Величина скорости – это произведение угловой скорости на расстояние от точки *M* до оси вращения, которое равно радиусу R_3, $v_M = \omega_{3z}R_3 = 30$ см/с. Направление вектора скорости покажем перпендикулярно радиусу, соединяющему точку с осью вращения, в соответствии с направлением вращения (см. рис. 12).

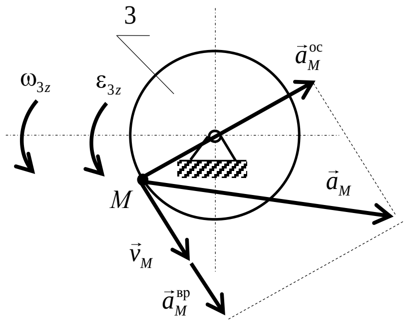


Рис. 12

Ускорение точки M определяется как геометрическая сумма векторов вращательного и осестремительного ускорений, модули которых вычислим по формулам:

$$a_M^{\text{вр}} = \varepsilon_{3z} R_3 = 30 \ \text{см/с}^2; \ a_M^{\text{ос}} = \omega_{3z}^2 R_3 = 90 \ \text{см/с}^2,$$

откуда получим полное ускорение точки M $a_M = \sqrt{(a_M^{\text{ос}})^2 + (a_M^{\text{вр}})^2} = 30\sqrt{10} \approx 94{,}87 \,\text{см/с}^2$.

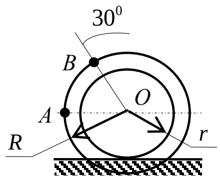
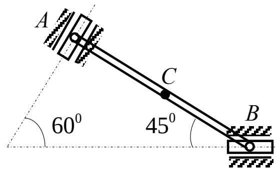
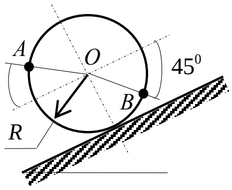
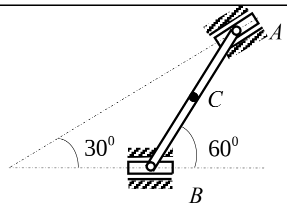
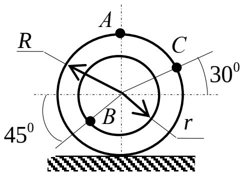
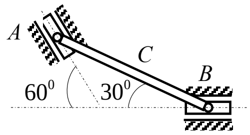
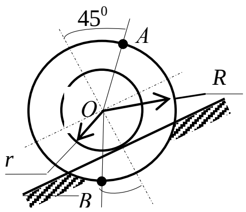
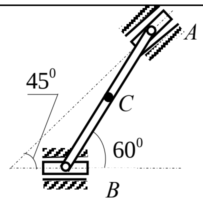
Векторы ускорений показаны на рис. 12. Движение колеса 3 ускоренное, поэтому вращательное ускорение точки M направлено в ту же сторону, что и ее скорость. Осестремительное ускорение всегда направлено к оси вращения.

Задачи 81-100. Плоскопараллельное движение твердого тела. Определение скоростей точек и угловой скорости тела.

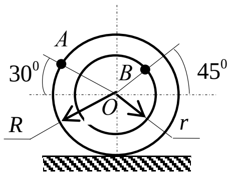
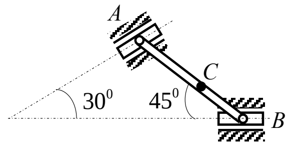
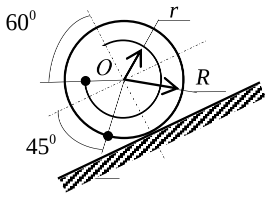
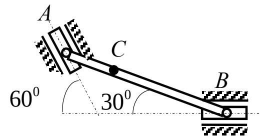
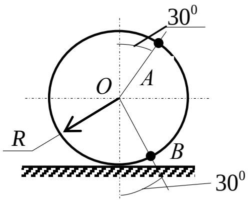
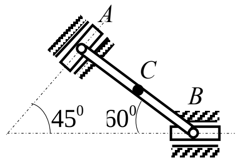
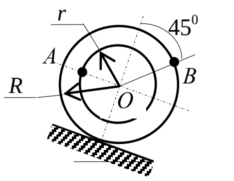
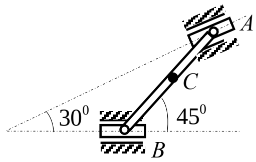
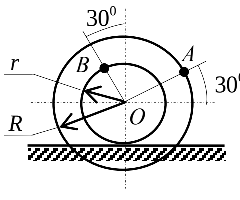
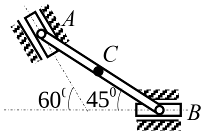
Для тела, совершающего плоскопараллельное движение необходимо определить его угловую скорость и скорости его точек. Основная роль при решении задачи отводится понятию мгновенного центра скоростей (МЦС) и способам его определения. В рамках данной задачи необходимо решить две подзадачи (подзадача 1, подзадача 2). Расчетные схемы, исходные данные и величины, которые следует определить, приведены в таблице 6.

Указания. Во всех задачах в исходных данных задается значение скорости одной из точек тела, совершающего плоскопараллельное движение. Прямая, вдоль которой направлен вектор скорости точки, перпендикулярна отрезку, соединяющему точку с МЦС, или параллельна направляющим соответствующего ползуна. Вектор заданной скорости может быть направлен в любую сторону.

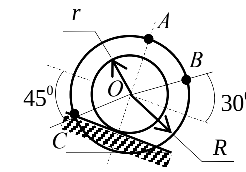
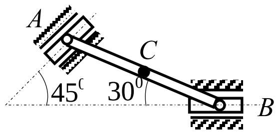
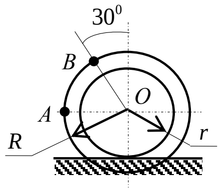
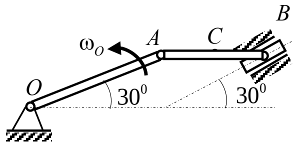
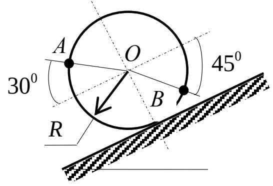
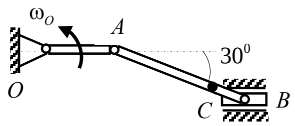
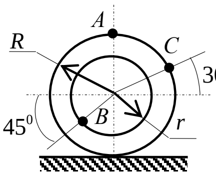
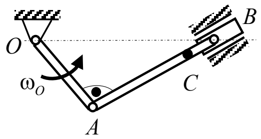
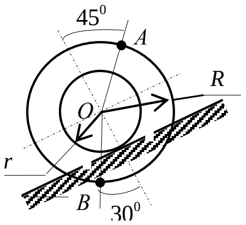
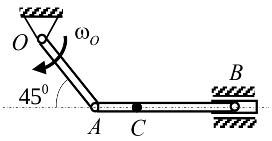
Таблица 6

Задача	Подзадача 1	Подзадача 2
81	 Дано: $r=3$ см, $R=4$ см, $v_O=6$ см/с. Найти: ω, v_A, v_B.	 Дано: $v_A=7$ см/с; $AB=6$ см; $AC=BC$. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.
82	 Дано: $R=2$ см, $v_A=6$ см/с. Найти: ω, v_O, v_B.	 Дано: $v_A=6$ см/с; $AB=12$см; $AC=BC$. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.
83	 Дано: $r=1$ см, $R=2$ см, $v_A=4$ см/с. Найти: ω, v_B, v_C.	 Дано: $v_A=10$ см/с; $AB=8$ см; $AC=BC$. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.
84	 Дано: $r=4$ см, $R=10$ см, $v_A=20$ см/с. Найти: ω, v_O, v_B.	 Дано: $v_A=3$ см/с; $AB=4$ см; $AC=BC$. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.

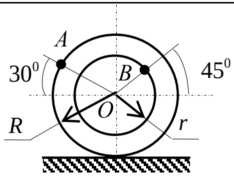
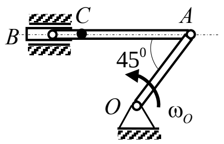
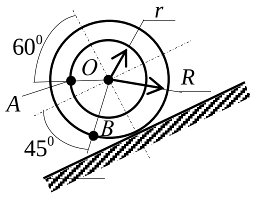
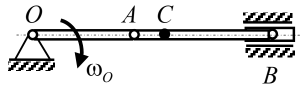
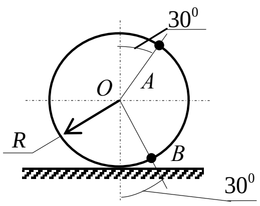
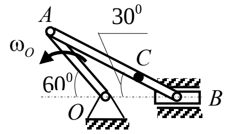
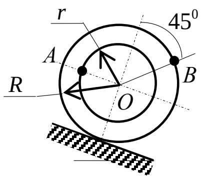
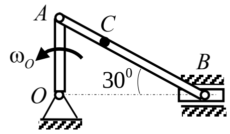
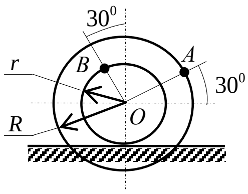
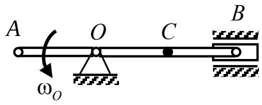
Продолжение таблицы 6

85	 Дано: $r = 5$ см, $R = 10$ см, $v_A = 25$ см/с. Найти: ω, v_O, v_B.	 Дано: $v_A = 20$ см/с; $AB = 10$ см; $AC = 6$ см; Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.
86	 Дано: $r = 2$ см, $R = 6$ см, $v_A = 9$ см/с. Найти: ω, v_O, v_B.	 Дано: $v_A = 9$ см/с; $AB = 6$ см; $AC = 2$ см; Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.
87	 Дано: $R = 3$ см, $v_A = 12$ см/с. Найти: ω, v_O, v_B.	 Дано: $v_A = 16$ см/с; $AB = 8$ см; $AC = BC$. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.
88	 Дано: $R = 4$ см, $r = 3$ см, $v_O = 10$ см/с. Найти: ω, v_A, v_B.	 Дано: $v_A = 20$ см/с; $AB = 10$ см; $AC = BC$. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.
89	 Дано: $r = 2$ см, $R = 4$ см, $v_A = 8$ см/с. Найти: ω, v_O, v_B.	 Дано: $v_A = 8$ см/с; $AB = 6$ см; $AC = BC$. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.

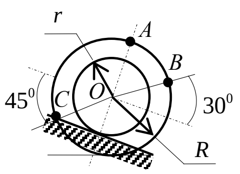
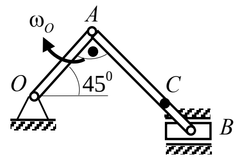
Продолжение таблицы 6

90	 Дано: $r = 3$ см, $R = 4$ см, $v_A = 7$ см/с. Найти: ω, v_B, v_C.	 Дано: $v_A = 10$ см/с; $AB = 4$ см; $AC = BC$. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.
91	 Дано: $r = 3$ см, $R = 5$ см, $v_A = 12$ см/с. Найти: ω, v_O, v_B.	 Дано: $\omega_0 = 2$ рад/с; $OA = 1$ м; $AB = 2$ м; $AC = BC$. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.
92	 Дано: $R = 4$ см, $v_O = 10$ см/с. Найти: ω, v_A, v_B.	 Дано: $\omega_0 = 2$ рад/с; $OA = 0.5$ м; $AB = 1$ м; $BC = 0.2$ м. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.
93	 Дано: $r = 2$ см, $R = 4$ см, $v_B = 6$ см/с. Найти: ω, v_A, v_C.	 Дано: $\omega_0 = 3$ рад/с; $OA = 0.5$ м; $AB = 1$ м; $BC = 0.1$ м. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.
94	 Дано: $r = 2$ см, $R = 4$ см, $v_O = 6$ см/с. Найти: ω, v_A, v_B.	 Дано: $\omega_0 = 2,5$ рад/с; $OA = 0.4$ м; $AB = 1$ м; $AC = 0.3$ м. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.

Продолжение таблицы 6

95	 Дано: $r=5$ см, $R=10$ см, $v_O=10$ см/с. Найти: ω, v_A, v_B.	 Дано: $\omega_0=2$ рад/с; $OA=0.6$ м; $AB=1$ м; $BC=0.3$ м. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.
96	 Дано: $r=5$ см, $R=10$ см, $v_O=10$ см/с. Найти: ω, v_A, v_B.	 Дано: $\omega_0=1$ рад/с; $OA=0.4$ м; $AB=1$ м; $AC=0.2$ м. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.
97	 Дано: $R=3$ см, $v_O=6$ см/с. Найти: ω, v_A, v_B.	 Дано: $\omega_0=1$ рад/с; $OA=1$ м; $AB=3$ м; $BC=1$ м. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.
98	 Дано: $r=3$ см, $R=4$ см, $v_A=6$ см/с. Найти: ω, v_O, v_B.	 Дано: $\omega_0=2$ рад/с; $OA=1.5$ м; $AB=2$ м; $BC=0,6$ м. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.
99	 Дано: $r=2$ см, $R=4$ см, $v_O=6$ см/с. Найти: ω, v_A, v_B.	 Дано: $\omega_0=2$ рад/с; $OA=0.5$ м; $AB=4$ м; $AC=2.5$ м. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.

Продолжение таблицы 6

100	 Дано: $r = 2$ см, $R = 5$ см, $v_O = 10$ см/с. Найти: ω, v_A, v_B.	 Дано: $\omega_0 = 1$ рад/с; $OA = 0.5$ м; $AB = 4$ м; $BC = 1$ м. Найти: ω_{AB}, v_B, v_C.

Примеры выполнения задач 81-100

<u>Пример 1.</u> Катушка катится без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному пути (рис. 13).

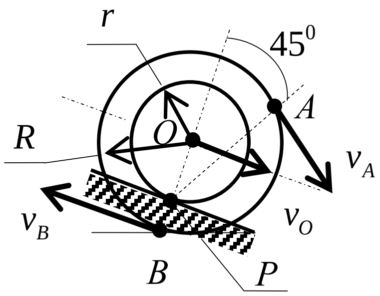


Рис. 13

Найти угловую скорость катушки и скорости точек *O* и *B*, если в рассматриваемый момент времени $v_A = 2$ м/с, $r = 0.6$ м, $R = 1$ м.

Решение. Катушка совершает плоскопараллельное движение. Так как качение происходит без скольжения, то скорость точки *P* касания катушки с неподвижной поверхностью $v_P = 0$, следовательно эта точка является мгновенным центром скоростей (МЦС). Вектор скорости точки *A* $\vec{v}_A$ перпендикулярен AP и направлен в сторону качения катушки, а численное значение скорости пропорционально расстоянию от точки *A* до МЦС:

$$v_A = \omega \cdot AP,$$

где
$$AP = \sqrt{OA^2 + OP^2 - 2 \cdot OA \cdot OP \cos\left(180^0 - 45^0\right)} =$$

$$= \sqrt{R^2 + r^2 - 2R \cdot r \cos 135^0} = 1{,}49 \text{ м}.$$

Определим угловую скорость катушки

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = 1{,}35 \text{ рад/с}.$$

Так как скорости точек *O* и *B* катушки, так же пропорциональны их расстояниям до точки *P*, то

$$v_O = \omega \cdot OP = \omega \cdot r = 0{,}81 \text{ м/с};$$

$$v_B = \omega \cdot BP = \omega \cdot \left(R - r\right) = 0{,}54 \text{ м/с}.$$

Направление вращения катушки, а, следовательно, и направления скоростей точек B и O, определяются направлением вектора скорости $\vec{v}_A$ по отношению к МЦС.

Пример 2. Стержень AB имеет на концах ползуны, один из которых A скользит по прямолинейной направляющей со скоростью v_A = 1 м/с (рис. 14).

Найти в положении, указанном на рис. 4.6, угловую скорость стержня, скорости точек B и C, если AB = 1,2 м, AC = BC.

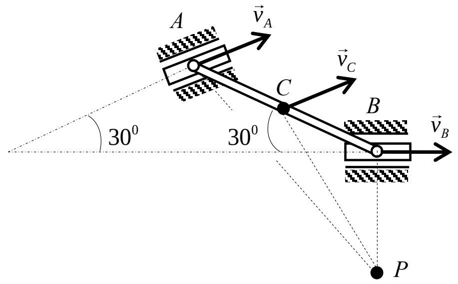


Рис. 14

Решение. Стержень AB совершает плоскопараллельное движение. Так как скорости точек A и B направлены параллельно соответствующим направляющим, вдоль которых скользят ползуны, то, восстанавливая из точек A и B перпендикуляры к скоростям этих точек, определим положение МЦС стержня AB – точка P. Треугольник ABP является равнобедренным, следовательно, AB = BP = 1,2м.

Скорость точки A пропорциональна расстоянию от этой точки до точки P:

$$v_A = \omega_{AB} \cdot AP, \text{ где } AP = 2AB\cos 30^0 = 2{,}08 \text{ м}.$$

Вычислим угловую скорость стержня AB

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{10}{20{,}8} = 0{,}48 \text{ рад/с}.$$

Скорость точки B определим по формуле

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP = 0{,}48 \cdot 1{,}2 = 0{,}58 \text{ м/с}.$$

Для определения скорости точки C найдем расстояние PC с помощью теоремы косинусов

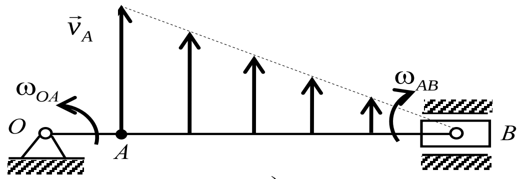
$$CP = \sqrt{BP^2 + BC^2 - 2 \cdot BP \cdot BC \cos 120^0} = 1{,}59 \text{ м}.$$

Тогда скорость точки C

$$v_C = \omega_{AB} \cdot CP = 0{,}76 \text{ м/с}.$$

Пример 3. Кривошип OA длиной r = 1 м вращается с угловой скоростью ω_{OA} = 2 рад/с, приводя в движение шатун AB длиной l = 4 м, (рис. 15).

Определить скорость ползуна B, угловую скорость шатуна ω_{AB} в двух положениях механизма, когда угол поворота кривошипа $\varphi = 0$ и $\varphi = 90^0$.



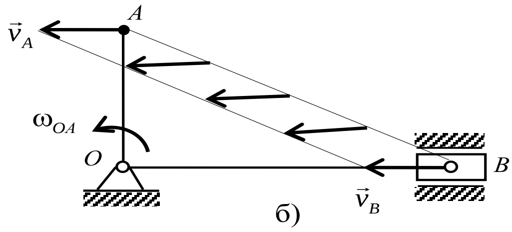


Рис. 15

Решение. Шатун AB совершает плоскопараллельное движение. При этом $\vec{v}_A \perp OA$, так как точка A принадлежит кривошипу OA, совершающему вращательное движение. Скорость ползуна B параллельна направляющим. Численное значение скорости точки A

$$v_A = \omega_{OA} \cdot r = 2 \cdot 1 = 2 \text{ м/с}.$$

Найдем положение МЦС шатуна, восстанавливая перпендикуляры к скоростям точек A и B из этих точек. При угле φ = 0 (см. рис. 15 а) перпендикуляр к скорости $\vec{v}_A$ и перпендикуляр к направлению $\vec{v}_B$ пересекаются в точке B. Следовательно, точка B является в этом положении механизма МЦС шатуна и $v_B = 0$. Это положение механизма называют «*верхней мертвой точкой*». Найдем угловую скорость шатуна

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{AB} = \frac{\omega_{OA} \cdot r}{l} = 0{,}5 \text{ рад/с}.$$

На рис. 15а показано распределение скоростей точек шатуна.

При угле поворота кривошипа φ = 90^0 (см. рис. 15 б) скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ направлены параллельно, а перпендикуляры к ним пересекаются в бесконечности. Следовательно, в данный момент времени имеет место мгновенное поступательное распределение скоростей, то есть все точки шатуна AB имеют одинаковые скорости, равные $\vec{v}_A$, при этом угловая скорость шатуна $\omega_{AB} = 0$.

Пример 4. Кривошип OA = 0,5м вращается с угловой скоростью $\omega_{OA} = 10$ рад/с и приводит в движение шатун AB = 4 м (рис. 16).

Найти угловую скорость шатуна, скорости точек B и C (AC = 2,5м), если угол поворота кривошипа φ = 45^0 и $OA \perp AB$.

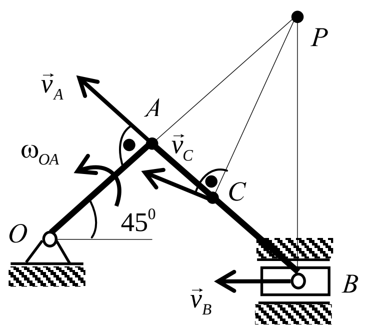


Рис. 16

Решение. Так как кривошип OA совершает вращательное движение, то

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 5\,м/с;\quad \vec{v}_A \perp OA.$$

Шатун AB совершает плоскопараллельное движение. Найдем МЦС шатуна для данного положения шатуна – точку P на пересечении перпендикуляров к скоростям точек A и B, восстановленных из этих точек. Треугольник PAB равнобедренный, при этом $AB = AP = 4$ м.

Найдем угловую скорость шатуна AB

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{5}{4} = 1.25 \text{ рад/с.}$$

Скорости точек B и C пропорциональны их расстояниям до МЦС:

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP,$$

где $$BP = \sqrt{AP^2 + AB^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5{,}65 \text{ м;}$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP = 1{,}25 \cdot 5{,}65 = 7{,}07 \text{ м/с;}$$

$$v_C = \omega_{AB} \cdot CP \text{, где } CP = \sqrt{AP^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 2{,}5^2} = 4{,}72 \text{ м;}$$

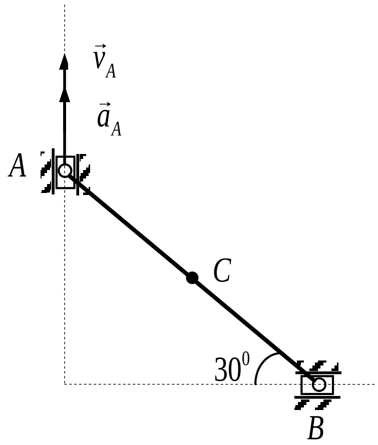
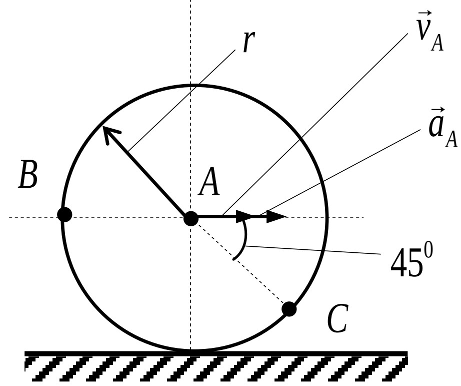
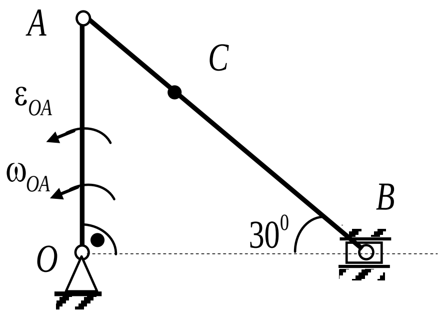
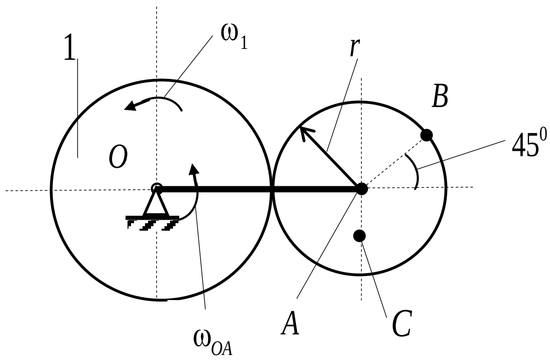
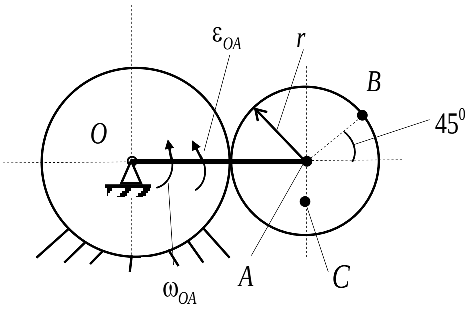
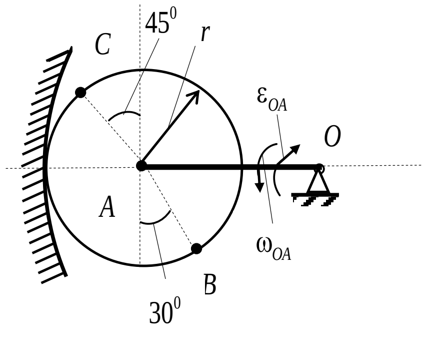
$$v_C = \omega_{AB} \cdot CP = 1{,}25 \cdot 4{,}72 = 5{,}9 \text{ м/с.}$$

Задачи 101-120. Кинематический анализ плоского механизма.

Для заданного положения механизма необходимо определить скорости и ускорения точек B и C, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат. Расчетные схемы механизмов приведены в таблице 7, а номера задач и исходные данные – в таблице 8.

Указания. Перед решением задачи следует внимательно ознакомиться с приведенным комплексным примером. В одних вариантах при определении ускорения точки и углового ускорения звена (в примере звено AB) используется графоаналитический метод, основанный на проецировании векторного равенства на оси координат и решении системы уравнений, а других – дифференцировании выражения для угловой скорости звена (в примере колесо).

Таблица 7

<table>
<tr><td>Схема 1</td><td>Схема 2</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Схема 3</td><td>Схема 4</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Схема 5</td><td>Схема 6</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 7

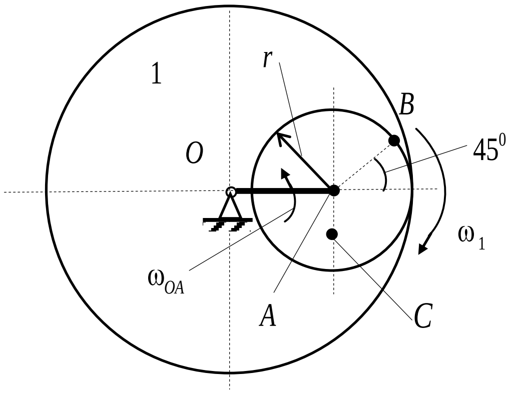
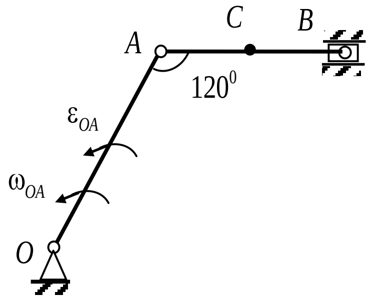
Схема 7	Схема 8
	

Таблица 8

задача	схема (табл. 7)	размеры, м				ω_{OA}	ω_1	ε_{OA}	v_A	a_A
		OA	r	AB	AC	рад/с	рад/с	рад/с^2	м/с	м/с^2
101	1	-	-	0.6	0.2	-	-	-	0.5	1.0
102	2	-	0.5	0.5	0.5	-	-	-	0.8	1.2
103	3	0.8	-	1.4	0.7	1.0	-	2.0	-	-
104	4	1.6	0.5	-	0.25	2.0	6.0	0	-	-
105	5	0.8	0.3	0.3	0.1	3.0	-	6.0	-	-
106	6	0.6	0.2	0.2	0.2	3.0	-	7.0	-	-
107	7	0.4	0.3	0.3	0.1	2.0	2.0	0	-	-
108	8	1.2	-	2.0	1.0	3.0	-	5.0	-	-
109	1	-	-	0.8	0.4	-	-	-	-0.8	1.3
110	2	-	0.8	0.8	0.4	-	-	-	-0.6	1.5
111	3	0.4	-	1.2	0.3	-1.2	-	2.5	-	-
112	4	2.4	1.5	-	0.75	2.0	-6.0	0	-	-
113	5	1.2	0.4	0.4	0.2	-3.0	-	6.0	-	-
114	6	0.8	0.3	0.3	0.3	-4.0	-	5.0	-	-
115	7	0.6	0.2	0.2	0.1	-2.0	2.0	0	-	-
116	8	1.0	-	3.0	1.5	-2.0	-	3.0	-	-
117	1	-	-	0.5	0.25	-	-	-	0.4	-0.6
118	2	-	1.2	0.5	1.2	-	-	-	0.7	-1.5
119	3	0.6	-	1.2	0.6	2.0	-	-1.5	-	-
120	4	1.8	0.6	-	0.3	-1.0	3.0	0	-	-

Примечания. 1). Знак «минус» у векторов скорости или ускорения означает, что направление вектора противоположно направлению, показанному на схеме. 2). Знак «минус» у значений угловой скорости или углового ускорения означает, что направление соответствующей дуговой стрелки противоположно направлению, показанному на схеме. 3). Угловая скорость ω_1 постоянна, а остальные кинематические характеристики соответствуют заданному положению механизма (в данный момент времени). 4). Качение колес происходит без скольжения.

Примеры выполнения задач 101-120

Приведем расчетную схему плоского механизма (рис. 17).

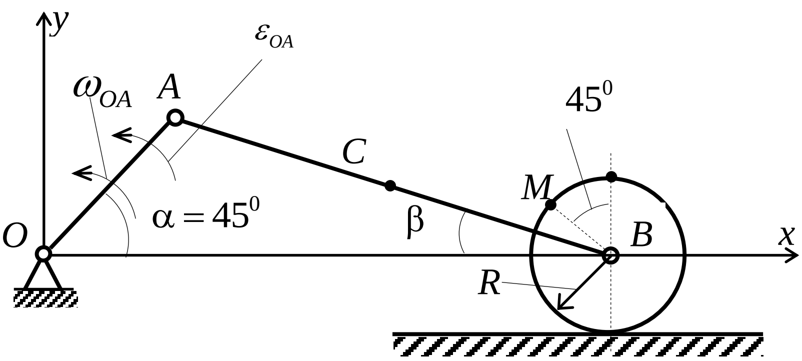


Рис.17

Механизм состоит из кривошипа *OA*, шатуна *AB* и колеса, которое может катиться без скольжения по горизонтальной плоскости. Длина кривошипа $OA = r = 0.2$ м; длина шатуна $AB = l = 0.4$ м; $AC = 0.2$ м; радиус колеса $R = 0.1$ м; угловая скорость кривошипа ω_{OA}=2 рад/с.; угловое ускорение кривошипа $\varepsilon_{OA} = 4$ рад/с^2.

Для заданного положения механизма найти угловые скорости и угловые ускорения остальных звеньев механизма, а также скорости и ускорения точек *A*, *B*, *C* и *M*.

Решение. Сначала найдем угол β. Из очевидного соотношения $OA\sin\alpha = AB\sin\beta$ находим:

$$\sin\beta = \frac{OA}{AB}\sin\alpha = 0.5\cdot 0.7071 = 0.3536; \beta = 0.36097 \text{ рад.}$$

Определяем скорость и ускорение точки *A*.

$$v_A = \omega_{OA}\cdot OA = 0.4 \text{ м/с};$$
$$a_A^{вр} = \varepsilon_{OA}\cdot OA = 0.8 \text{ м/с}^2;\; a_A^{oc} = \omega_{OA}^2\cdot OA = 0.8 \text{ м/с}^2;\; a_A = 1.13 \text{ м/с}^2.$$

Переходим к кинематическим характеристикам следующего звена – шатуна *AB*. Скорость точки *B* (центра колеса) направлена горизонтально, а скорость точки *A* – перпендикулярно прямой *AB*. Воспользуемся понятием мгновенного центра скоростей (МЦС) рассматриваемого звена. МЦС (точка P_{AB}) расположена на пересечении перпендикуляров к скоростям точек А и В (см. рис. 18). Скорости точек *A*, *B* и *C* пропорциональны длинам отрезков, соединяющим эти точки с МЦС.

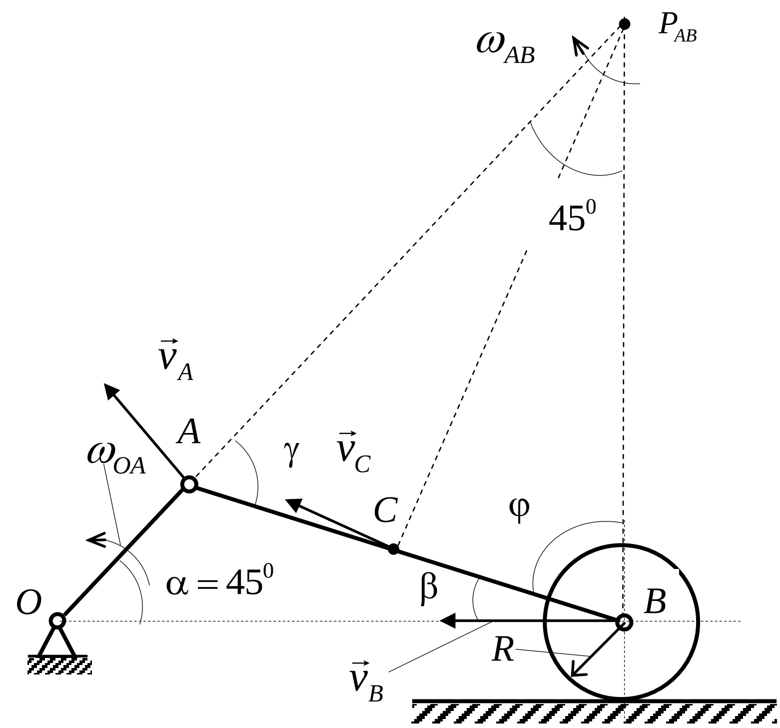


Рис. 18

Определим углы φ, γ: $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \beta = 1.5708 - 0.3536 = 1.2098$ рад; $\gamma = \pi - \dfrac{\pi}{4} - \varphi = 1.1464$ рад.

Теперь по теореме синусов имеем:

$$\frac{AB}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{AP_{AB}}{\sin\varphi} = \frac{BP_{AB}}{\sin\gamma};\ \sin\varphi = 0.9355;\ \sin\gamma = 0.9113;$$

$$\frac{0.4}{0.7071} = \frac{AP_{AB}}{0.9355} = \frac{BP_{AB}}{0.9113};\ AP_{AB} = 0.529\text{ м};\ BP_{AB} = 0.516\text{ м}.$$

Определяем угловую скорость звена AB и скорость точки B:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = 0.756\text{ рад/с};\ v_B = \omega_{AB}\cdot BP_{AB} = 0.390\text{ м/с}.$$

Полученный результат можно проверить, если использовать теорему о проекциях скоростей двух точек тела на соединяющую их прямую:

$$v_A\cos(\frac{\pi}{4} - \beta) = 0.4\cdot 0.9112 = 0.3645;\ v_B\cos\beta = 0.3649;\ \delta = 0.11\,\%$$

Погрешность связана только с округлениями. Определим расстояние CP_{AB} и скорость точки C:

$$CP_{AB} = \sqrt{AP_{AB}{}^2 + AC^2 - 2AP_{AB}\cdot AC\cdot\cos\gamma} = 0.483\text{ м};$$
$$v_C = \omega_{AB}\cdot CP_{AB} = 0.756\cdot 0.483 = 0.365\text{ м/с}.$$

Определим угловую скорость колеса и скорость точки M (см. рис. 19).

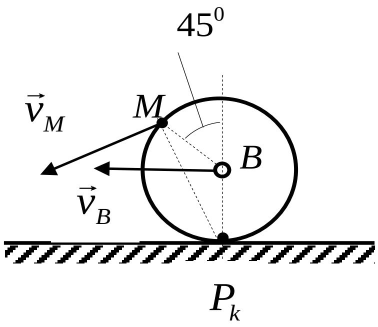


Рис. 19

Колесо совершает плоскопараллельное движение (катится без скольжения по горизонтальной плоскости). МЦС колеса находится в точке контакта колеса с плоскостью

$$\omega_k = \frac{v_B}{BP_k} = \frac{v_B}{R} = \frac{0.390}{0.1} = 3.9 \text{ рад/с};$$

$$v_M = \omega_k \cdot MP_k = \omega_k \cdot R\sqrt{2(1-cos135^0)} = 3.9 \cdot 0.1 \cdot 1.8478 = 0.72 \text{ м/с}.$$

Перейдем к определению угловых ускорений шатуна и колеса и ускорений точек *B*, *C* и *M*. Начнем с определения ускорения точки *B*. Если выбрать в качестве полюса точку *A*, то ускорение точки *B* определяется векторной формулой:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{вр} + \vec{a}_A^{ос} + \vec{a}_{BA}^{вр} + \vec{a}_{BA}^{ос}; \; a_{BA}^{вр} = \varepsilon_{AB} \cdot AB; \; a_{BA}^{ос} = \omega_{AB}^2 \cdot AB.$$

Неизвестными скалярными величинами здесь являются ускорение точки $B - a_B$ и угловое ускорение шатуна $AB - \varepsilon_{AB}$. Нам известно также направление искомого ускорения, поскольку точка *B* движется прямолинейно. Поэтому обе неизвестные величины можно определить из системы двух алгебраических уравнений, которые получаются в результате проецирования записанной векторной формулы на оси координат *x* и *y* (см. рис. 20):

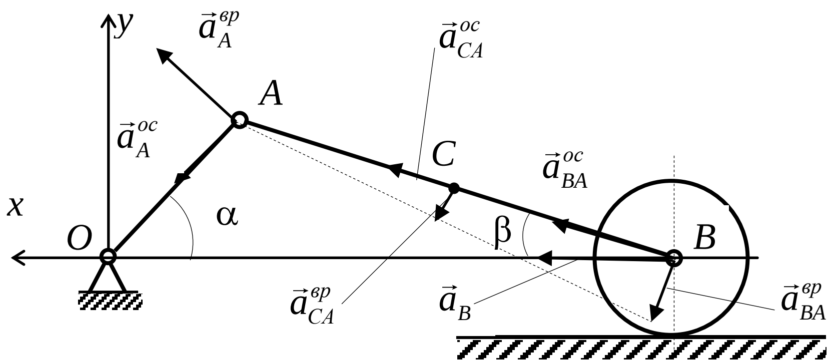


Рис. 20

$$a_B = a_A^{вр} \sin\alpha + a_A^{ос} cos\alpha + a_{BA}^{вр} \sin\beta + a_{BA}^{ос} cos\beta;$$

$$0 = a_A^{вр} cos\alpha - a_A^{ос} \sin\alpha - a_{BA}^{вр} cos\beta + a_{BA}^{ос} \sin\beta.$$

Из второго уравнения находим:

$$a_{BA}^{вр} = \frac{a_A^{вр} cos\alpha - a_A^{ос}\sin\alpha + a_{BA}^{ос}\sin\beta}{cos\beta} = \frac{\varepsilon_{OA}\cdot r\cdot cos\alpha - \omega_{OA}^2\cdot r\cdot\sin\alpha + \omega_{AB}^2\cdot l\cdot\sin\beta}{cos\beta} = 0.0864 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{вр}}{AB} = \frac{0.0864}{0.4} = 0.216 \text{ рад/с}^2.$$

Теперь из первого уравнения:

$$a_B = a_A^{вр}\sin\alpha + a_A^{ос} cos\alpha + a_{BA}^{вр}\sin\beta + a_{BA}^{ос} cos\beta = 1.376 \text{ м/с}^2.$$

Далее определяем ускорение точки *C*. Находим проекции ускорения точки *C* на оси и величину ускорения.

$$a_{CA}^{вр} = \varepsilon_{AB} AC = 0.216\cdot 0.2 = 0.0432 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CA}^{ос} = \omega_{AB}^2 AC = 0.756^2\cdot 0.2 = 0.1143 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{C_x} = a_A^{вр}\sin\alpha + a_A^{ос} cos\alpha + a_{CA}^{вр}\sin\beta + a_{CA}^{ос}\cos\beta = 1.254 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{C_y} = a_A^{вр} cos\alpha - a_A^{ос}\sin\alpha - a_{CA}^{вр}\cos\beta + a_{CA}^{ос}\sin\beta = 0;$$

$$a_C = \sqrt{{a_{C_x}}^2 + {a_{C_y}}^2} = 1.254 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки *M* будет равно векторной сумме ускорения полюса (точки *B*) и ускорения точки *M* при вращении колеса вокруг полюса (см. рис. 21):

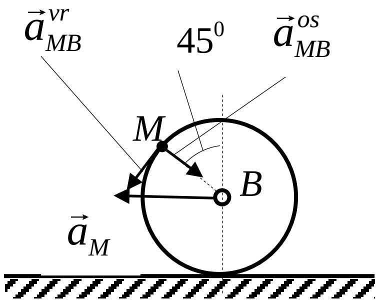


Рис. 21

$$\vec{a}_M = \vec{a}_B + \vec{a}_{MB}^{vr} + \vec{a}_{MB}^{os};\ a_{MB}^{vr} = \varepsilon_k\cdot R;\ a_{MB}^{os} = \omega_k^2\cdot R.$$

Для определения углового ускорения колеса вспомним, как определялась его угловая скорость:

$$\omega_k = \frac{v_B}{BP_k} = \frac{v_B}{R}$$

Поскольку расстояние от точки В до МЦС колеса остается постоянным при движении механизма, то эту зависимость можно проинтегрировать и продифференцировать (такие кинематические связи в аналитической механике называют *голономными*). Поэтому:

$$\varepsilon_k = \frac{d\omega_k}{dt} = \frac{dv_B}{dt}\cdot\frac{1}{R} = \frac{a_B}{R} = \frac{a_B}{R} = \frac{1.376}{0.1} = 13.76 \text{ рад/с}^2.$$

Теперь можно с помощью проецирования на оси координат определить искомое ускорение:

$$a_{MB}^{vr} = 13.76 \cdot 0.1 = 1.376 \text{ м/с}^2;$$
$$a_{MB}^{os} = 3.9^2 \cdot 0.1 = 1.521 \text{ м/с}^2;$$
$$a_{M_x} = a_B + a_{MB}^{vr} \cos 45^0 - a_{MB}^{os} \sin 45^0 = 1.274 \text{ м/с}^2;$$
$$a_{M_y} = -a_{MB}^{vr} \sin 45^0 - a_{MB}^{os} cos 45^0 = -2.048 \ \text{м} / c^2;$$
$$a_M = \sqrt{{a_{M_x}}^2 + {a_{M_y}}^2} = 2.412 \text{ м/с}^2.$$

Ответы

$\beta = 0.36097$ рад.	$v_A = 0.4$ м/с	$a_A^{вр} = 0.8$ м/с^2	$a_A^{ос} = 0.8$ м/с^2	$a_A = 1.13$ м/с^2
$\omega_{AB} = 0.756$ рад/с	$v_B = 0.390$ м/с	$v_C = 0.365$ м/с	$\omega_k = 3.9$ рад/с	$v_M = 0.72$ м/с
$a_{BA}^{вр} = 0.0864$ м/с^2	$\varepsilon_{AB} = 0.216$ рад/с^2	$a_B = 1.376$ м/с^2	$a_C = 1.254$ м/с^2	$\varepsilon_k = 13.76$ рад/с^2
$a_{MB}^{vr} = 1.376$ м/с^2	$a_{MB}^{os} = 1.521$ м/с^2	$a_{M_x} = 1.274$ м/с^2	$a_M = 2.412$ м/с^2	

Тема: динамика

Задачи 121-140. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки, находящейся под действием постоянных сил.

Для заданных расчетных схем и условий, приведенных в таблице 9, исходных данных и величин, которые необходимо определить, приведенных в таблице 10, решить две подзадачи (подзадача 1, подзадача 2).

Указания. Материальная точка в подзадаче 1 движется вверх или вниз по наклонной плоскости. В первом случае (движение вверх) сила трения скольжения отсутствует, а на точку действуют сила тяжести и постоянная сила (в случае ее наличия), направленная вдоль плоскости. Во втором случае (движение вниз) на точку действует сила тяжести и сила трения скольжения. Во подзадаче 2 материальная точка движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. В каждой из подзадач получить конкретные, в соответствии с исходными данными, уравнения движения точки и на их основании определить требуемые в задачах величины.

Таблица 9

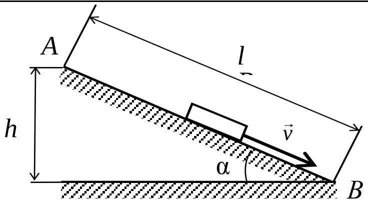
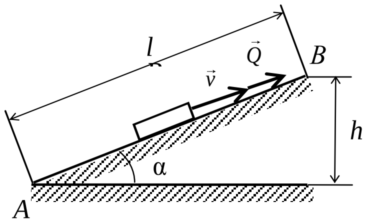
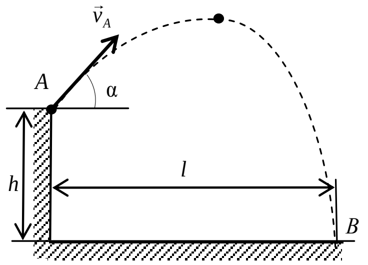
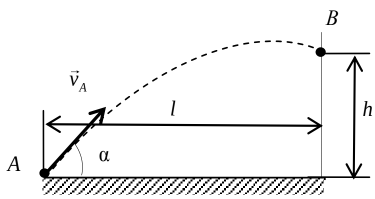
Схема 1	 Точка движется вниз из точки *A*, находящейся на высоте *h*, по участку *AB* длиной *l* наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Коэффициент трения скольжения тела на этом участке равен *f*. Время движения по участку - t_1, начальная скорость тела – v_A, скорость в конце участка – v_B.
Схема 2	 Точка движется вверх из точки *A* по участку *AB* длиной *l* гладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту под действием силы *Q*, постоянной на всем участке и силы тяжести. Время движения по участку – t_1, скорость в конце участка – v_B. Точка *B* находится на высоте *h*.
Схема 3	 Снаряд вылетает из орудия, находящегося в точке *A* на высоте *h*, с начальной скоростью v_A под углом α к горизонту. Время полета – t_1, дальность полета *AB* = *l*, скорость падения – v_B.
Схема 4	 Снаряд вылетает из зенитного орудия, находящегося в точке *A* с начальной скоростью v_A под углом α к горизонту и за время полета – t_1, поражает цель, находящуюся на расстоянии *AB* = *l* и на высоте *h*.

Таблица 10

задача	Подзадача 1		Подзадача 2	
	схема, условие (табл.9)	дано, найти	схема, условие (табл.9)	дано, найти
101	1	Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30^0$; $t_1 = 5$ с; $f = 0$. Найти: v_B; l.	3	Дано: $\alpha = 45^0$; $l = 1000$ м; $h = 1$ м. Найти: v_A; t_1.
102	2	Дано: $v_A = 25$ м/с; $\alpha = 30^0$; $t_1 = 5$ с; $Q = 0$. Найти: v_B; l.	4	Дано: $l = 10000$ м; $h = 1000$ м; $a = 30^0$. Найти: v_A; t_1.
103	1	Дано: $v_B = 15$ м/с; $l = 10$ м; $\alpha = 60^0$; $f = 0$. Найти: v_A; t_1.	3	Дано: $\alpha = 30^0$; $h = 3$ м; $t = 2$ с. Найти: v_A; v_B.
104	2	Дано: $v_B = 10$ м/с; $\alpha = 45^0$; $l = 10$ м; $Q = 0$. Найти: v_A; t_1.	4	Дано: $l = 10000$ м; $h = 1000$ м; $t_1 = 50$ с. Найти: v_A; α.
105	1	Дано: $v_A = 5$ м/с; $v_B = 10$ м/с; $l = 20$ м; $f = 0$. Найти: α; t_1	3	Дано: $v_A = 100$ м/с; $\alpha = 30^0$; $h = 5$ м. Найти: l; t_1.
106	2	Дано: $v_A = 15$ м/с; $\alpha = 30^0$; $t_1 = 2$ с; $Q = 0{,}1G$. Найти: v_B; h.	4	Дано: $l = 30000$ м; $h = 5000$ м; $v_A = 800$ м/с. Найти: t_1; α.
107	1	Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30^0$; $t_1 = 2$ с; $f = 0{,}1$. Найти: v_B; h.	3	Дано: $v_A = 50$ м/с; $\alpha = 45^0$; $h = 10$ м. Найти: $y = f(x)$; t_1.
108	2	Дано: $v_B = 5$ м/с; $\alpha = 45^0$; $l = 3$ м; $Q = G$. Найти: v_A; t_1.	4	Дано: $l = 5000$ м; $h = 100$ м; $a = 45^0$. Найти: v_A; t_1.
109	1	Дано: $v_B = 10$ м/с; $\alpha = 30^0$; $l = 10$ м; $f = 0{,}2$. Найти: v_A; t_1.	3	Дано: $v_A = 10$ м/с; $\alpha = 30^0$; $l = 100$ м. Найти: t_1; h.
110	2	Дано: $v_A = 1$ м/с; $v_B = 5$ м/с; $\alpha = 30^0$; $t_1 = 5$ с; $m = 10$ кг. Найти: l; Q.	4	Дано: $l = 5000$ м; $h = 100$ м; $t_1 = 30$ с. Найти: v_A; α.

Продолжение таблицы 10

111	1	Дано: $v_A = 5$ м/с; $v_B = 40$ м/с; $\alpha = 60^0$; $t_1 = 5$ с. Найти: l; f.	3	Дано: $v_A = 30$ м/с; $l = 100$ м; $t = 5$ с. Найти: α; h.
112	2	Дано: $v_A = 6$ м/с; $v_B = 2$ м/с; $l = 10$ м; $Q = 0$. Найти: α; t_1.	4	Дано: $l = 20000$ м; $h = 3000$ м; $v_A = 600$ м/с. Найти: t_1; α.
113	1	Дано: $v_A = 2$ м/с; $v_B = 6$ м/с; $\alpha = 30^0$; $l = 5$ м. Найти: t_1; f.	3	Дано: $v_A = 100$ м/с; $\alpha = 45^0$; $h = 0$. Найти: l; $x = f(t)$; $y = f(t)$.
114	2	Дано: $v_A = 6$ м/с; $v_B = 2$ м/с; $\alpha = 30^0$; $l = 20$ м; $m = 5$ кг. Найти: t; Q.	4	Дано: $l = 1000$ м; $h = 0$ м; $a = 30^0$. Найти: v_A; t_1.
115	1	Дано: $v_B = 10$ м/с; $\alpha = 30^0$; $t_1 = 3$ с; $l = 20$ м. Найти: v_A; f.	3	Дано: $v_A = 10$ м/с; $\alpha = 30^0$; $t_1 = 1$ с. Найти: l; h.
116	2	Дано: $v_B = 10$ м/с; $\alpha = 45^0$; $t_1 = 5$ с; $l = 40$ м; $m = 2$ кг. Найти: v_A; Q.	4	Дано: $l = 1000$ м; $h = 0$ м; $t_1 = 20$ с. Найти: v_A; α.
117	1	Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 45^0$; $l = 10$ м; $f = 0{,}2$. Найти: v_B; t_1.	3	Дано: $\alpha = 45^0$; $l = 1000$ м; $h = 0$. Найти: v_A; $y = f(x)$.
118	2	Дано: $v_A = 60$ м/с; $\alpha = 60^0$; $l = 20$ м; $Q = 2G$. Найти: v_B; t_1.	4	Дано: $l = 15000$ м; $h = 1000$ м; $v_A = 700$ м/с. Найти: t_1; α.
119	1	Дано: $v_B = 20$ м/с; $v_A = 0$; $\alpha = 30^0$; $f = 0{,}1$. Найти: t_1; h.	3	Дано: $v_A = 5$ м/с; $\alpha = 30^0$; $l = 10$ м. Найти: h; v_B.
120	2	Дано: $v_B = 8$ м/с; $\alpha = 30^0$; $l = 5$ м; $Q = 3G$. Найти: t_1; h.	4	Дано: $l = 50000$ м; $h = 8000$ м; $a = 60^0$. Найти: v_A; t_1.

Примеры выполнения задач 101-120

Пример 1. Тело движется из точки *A* вверх по участку *AB* наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом, под действием силы *Q*, равной 1.5 веса груза (рис. 22). Коэффициент трения скольжения тела по плоскости $f = 0{,}1$. В начальный момент скорость тела $v_0 = 10$ м/с. Определить путь *s*, пройденный телом, и его скорость *v* за время $t = 5$ *c*.

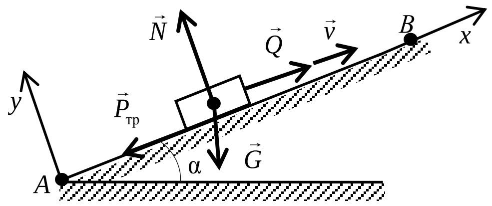


Рис. 22

Решение. Рассмотрим движение тела, принимая его за материальную точку, в текущем положении на участке *AB*. Выберем систему координат с центром *A*, совпадающим с начальным положением точки, а одну из осей направим параллельно вектору скорости. Изобразим активные силы, приложенные к материальной точке, и реакции связей (см. рис. 18).

Запишем основное уравнение динамики в векторной форме: $m\vec{a} = \vec{P}$.

Составим дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси выбранной системы координат:

$$m\ddot{x} = Q - P_{\text{тр}} - G\sin\alpha; \quad m\ddot{y} = N - G\cos\alpha; \quad \ddot{y} = 0;$$

$$P_{\text{тр}} = fN; \quad N = G\cos\alpha; \quad G = mg; \quad Q = 1.5\,mg.$$

Теперь вычислим

$$m\ddot{x} = 1.5mg - 0.1mg\cos\alpha - mg\sin\alpha,$$

откуда

$$\ddot{x} = 9.81(1.5 - 0.1 \cdot 0{,}866 - 0.5) = 8.957 \text{ м/с}^2.$$

Проинтегрируем дважды дифференциальное уравнение движения

$$\dot{x} = 8.957 \cdot t + c_1; \quad x = 8.957\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2.$$

Используя начальные условия движения тела, определим при $t = 0$ постоянные интегрирования:

$$c_1 = \dot{x}_0 = v_0 = 10 \quad \text{и} \quad c_2 = x_0 = s_0 = 0.$$

Для момента времени $t = 5$ с конечные параметры следующие: $\dot{x} = v$ и $x = s$. Теперь определим значения этих величин

$$v = 8.957 \cdot t + 10 \quad \text{и} \quad s = 8.957\frac{t^2}{2} + 10t,$$

откуда окончательно получим

$$v = 54.785 \text{ м/с} \quad \text{и} \quad s = 161.962 \text{ м}.$$

Пример 2. Снаряд вылетает из орудия, находящегося на высоте $h = 10$ м под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту, с начальной скоростью $v_0 = 600$ м/с (рис. 23).

Составить уравнения движения снаряда и уравнение его траектории, определить дальность полета, максимальную высоту полета, время полета, скорость снаряда в момент его падения, пренебрегая сопротивлением воздуха.

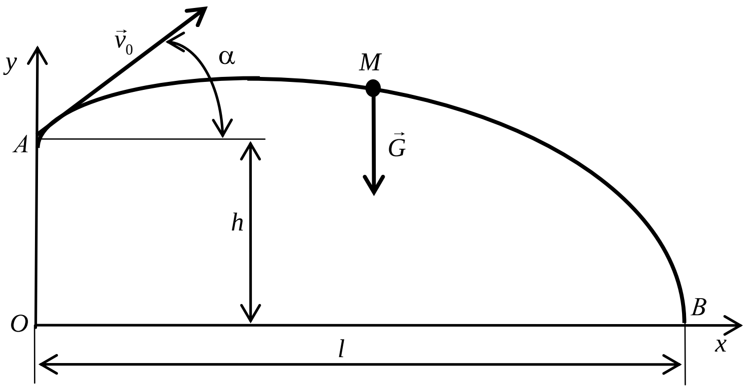


Рис. 23

Решение. Выберем систему координат и изобразим (снаряд) точку M в произвольном положении. На точку действует только постоянная сила тяжести G. Запишем дифференциальные уравнения движения точки:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}; \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} P_{ky}.$$

В данном случае $m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = -G = -mg$. Сократив в этих уравнениях величину массы m, отличную от нуля, получим

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -g.$$

Начальные условия в момент времени $t = 0$:

$$x_0 = 0; \quad y_0 = h; \quad \dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha; \quad \dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha.$$

Дважды проинтегрируем дифференциальные уравнения движения точки:

$$v_x = \dot{x} = C_1;$$

$$x = C_1 \cdot t + C_2;$$

$$\ddot{y} = -g; \quad v_y = \dot{y} = -gt + C_3;$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 \cdot t + C_4.$$

Вычислив постоянные интегрирования C_1 - C_4 из начальных условий при $t = 0$

$$C_1 = \dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha, \ C_2 = x_0 = 0, \ C_3 = \dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha, \ C_4 = y_0 = h,$$

запишем уравнения движения снаряда:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t; \ y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t + h.$$

Исключая из 1-го уравнения время $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$, получим уравнение траектории движения точки в декартовой системе координат

$$y = x \cdot tg\alpha - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + h .$$

Соответствующая этому уравнению траектория представляет собой параболу.

Определим дальность полета снаряда. В момент падения его координаты y = 0, x = l. Из уравнения траектории следует, что

$$l \cdot tg\alpha - \frac{gl^2}{2v_O^2 \cos^2\alpha} + h = 0 ,$$

откуда с учетом исходных данных получим

$$l\frac{0,5}{0,866} - \frac{9,8l^2}{2 \cdot 600^2 \cdot 0,866^2} + 10 = 0 .$$

Решая квадратное уравнение, найдем $l_1 = -17,32$ м; $l_2 = 31896$ м. Так как траекторией движения снаряда является ветвь параболы с положительными абсциссами ее точек, то дальность полета $l = 31896$ м.

При максимальной ординате полета снаряда $y_{\max}$ проекция скорости $v_y = \dot{y} = 0$. Из уравнения

$$-gt_1 + v_O \sin\alpha = 0$$

найдем время полета до достижения максимальной высоты снаряда

$$t_1 = \frac{v_O \sin\alpha}{g} = 30,6\,\text{с}.$$

Подставляя полученное значение времени во 2-е уравнение

$$y_{\max} = h_{\max} = -\frac{9,8 \cdot 30,6^2}{2} + 600 \cdot 0,5 \cdot 30,6 = 4592\,\text{м}$$

и используя 1-е уравнение, определим при значении координаты $x = l$ время полета снаряда

$$t_2 = \frac{l}{v_O \cos\alpha} = \frac{31896}{600 \cdot 0,866} = 61,4 \text{ с}.$$

Скорость снаряда в момент его падения найдем с помощью формул для проекций скоростей на оси координат

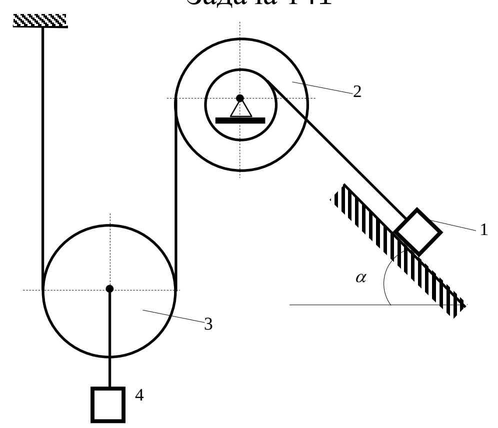
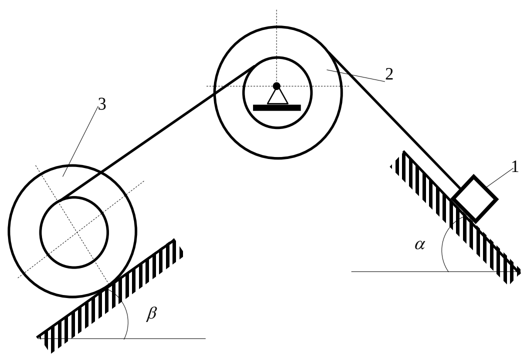
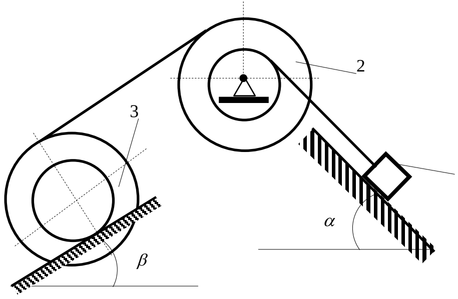
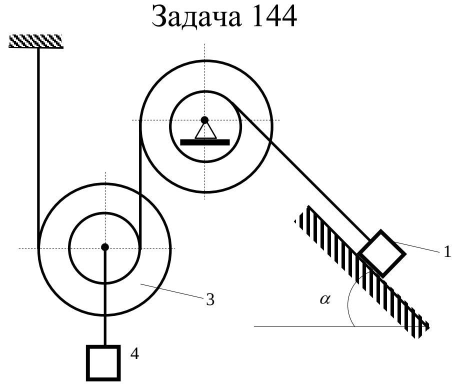
$$v_B = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_O^2 \cos^2\alpha + \left(-gt_2 + v_O \sin\alpha\right)^2} =$$
$$= \sqrt{600^2 \cdot 0,866^2 + \left(-9.8 \cdot 61.4 + 600 \cdot 0.5\right)^2} = 600.163\,\text{м/с}.$$

Задачи 141-160. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы.

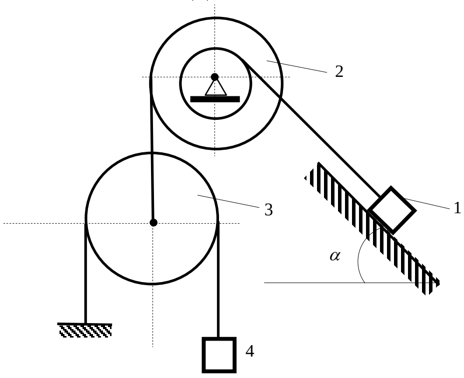
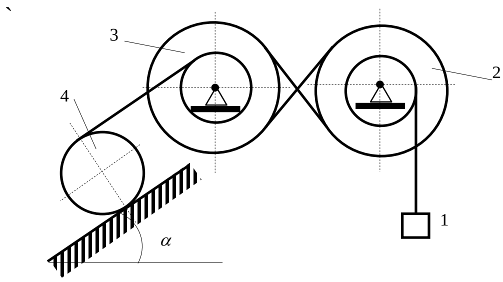
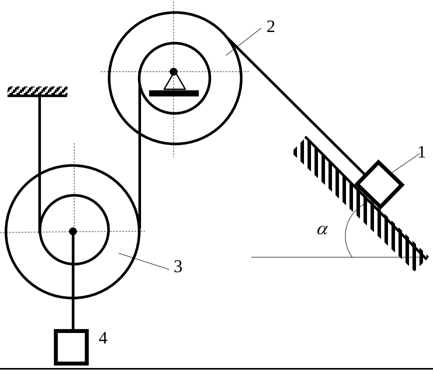
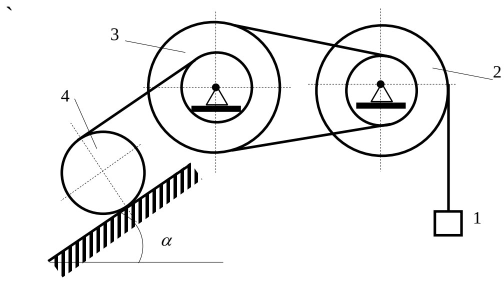
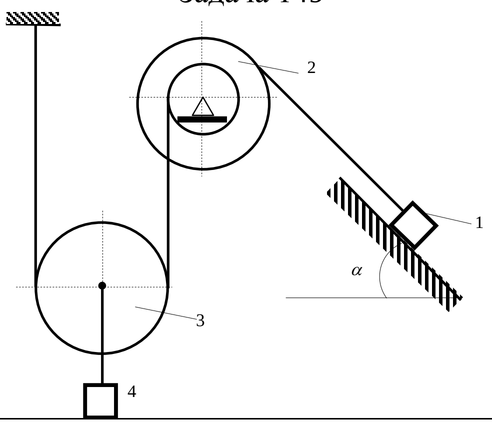
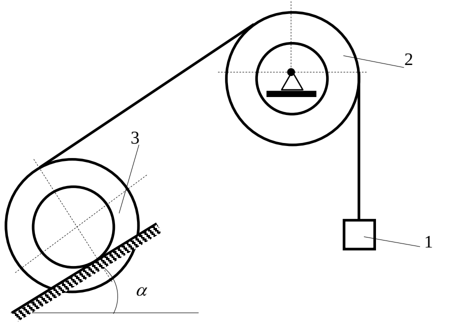
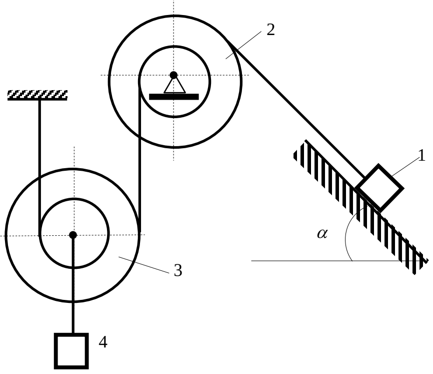
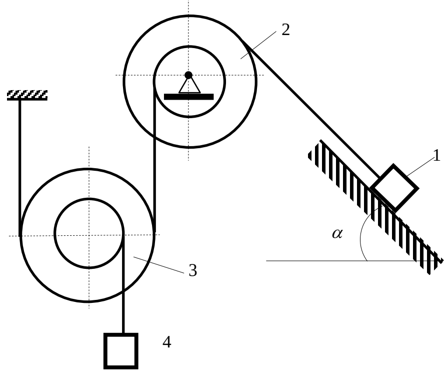
Для приведенных в таблице 11 расчетных схем, и исходных данных, приведенных в таблицах 12 и 13 определить указанную кинематическую характеристику одного из тел системы в момент времени, когда путь, пройденный телом 1 станет равным s .

Указания. Механическая система приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести из положения указанного в расчетной схеме. m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел, входящих в систему (если тело не имеет номера, то его масса равна нулю). ρ_2, ρ_3– радиусы инерции тел *2* и *3*. Если радиус инерции тела, которое совершает вращательное или плоскопараллельное движение не указан, то тело является сплошным однородным цилиндром или диском. Величины δ – коэффициенты трения качения, которые катятся без скольжения по негладкой плоскости, а величины f – коэффициенты трения скольжения соответствующих тел, которые движутся поступательно по негладкой плоскости, а также тормозных колодок. R_2, r_2, R_3, r_3, R_4 – радиусы больших и малых ступеней ступенчатых тел, или тел простой формы. Углы α, β – углы наклона плоскостей.

Таблица 11

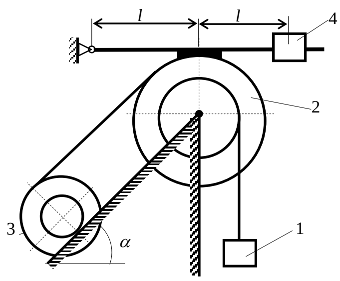
Задача 141 	Задача 142 
Задача 143 	Задача 144 

Продолжение таблицы 11

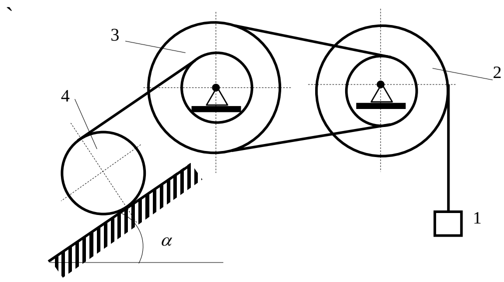
Задача 145 	Задача 146 
Задача 147 	Задача 148 
Задача 149 	Задача 150 
Задача 151 	Задача 152 

Продолжение таблицы 11

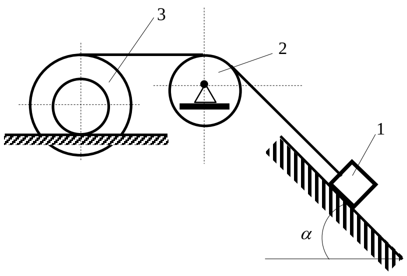
Задача 153



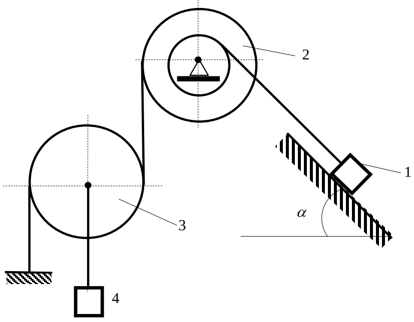
Задача 154



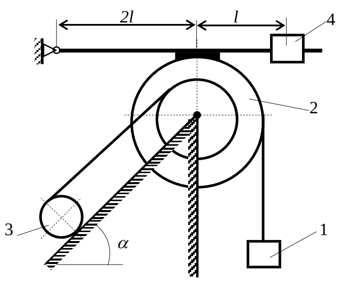
Задача 155



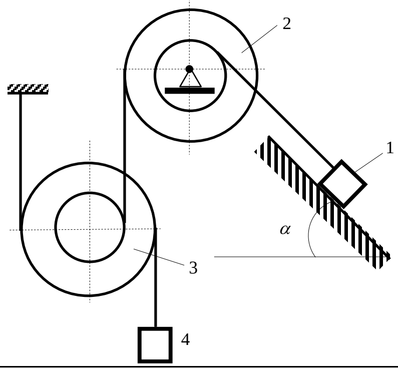
Задача 156



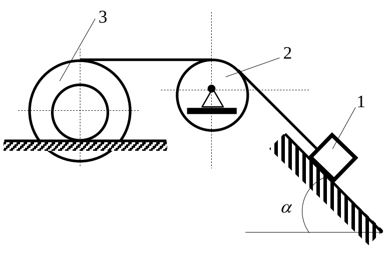
Задача 157



Задача 158



Задача 159



Задача 160

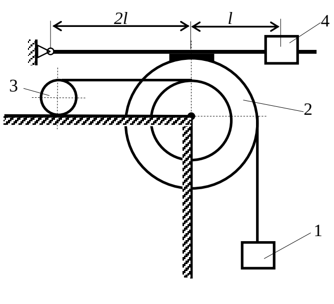


Таблица 12

Задача	m_1	m_2	m_3	m_4	ρ_2	ρ_3	δ	f
	кг				м			
141	100	60	40	25	0,2	–	–	0,1
142	125	50	80	–	0,15	0,25	0,02	0,05
143	90	30	20	–	0,2	0,35	0,015	0,1
144	80	40	30	10	0,3	0,2	–	0,05

Продолжение таблицы 12

145	200	120	50	30	0,2	–	–	0,15
146	150	50	60	45	0,15	0,2	0,03	–
147	150	60	45	30	0,25	0,3	–	0,1
148	80	35	100	50	0.25	0,2	0,02	-
149	100	60	25	40	0,2	–	–	0,1
150	125	50	75	–	0,35	0,2	0,03	–
151	75	30	20	25	0,15	0,25	–	0,2
152	90	40	35	25	0,2	0,35	–	0,15
153	150	70	50	50	0,15	0,2	0,02	0,3
154	200	45	60	50	0,15	0,25	0,03	–
155	75	60	100	–	–	0,3	0,025	0,15
156	80	35	30	25	0,3	–	–	0,1
157	180	60	75	30	0,25	–	0,02	0,2
158	250	75	60	20	0,3	0,2	–	0,1
159	175	30	100	–	–	0,3	0,03	0,05
160	90	40	100	50	0,35	–	0,01	0,25

Таблица 13

Завдача	R_2	r_2	R_3	r_3	R_4	α	β	s	найти
	м					град		м	-
141	0,2	0,1	0,3	–	–	30	–	1.0	v_4
142	0,4	0,2	0,5	0,35	–	45	60	0.6	v_{c3}
143	0,3	0,2	0,4	0,15	–	30	45	0.5	v_1
144	0,4	0,2	0,5	0,25	–	60	–	0.8	ω_2
145	0,5	0,25	0,4	–	–	45	–	1.2	v_4
146	0,4	0,2	0,5	0,3	–	60	–	1.0	ω_3
147	0,8	0,4	0,7	0,35	–	45	–	0.6	v_4
148	0,3	0.2	0,4	0,2	–	30	–	0.5	ω_3
149	0,5	0,3	0,4	–	–	45	–	0.8	v_4
150	0,4	0,2	0,5	0,25	–	60	–	1.2	v_{c3}
151	0,5	0,25	0,4	0,2	–	30	–	1.0	v_1
152	0,4	0,2	0,5	0,3	–	45	–	0.6	ω_3
153	0,4	0,25	0,5	0,25	–	60	–	0.5	v_{c3}
154	0,4	0,2	0,5	0,25	–	30	–	0.8	ω_3
155	0,3	–	0,4	0,2	–	45	–	1.2	v_1
156	0,4	0,2	0,5	–	–	60	–	1.0	v_4
157	0,6	0,4	0,2	–	–	45	–	0.6	ω_3
158	0,3	0,2	0,4	0,15	–	30	–	0.5	v_1
159	0,3	–	0,6	0,3	–	60	–	0.8	ω_3
160	0,6	0,4	0,2	–	–	–	–	1.2	v_{c3}

Пример выполнения задач 141-160

Механическая система состоит из трех тел, которые связаны между собой нерастяжимыми невесомыми нитями (рис. 24).

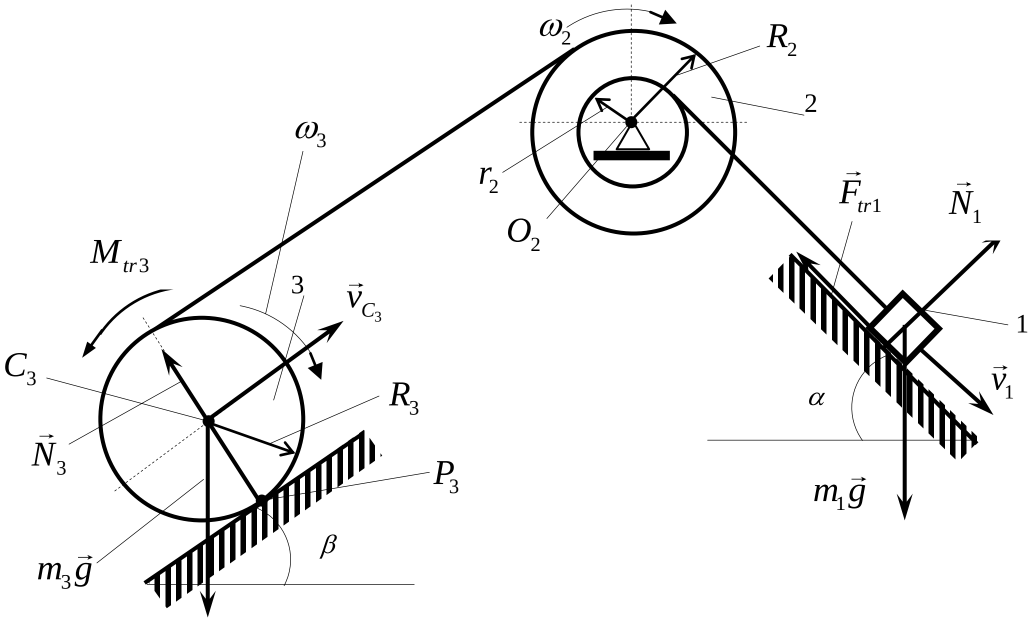


Рис. 24

Тело 1 движется поступательно по наклонной плоскости, тело 2 вращается вокруг неподвижной оси, тело 3 катится без скольжения по наклонной плоскости, совершая плоскопараллельное движение. В начальный момент времени система находилась в состоянии покоя, а затем начала движение под действием сил тяжести.

Дано:

1) массы тел – $m_1 = 200$ кг; $m_2 = 20$ кг; $m_3 = 40$ кг;
2) радиусы ступеней колес – $R_2 = 0.5$ м; $r_2 = 0.35$ м; $R_3 = 0.4$ м;
3) углы наклона плоскостей – $\alpha = 30°$; $\beta = 45°$;
4) радиус инерции ступенчатого колеса *2* относительно оси вращения, – $\rho_{2z} = 0{,}3$ м, тело *3* является однородным сплошным цилиндром;
5) коэффициенты трения скольженияння тел *1* и *3*: $f_1 = 0{,}1,\ f_3 = 0{,}2;$ коэффициент трения качения тела 3 – $\delta_3 = 0{,}02$ м.

Определить угловую скорость колеса 3 – ω_3, в момент времени, когда путь, пройденный телом 1 станет равным – $s = 0.5$ м.

Решение.

1) Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной (конечной форме):

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i, \qquad (1)$$

где слева записана разность кинетических энергий конечного и начального положений системы, а справа суммы полных работ внешних и внутренних сил, действующих на систему. Поскольку система состоит из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями, а трение в опоре тела 2 отсутствует, то сумма полных работ внутренних сил системы равна нулю. Далее поскольку система приходит в движение из состояния покоя, то кинетическая энергия в начальном положении равна нулю. Поэтому основное уравнение задачи будет иметь вид:

$$T_1 = T = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

2) Вычислим кинетическую энергию конечного положения системы как сумму кинетических энергий тел, входящих в систему:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}.$$

Тела системы совершают следующие виды движений: тело 1 поступательное, тело 2 вращательное (вокруг неподвижной оси), а тело 3 – плоскопараллельное. Поэтому имеем:

$$T^{(1)} = m_1 \frac{v_1^2}{2}; T^{(2)} = J_z^{(2)} \frac{\omega_2^2}{2}; T^{(3)} = m_3 \frac{v_{C_3}^2}{2} + J_{z_C}^{(3)} \frac{\omega_3^2}{2}.$$

Определяем моменты инерции тел 2 и 3:

$$J_z^{(2)} = m_2 \rho_{2_z}^2;\ J_{z_C}^{(3)} = m_3 \frac{R_3^2}{2}.$$

Далее, учитывая, что система имеет одну степень свободы, выразим кинематические характеристики тел через скорость тела 1:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2}; \omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{2R_3} = \frac{v_1 R_2}{r_2 2R_3}; v_{C_3} = \omega_3 R_3 = \frac{v_1 R_2}{r_2 2}. \qquad (3)$$

В результате получим для кинетической энергии системы:

$$T = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \frac{\rho_{2_z}^2}{2r_2^2} + m_3 \frac{R_2^2}{8r_2^2} + m_3 \frac{R_2^2}{16r_2^2} \right) v_1^2 = A v_1^2. \quad (4)$$

3) Определим сумму полных работ внешних сил. Прежде всего исключим из рассмотрения те внешние силы, которые не совершают работу на перемещениях системы. К ним относится сила тяжести тела 2 и реакций опоры O_2. Эти силы приложены к неподвижной точке. Не будут совершать работу нормальные реакции наклонных плоскостей (для тела 1 нормальная реакция перпендикулярна перемещению тела, а для тела 3 приложена в мгновенном центре скоростей тела точке P_3). Также не будет совершать работу и сила трения скольжения тела 3, поскольку точка ее приложения является мгновенным центром скоростей тела 3. Однако, силы нормальных давлений наклонных плоскостей укажем (см. рис. 24). К силам и моментам сил, совершающих работу относятся: сила тяжести тела 1 - $m_1\vec{g}$ и сила его трения скольжения – $\vec{F}_{tr1}$, а также сила тяжести тела 3 – $m_3\vec{g}$ и момент сил его трения качения – M_{tr3}. Запишем выражение для суммы работ внешних сил.

$$\sum A_k^e = m_1 g \sin\alpha \cdot s - f_1 m_1 g \cos\alpha \cdot s - m_3 g \sin\beta \cdot s_{c_3} - \delta_3 m_3 g cos\beta \cdot \varphi_3.$$

Здесь:

$$f_1 m_1 g \cos\alpha = f_1 N_1; \delta_3 m_3 g cos\beta = \delta_3 N_3.$$

Теперь следует выразить перемещение центра масс тела 3 и его угол поворота через перемещение тела 1. Для этого обратим внимание на уравнения (3). Там записаны уравнения кинематических связей, которые интегрируются (такие связи в аналитической механике называются *голономными*). Поэтому можно записать:

$$\varphi_3 = \frac{sR_2}{r_2 2R_3}; \; s_{C_3} = \frac{sR_2}{r_2 2}.$$

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2}; \; \omega_3 = \omega_2 \frac{R_2}{2R_3} = \frac{v_1 R_2}{r_2 2R_3}; \; v_{C_3} = \omega_3 R_3 = \frac{v_1 R_2}{r_2 2}. \qquad (5)$$

Теперь для суммы работ внешних сил получаем:

$$\sum A_k^e = m_1 g \sin\alpha \cdot s - f_1 m_1 g \cos\alpha \cdot s - m_3 g \sin\beta \cdot \frac{sR_2}{r_2 2} - \delta_3 m_3 g cos\beta \cdot \frac{sR_2}{r_2 2R_3} = Bs. \; (6)$$

Выполним необходимые вычисления.

$$A = \frac{m_1}{2} + m_2 \frac{\rho_{2_z}^2}{2r_2^2} + m_3 \frac{R_2^2}{8r_2^2} + m_3 \frac{R_2^2}{16r_2^2} = 100 + 7.347 + 10.204 + 5{,}102 = 122.653.$$

$$B = m_1 g \sin\alpha - f_1 m_1 g \cos\alpha - m_3 g \sin\beta \cdot \frac{R_2}{r_2 2} - \delta_3 m_3 g cos\beta \cdot \frac{R_2}{r_2 2R_3} =$$

$$= 981 - 169.91 - 198.162 - 9.91 = 603.018.$$

Подставляя полученные результаты в (2), получаем:

$$129.005 \cdot v_1^2 = 603.018 \cdot 0.5; \; v_1 = \sqrt{\frac{603.018 \cdot 0.5}{122.653}} = 1.568 \text{ м/с}.$$

И, наконец, ипользуя кинематические зависимости (3) определяем угловую скорость колеса 3:

$$\omega_3 = \frac{v_1 R_2}{r_2 2R_3} = \frac{1.568 \cdot 0.5}{0.35 \cdot 2 \cdot 0.4} = 2.8 \text{ рад/с}.$$

4. Список вопросов для подготовки к экзамену

1. Основные понятия, аксиомы статики.
2. Разложение силы на составляющие; проекции силы на оси, на плоскость.
3. Несвободное тело. Принцип освобождаемости от связей. Виды связей и их реакции.
4. Приведение сходящихся сил к равнодействующей, условия их равновесия.
5. Сложение параллельных сил, пара сил.
6. Момент силы, аналитическое выражение момента силы относительно декартовых осей.
7. Главный момент системы сил. Момент пары.
8. Лемма Пуансо о переносе силы. Приведение системы сил к главному вектору и главному моменту.
9. Условия равновесия произвольной системы сил.
10. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей и её следствия. Условия равновесия плоской системы сил.
11. Устойчивость при равновесии. Трение скольжения, качения, верчения.
12. Правило вычисления момента силы относительно оси.
13. Равновесие пространственных систем сил.
14. Три способа задания движения.
15. Скорость точки и при координатном и естественном способах задания движения.
16. Вектор ускорения, разложение его на декартовы и естественные оси.
17. Поступательное движение твёрдого тела.
18. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Скорости и ускорения точек вращающегося тела.
19. Плоское движение твёрдого тела.
20. Теорема о существовании МЦС, способы его определения.
21. Ускорение точки в плоском движении.
22. Теорема о равенстве проекций скоростей точек тела на прямую, проходящую через эти точки.
23. Дифференциальное уравнение движения материальной точки.
24. Общие теоремы динамики механической системы.
25. Центр масс. Классификация сил, действующих на точки механической системы.
26. Теорема о движении центра масс. Закон сохранения движения центра масс.
27. Теорема об изменении количества движения механической системы.
28. Закон сохранения количества движения.
29. Теорема об изменении кинетического момента и закон его сохранения.
30. Дифференциальное уравнение вращательного движения тела.
31. Осевые моменты инерции твёрдого тела.
32. Теорема Гюйгенса о моментах инерции относительно параллельных осей.
33. Работа силы, работа момента пары. Мощность. КПД.
34. Теорема Кёнига о кинетической энергии механической системы.
35. Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной и интегральной формах.
36. Принцип возможных перемещений.

37. Главный вектор и главный момент сил инерции. Принцип Даламбера.

5. Критерии оценки знаний студентов на экзамене

– отметка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал монографической литературы, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.

– отметка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.

– отметка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, демонстрирует недостаточно систематизированы теоретические знания программного материала, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.

– отметка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки при его изложении, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы.

6. Литература

Список основной литературы

1. Мкртычев, О. В. Теоретическая механика: учебник / О.В. Мкртычев. — Москва: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2019. — 359 с. — (Высшее образование: Бакалавриат).— www.dx.doi.org/10.12737/textbook_59d71fe9ac68f2.88299087. - ISBN 978-5-9558-0546-7.-Текст:электронный.-URL: https://znanium.com/catalog/product/1039251.
2. Мкртычев, О. В. Теоретическая механика. Практикум: учебное пособие / О.В. Мкртычев. — Москва: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2020. — 337 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-9558-0547-4. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1078351.

Список рекомендуемой литературы

3. Теоретическая механика. Сборник задач: Учебное пособие / М.Н. Кирсанов. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 430 с. (ЭБС «Инфра - М»)
4. Решения задач по теоретической механике: Учебное пособие / М.Н. Кирсанов. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 216 с. (ЭБС «Инфра - М»)
5. Теоретическая механика: Учебник / В.Л. Цывильский. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: КУРС: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 368 с. (ЭБС «Инфра - М»)

Составитель **Тарсис Екатерина Юрьевна**

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Методические указания по проведению практических занятий, самостоятельному изучению дисциплины и выполнению расчетно-графической работы

Печатается в авторской редакции

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160