

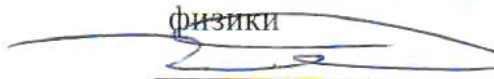
ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

Кафедра математики и физики

Рег. № Тим. 4. 03-080/8
« 02 » 07 2020 г.

УТВЕРЖДЕН

на заседании кафедры
Протокол от « 11 » 06 20 20 г. № 12
Заведующий кафедрой математики и
физики


В.Н. Бабин
(подпись)

**ФОНД
ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

Б1.Б.08 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

38.03.04 Государственное и муниципальное управление

Код и наименование направления подготовки

профиль:

основной вид деятельности: **организационно-управленческая**

дополнительный вид деятельности:

(профиль и виды деятельности)

Новосибирск 2020

8260

**Паспорт
фонда оценочных средств**

№ п/ п	Контролируемые разделы дисциплины	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1	Матрицы и определители	ОК-7, ОПК-2	–Вопросы для собеседования –Тесты –Задания для контрольной работы
2	Системы линейных алгебраических уравнений		–Вопросы для собеседования –Тесты –Задания для контрольной работы
3	Элементы векторной алгебры		–Вопросы для собеседования –Тесты –Задания разных уровней
4	Линейные пространства		–Вопросы для собеседования –Тесты
5	Элементы аналитической геометрии. Комплексные числа		–Вопросы для собеседования –Задания для контрольной работы

ВВЕДЕНИЕ

Разработанный фонд оценочных средств (ФОС) по дисциплине *Линейная алгебра* представляет собой совокупность контрольно-измерительных материалов (КИМ), предназначенных для измерения уровня достижения студентом необходимых знаний, умений, навыков и уровня сформированности компетенций, определенных в ФГОС ВО по направлению подготовки **38.03.04 Государственное и муниципальное управление**.

В ФОС входят оценочные средства текущего контроля успеваемости и оценочные средства промежуточной аттестации студентов, соответствующие требованиям рабочей программы реализуемой учебной дисциплины на каждом этапе обучения.

1. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Текущая аттестация студентов по дисциплине «Линейная алгебра» проводится в соответствии с локальными документами НГАУ, является обязательной и осуществляется ведущим преподавателем.

Фонд оценочных средств текущего контроля успеваемости по дисциплине «Линейная алгебра» включает:

- вопросы для собеседования;
- тесты;
- задания разных уровней;
- задания для контрольных работ.

1.1. Критерии оценки

Критерии оценки результатов собеседования:

Критерии оценки (в баллах):

- 5 баллов выставляется обучающемуся, если он ответил на 90% вопросов;
- 4 балла выставляется обучающемуся, если он ответил на 75% вопросов;
- 3 балла выставляется обучающемуся, если он ответил на 55% вопросов;
- 2 балла выставляется обучающемуся, если он ответил на менее 50% вопросов.

Критерии оценки тестирования:

Тест должен быть выполнен четко. С полным обоснованием ответов как теоретических, так и практических заданий.

- оценка «отлично» выставляется студенту, если процент правильных ответов составляет 80-100%;
- оценка «хорошо» - 60-79%;
- оценка «удовлетворительно» - 40-59%;
- оценка «неудовлетворительно» - менее 40%.

Критерии оценки выполнения заданий разного уровня:

- при выполнении более 80% задач первого уровня, студент может рассчитывать на удовлетворительную оценку по материалу данного раздела;
- при выполнении более 80% задач второго уровня, студент может рассчитывать на хорошую и отличную оценку по данному материалу.

Критерии оценки выполнения контрольных работ

Критерии оценки (в баллах):

- 5 баллов выставляется студенту, если правильно выполнено 90-100% заданий;
- 4 балла, если правильно выполнено 70-90% заданий;
- 3 балла, если правильно выполнено 50-70% заданий;
- 2 балла, если правильно выполненных заданий менее 50%.

1.2. Описание оценочных средств по разделам (темам) дисциплины

Раздел 1. Матрицы и определители

Вопросы для собеседования

Тема 1.1. «Элементы матричной алгебры»

1. Что называется матрицей?
2. В каком случае две матрицы называются равными?
3. Перечислите свойства операции сложения матриц?
4. Перечислите свойства операции умножения матриц?
5. Что такое транспонирование матриц?
6. Какая матрица называется ступенчатой?
7. Перечислите элементарные преобразования строк матрицы.
8. Дайте определение невырожденной матрицы.

Тема 1.2 «Определители»

9. Какие способы вычисления определителей вы знаете?
10. Сформулируйте критерий невырожденности матрицы в терминах определителя.
11. Чему равен определитель, содержащий две пропорциональные строки?
12. Что вы можете сказать об определителях взаимнообратных матриц?
13. Чему равен определитель произведения матриц?

Тема 1.3 «Ранг матрицы. Обратная матрица»

14. Дайте определение ранга матрицы.
15. Какие матрицы называются строчно-эквивалентными?
16. Чему равен ранг ступенчатой матрицы?
17. Какие методы вычисления ранга вы знаете?
18. Какая матрица называется обратной данной и в каком случае она существует?
19. Перечислите свойства обратной матрицы.
20. Какие методы поиска обратной матрицы вы знаете?

Тесты (практика)

Вариант 1

1. Записать единичную матрицу 5-го порядка.

Ответ:

2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Если $B = -2A^T + A$, то матрица B равна:

$$A. \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 6 & -9 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}; B. \begin{pmatrix} -1 & -6 & 8 \\ 6 & -3 & 11 \\ -4 & -16 & -1 \end{pmatrix}; C. \begin{pmatrix} -1 & -6 & 8 \\ 6 & -3 & -11 \\ -4 & 16 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

3. Для матриц A и B найти произведение $A \cdot B$:

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; 2. A = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}; 3. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

A. $A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -14 & 21 \end{pmatrix}$; B. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -2 & -17 \end{pmatrix}$; C. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ:

	1	2	3
A		+	
B			+
C	+		

4. Найти определители матриц:

1. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -14 & 0 & -7 \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}$.

A. 28; B. 0; C. -28; D. -18.

Ответ:

	1	2	3	4
A		+		
B	+			
C			+	
D				+

5. Разложение определителя $\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ по первой строке имеет вид:

A. $11a - 2b - c$; B. $-a + 2b + c$; C. $a + 2b - c$; D. $11a + 2b - c$.

Ответ: C.

6. Дан определитель $\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. Записать соответствующую правую часть равенства для

каждого из следующих определителей:

1. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \dots$; 2. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 + 2a_2 & b_1 + 2b_2 & c_1 + 2c_2 \end{vmatrix} = \dots$; 3. $\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} = \dots$.

A. $2 \cdot \det A^T$; B. $\det(2 \cdot A^T)$; C. 0; D. $\det A + 2 \det(2A)$.

Ответ:

	1	2	3
A	+		
B			+
C		+	
D			

7. Для заданных матриц указать (если она существует) обратную матрицу A^{-1} .

$$1. \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; 2. \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; 3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}; 4. \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}; 5. \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; 6. \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$A. A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & -8 & -6 \\ 0 & 27 & 18 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix}; B. \text{ Не существует}; C. A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$D. A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -4/3 & -7/3 \\ 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

	1	2	3	4	5	6
A		+				
B	+		+	+		
C					+	
D						+

8. Указать матрицы, ранг которых равен 3.

$$A. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B. \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; C. \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; D. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: A., D.

Вариант 2

1. Записать диагональную матрицу 4-го порядка.

Ответ:

$$2. \text{ Дана матрица } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Если } A - B = E, \text{ то матрица } B \text{ равна:}$$

$$A. \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}; B. \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 7 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}; C. \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 6 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

3. Для матриц A и B найти произведение $A \cdot B^T$:

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}; 2. A = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}; 3. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A. A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 5 & -20 & -40 \\ -7 & 28 & 56 \end{pmatrix}; B. A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}; C. A \cdot B^T = \begin{pmatrix} -22 & 6 \\ -54 & 13 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

	1	2	3
A		+	
B			+
C	+		

4. Найти определители матриц:

$$1. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; 2. \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}; 3. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 12 & 24 & -4 \end{vmatrix}; 4. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

A. -4 ; B. 0 ; C. -40 ; D. 1 .

Ответ:

	1	2	3	4
A		+		
B	+			
C			+	
D				+

5. Разложение определителя $\det A = \begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ b & 1 & 4 \\ c & 5 & -5 \end{vmatrix}$ по первому столбцу имеет вид:

A. $15a - 10b - 8c$; B. $-25a + 10b - 8c$; C. $-25a - 10b - 8c$; D. $15a + 10b - 8c$.

Ответ: C.

6. Дан определитель $\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$. Записать соответствующую правую часть равенства для каждого из следующих определителей:

$$1. \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & 2c_1 \\ a_2 & -b_2 & 2c_2 \\ a_3 & -b_3 & 2c_3 \end{vmatrix} = \dots; \quad 2. \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 - b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 - c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \dots; \quad 3. \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} = \dots.$$

A. $\det(2 \cdot A^T)$; B. $-2 \cdot \det A^T$; C. 0 ; D. $8 \cdot \det A$.

Ответ:

	1	2	3
A			
B	+		
C		+	
D			+

7. Указать для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ обратную ей матрицу A^{-1} .

$$\text{A. } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{B. } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{C. } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{Д. } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: В.

8. Указать базисный минор данных матриц:

$$1. Rg \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3; \quad 2. Rg \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2; \quad 3. Rg \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\text{A. } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{B. } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{C. } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{Д. } \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

	1	2	3
А	+		
В			
С		+	
Д			+

Тесты (теория)

1. Если существуют произведения AB и BA , причем $AB = BA$, то матрицы A и B называют:

А. транспонированными; В. равными; С. перестановочными; Д. обратимыми.

Ответ: С.

2. Если в матрице все элементы главной диагонали равны единице, а все остальные элементы – нулевые, то такая матрица называется:

А. единичной; В. вектор-строкой; С. нулевой.

Ответ: А.

3. Выберите правильные свойства для матриц A, B, C и числа α :

А. $(\alpha A)B = A(\alpha B)$; Б. $(A+B)C = AC + BC$; С. $AB = BA$; Д. $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$; Е. $A(BC) = (AB)C$.

Ответ: А, Б, Е.

4. Указать те преобразования строк (столбцов) матрицы, которые являются элементарными:

А. умножение строки (столбца) на ненулевое число; Б. замена строки (столбца) произвольной строкой (столбцом); С. Замена строки (столбца) нулевой строкой (столбцом); Д. замена строки (столбца) суммой этой строки (столбца) и другой строки (столбца), предварительно умноженной (умноженного) на некоторое число.

5. При умножении матрицы A на матрицу B справа должно соблюдаться условие:

А. число строк матрицы A равно числу строк матрицы B ; Б. число столбцов матрицы A равно числу столбцов матрицы B ; С. если матрицы A и B прямоугольные, то они должны быть одинакового размера; Д. число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

6. Ранг матрицы равен...

А. числу ненулевых строк в ступенчатой матрице; Б. числу ненулевых элементов матрицы; С. максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) матрицы; Д. порядку базисного минора матрицы; Е. максимальному числу r , для которого существует ненулевой минор порядка r .

7. Какая из приведенных матриц B является обратной к матрице A :

А. $B \cdot A = A \cdot B = \Theta$; Б. $B \cdot A = A \cdot B = A$; В. $B \cdot A = A \cdot B = I$. Г. $B \cdot A = A \cdot B = 1$

Ответ: В.

8. Определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, это число равно...

А. $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$; Б. $a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$; В. $a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$

где

A_{ij} ($i, j = \overline{1,3}$) – алгебраические дополнения M_{ij} ($i, j = \overline{1,3}$) – миноры элементов a_{ij} .

9. При замене некоторой строки невырожденной квадратной матрицы на сумму этой строки и какой-то другой ее строки, умноженной на число α , ее определитель:

А. поменяет знак; Б. умножится на число α ; В. станет равным нулю; Г. не изменится.

10. Базисные строки и столбцы матрицы...

А. линейно зависимы; Б. пропорциональны; С. линейно независимы; Д. нулевые.

Ответ: С.

11. Обратная матрица A^{-1} существует, если...

А. матрица A – квадратная и $\det A = 0$; Б. матрица A – квадратная; В. матрица A – квадратная и $\det A \neq 0$.

12. Базисный минор матрицы, это...

А. любой ненулевой минор этой матрицы; Б. минор минимального порядка, отличный от нуля; В. любой нулевой минор этой матрицы; Г. ненулевой минор матрицы, максимального порядка.

13. Элемент a_{ij}^{-1} обратной матрицы A^{-1} (если она существует) вычисляется по формуле:

А. $\frac{1}{\det A}(-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} – минор элемента a_{ij} матрицы A ; Б. $\frac{1}{\det A} M_{ji}$, где M_{ji} – минор

элемента a_{ji} матрицы A ; В. $\frac{1}{\det A}(-1)^{i+j} M_{ji}$, где M_{ji} – минор элемента a_{ji} матрицы A .

Ответ: В.

Задания для контрольной работы

1. Найти $(2B - 3C) \cdot D^T$, если $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель приведением к треугольному виду $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 9 \\ -4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ с помощью формул Лапласа (разложением по строке или столбцу).

3. Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований и сделать проверку

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Найти $P(A) = A^2 - 9A^{-1} - 2|A|E$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Найти $f(A)$, если: $f(A) = A^2 + 3A^{-1} - 5|A|E$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Раздел 2. Системы линейных алгебраических уравнений

Вопросы для собеседования

Тема 2.1 «Основные понятия. Квадратные СЛАУ»

1. Дайте определение решения СЛАУ. Определите понятия «совместные и несовместные, определенные и неопределенные СЛАУ».
2. Выстройте последовательность этапов решения квадратных СЛАУ методом обратной матрицы.
3. Выстройте последовательность этапов решения квадратных СЛАУ методом Крамера.
4. Назовите основные этапы решения квадратных СЛАУ методом Гаусса.
5. В чем особенность решения квадратных СЛАУ методом Жордана-Гаусса по сравнению с методом Гаусса?
6. Какой вид имеют формулы Крамера? В каком случае их можно применять?
7. Сформулируйте условие, при котором квадратная СЛАУ имеет единственное решение.
8. Запишите квадратную систему в общем виде.
9. Запишите квадратную систему в матричной форме.

Тема 2.2. «Прямоугольные СЛАУ. Метод Гаусса»

10. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
11. В чем суть метода Гаусса применительно к решению прямоугольных СЛАУ?
12. Сформулируйте в терминах рангов условие несовместности СЛАУ.
13. Сформулируйте в терминах рангов условие неопределенности СЛАУ.
14. Сформулируйте в терминах рангов условие определенности СЛАУ.
15. Дайте определение общего и частного решения СЛАУ.
16. Какие переменные прямоугольной системы могут быть выбраны в качестве главных (базисных)?
17. Чему равно число свободных переменных?

Тема 2.3. «Однородные СЛАУ»

18. Какая СЛАУ называется однородной?
19. При каком условии однородная СЛАУ имеет нетривиальное решение?
20. Какие решения однородной СЛАУ называются фундаментальными?
21. Как определить фундаментальные решения?

Тесты (практика)

Вариант 1

1. Указать формулы для решения системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$ методом Крамера и записать решение в

виде вектора $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$\text{A. } x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, (i=\overline{1,3}), \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 18 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 18 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 18 \\ -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix};$$

$$\text{B. } x_i = \Delta_i \cdot \Delta, (i=\overline{1,3}), \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 18 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 18 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 18 \\ -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix};$$

$$\text{C. } x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, (i=\overline{1,3}), \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 18 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 18 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 18 \\ -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix};$$

$$\text{D. } x_i = \Delta - \Delta_i, (i=\overline{1,3}), \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 18 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 18 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 18 \\ -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Ответ: C. , } X = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -21 \end{pmatrix}.$$

2. Указать систему линейных уравнений, которая может быть решена методом обратной матрицы:

$$\text{A. } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 - 4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}; \text{ B. } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_4 = 6 \end{cases}; \text{ D. } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 - 4 = 0 \\ x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 6 \end{cases}.$$

Ответ: A.

3. Указать формулы для решения системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$ методом обратной матрицы и записать

$$\text{решение в виде вектора } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{A. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}; \text{ B. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}; \text{ C. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T;$$

$$\text{D. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: A. , } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Какой вывод можно сделать о каждой из систем, если в результате элементарных преобразований над расширенными матрицами систем получились следующие матрицы:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad 4. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A. Система несовместна; B. Система имеет единственное решение; C. Система имеет бесчисленное множество решений.

Ответ:

	1	2	3	4
A	+			
B		+	+	
C				+

5. Расширенная матрица системы с помощью элементарных преобразований строк приведена к следующему виду:

$$1. \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -20 & -5 \\ 0 & -7 & 4 & -20 & -5 \\ 0 & -7 & 4 & -20 & -5 \end{array} \right); 2. \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right); 3. \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 4 & -5 & -1 \end{array} \right); 4. \left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & -6 & -11 & 2 \end{array} \right).$$

Элементарные преобразования над расширенной матрицей системы выполняются в соответствии с каким методом?

А. Жордана -Гаусса; В. Крамера; С. Кронекера; Д. Раусса. В случае необходимости привести данную матрицу к ступенчатому виду, заполнить таблицу (сделать вывод о совместности системы и, если, она совместна, записать ее решение в виде столбца X).

номер системы	1	2	3	4
RgA	2	4	3	3
$Rg\bar{A}$	2	4	3	3
число переменных системы	4	4	5	5
вид системы	неопределенная	определенная	неопределенная	неопределенная
базисные переменные	x_1, x_3	—	x_1, x_2, x_4	x_1, x_3, x_4
свободные переменные	$x_2 = C_1, x_4 = C_2$	—	$x_3 = C_1, x_5 = C_2$	$x_2 = C_1, x_5 = C_2$
X	$X = \begin{pmatrix} \frac{3-9C_1+16C_2}{4} \\ C_1 \\ \frac{-5+7C_1+20C_2}{4} \\ C_2 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} \frac{-8C_2-3}{C_1+11C_2+5} \\ 3 \\ C_1 \\ 4C_2+1 \\ C_2 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} \frac{-C_1+3C_2-3}{2} \\ C_1 \\ C_2-2 \\ -5C_2+6 \\ C_2 \end{pmatrix}$

6. Для системы $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ указать ФСР (фундаментальную систему решений).

А. $\vec{e}_1 = (1, -2, -2, 12)^T$; В. $\vec{e}_1 = (1, -2, 1, 1)^T$, $\vec{e}_2 = (1, -1, 1, 0)^T$; С. $\vec{e}_1 = (1, 0, -3, 11)^T$, $\vec{e}_2 = (0, 1, -2, 5)^T$, $\vec{e}_3 = (1, -2, 1, 1)^T$; Д. $\vec{e}_1 = (0, 1, -2, 5)^T$, $\vec{e}_2 = (1, -2, 1, 1)^T$.

Ответ: D.

7. Пусть $\vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ некоторое решение неоднородной системы, а $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

фундаментальная система решений соответствующей однородной системы. Тогда общее решение неоднородной системы X имеет вид:

A. $X = \begin{pmatrix} C_1+2 \\ C_2+3 \\ 4 \end{pmatrix}$; B. $X = \begin{pmatrix} C_1+C_2+2 \\ C_1+3 \\ C_2+4 \end{pmatrix}$; C. $X = \begin{pmatrix} 2C_1 \\ 3C_2 \\ 4 \end{pmatrix}$; D. $X = \begin{pmatrix} C_1+C_2+2C_3 \\ C_1+3C_3 \\ C_2+4C_3 \end{pmatrix}$.

Ответ: B.

8. Указать координаты вектора $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ в базисе $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$:

A. $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$; C. $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$.

Ответ: B.

Вариант 2

1. Указать формулы для решения системы $\begin{cases} -2x_1 + x_3 = -3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ методом Крамера и записать

решение в виде вектора $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

A. $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, $(i = \overline{1,3})$, где $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$;

B. $x_i = \Delta_i \cdot \Delta$, $(i = \overline{1,3})$, где $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$;

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$;

C. $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, $(i = \overline{1,3})$, где $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$;

D. $x_i = \Delta - \Delta_i$, $(i = \overline{1,3})$, где $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$;

Ответ: С. , $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Указать систему линейных уравнений, которая может быть решена методом обратной матрицы:

A. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$; B. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 2 = 0 \end{cases}$; C. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2 = 0 \end{cases}$.

Ответ: С.

3. Указать формулы для решения системы $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$ методом обратной матрицы и

записать решение в виде вектора $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

A. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 7/4 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 7 \\ -2 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

C. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T$; D. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: A. , $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Какой вывод можно сделать о каждой из систем, если в результате элементарных преобразований над расширенными матрицами систем получились следующие матрицы:

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A. Система несовместна; B. Система имеет единственное решение; C. Система имеет бесчисленное множество решений.

Ответ:

	1	2	3	4
A		+		
B	+			
C			+	+

5. Расширенная матрица системы с помощью элементарных преобразований строк приведена к следующему виду:

$$1. \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 8 & 4 \end{array} \right); 2. \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -16 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 76 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right); 3. \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); 4. \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 \end{array} \right).$$

Элементарные преобразования над расширенной матрицей системы выполняются в соответствии с каким методом?

А. Жордана -Гаусса; В. Крамера; С. Кронекера; Д. Раусса. В случае необходимости привести данную матрицу к ступенчатому виду, заполнить таблицу (сделать вывод о совместности системы и, если, она совместна, записать ее решение в виде столбца X).

номер системы	1	2	3	4
RgA	2	4	2	3
$Rg\bar{A}$	2	4	2	4
число переменных системы	4	4	5	4
вид системы	неопределенная	определенная	неопределенная	противоречивая
базисные переменные	x_1, x_2	—	x_1, x_3	—
свободные переменные	$x_3 = C_1, x_4 = C_2$	—	$x_2 = C_1, x_4 = C_2, x_5 = C_3$	—
X	$X = \begin{pmatrix} 3 + 3C_1 - 5C_2 \\ 4 + 5C_1 - 8C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} -3 - C_1 - 2C_2 - 3C_3 \\ 2 \\ C_1 \\ 2 - 3C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$	решение не существует

6. Общее решение системы имеет вид
$$X = \begin{pmatrix} \frac{-9C_1 + 16C_2}{4} \\ C_1 \\ \frac{7C_1 + 20C_2}{4} \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальной системой решений является

А. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; В. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; С. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Ответ: С.

7. Пусть $\vec{h} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ некоторое решение неоднородной системы, а $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

фундаментальная система решений соответствующей однородной системы. Тогда общее решение неоднородной системы X имеет вид:

$$\text{A. } X = \begin{pmatrix} C_1 - 2 \\ C_2 + 11 \\ C_3 \\ C_3 \end{pmatrix}; \quad \text{B. } X = \begin{pmatrix} C_1 - 2C_3 \\ C_2 + 11C_3 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}; \quad \text{C. } X = \begin{pmatrix} -2C_1 \\ 11C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{D. } X = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 - 2 \\ C_1 + 11 \\ C_3 \\ C_2 + C_3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: D.

8. Система $Ax = \Theta$ с n неизвестными имеет только тривиальное решение, если:

A. $RgA = n$; B. $RgA < n$; C. $RgA > n$; D. Ответ: A.

Тесты (теория)

[illegible]

называется:

А. особой; В. неопределенной; С. однородной; Д. неоднородной. Ответ: С.

[illegible]

равно нулю, то эта система называется:

А. несовместной; В. неоднородной; С. однородной; Д. определенной.

Ответ: В.

3. Система линейных алгебраических уравнений называется определенной, если она:

А. имеет бесчисленное множество решений; Б. не имеет решений; С. имеет только одно решение (единственное решение).

4. По методу Жордана-Гаусса элементарные преобразования выполняются над:

А. произвольной матрицей; Б. над расширенной матрицей; С. над матрицей из коэффициентов при неизвестных.

5. Если ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы системы и меньше числа неизвестных, то система:

А. не имеет решений; Б. имеет единственное решение; С. имеет бесчисленное множество решений.

6. Если ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы системы и равен числу неизвестных, то система:

А. не имеет решений; Б. имеет единственное решение; С. имеет бесчисленное множество решений.

7. Фундаментальная система решений, это совокупность...

А. $n - r$ линейно зависимых решений однородной системы; Б. $n - r$ линейно независимых решений однородной системы; В. Решений неоднородной системы.

Ответ: Б.

8. СЛАУ является совместной тогда, когда...

А.

9. Однородная система, определитель которой равен нулю, имеет...

А. только тривиальное решение; Б. нетривиальные решения; С. не имеет решений.

Ответ: Б.

10. Известно, что система линейных алгебраических уравнений имеет невырожденную матрицу. Выберите верное утверждение: А. систему нельзя решить методом обратной матрицы; Б. система не имеет решения; В. систему можно решить методом обратной матрицы, и она имеет бесчисленное множество решений; Г. систему можно решить методом обратной матрицы и это будет единственное решение.

11. Общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений имеет структуру: А.

12. Известно, что матрица системы – квадратная матрица n -го порядка и ее определитель не равен нулю. Выберите верное утверждение:

А. система не имеет решений; Б. система имеет ровно n решений; В. система имеет единственное решение; Г. Система имеет бесчисленное множество решений.

13. Число векторов в фундаментальной системе решений однородной системы равно...

А. рангу матрицы системы; Б. числу базисных неизвестных; В. числу свободных неизвестных.

Билет для по теории №1:

а) Какая из систем имеет единственное решение, а какая несовместна?

$$\bar{A} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & 2 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 13 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Закончить определение: 1. Ранг матрицы, это...; 2. Совместная система, это....

с) Закончить формулировку теоремы: 1. Базисные строки и столбцы матрицы линейно независимы. Любая строка (столбец) матрицы ...; 2. СЛАУ является совместной тогда....

д) Записать: 1. Единичную матрицу 5-го порядка; 2. Диагональную матрицу 4 порядка; 3. Нулевую матрицу размера 3×2 .

е) Следует выбрать правильное определение: 1. Фундаментальная система решений, это совокупность $n - r$ линейно зависимых решений однородной системы; 2. Фундаментальная система решений, это совокупность $n - r$ линейно независимых решений однородной системы; 3. Фундаментальная система решений, это совокупность решений неоднородной системы.

ф) Какая из приведенных матриц B является обратной к матрице A : 1. $B \cdot A = A \cdot B = I$; 2. $B \cdot A = A \cdot B = \Theta$; 3. $B \cdot A = A \cdot B = A$.

г) Какова структура общего решения неоднородной системы? Можно ли решить методом Крамера систему, число уравнений которой не равно числу неизвестных?

Билет по теории №2:

а) Какая из систем имеет бесчисленное множество решений, а какая несовместна?

$$\bar{A} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & 2 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 13 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Закончить определение: 1. Определитель матрицы третьего порядка, это...; 4. Базисный минор, это....

с) Закончить формулировку теоремы: 1. Элементарные преобразования матрицы...; 2. Любая матрица в результате эквивалентных преобразований....

d) Записать: 1. Единичную матрицу 5-го порядка; 2. Диагональную матрицу 4 порядка; 3. Нулевую матрицу размера 3×2 .

e) Следует выбрать правильное определение: 1. Фундаментальная система решений, это совокупность $n - r$ линейно зависимых решений однородной системы; 2. Фундаментальная система решений, это совокупность $n - r$ линейно независимых решений однородной системы; 3. Фундаментальная система решений, это совокупность решений неоднородной системы.

f) Какая из приведенных матриц B является обратной к матрице A : 1. $B \cdot A = A \cdot B = I$;

2. $B \cdot A = A \cdot B = \Theta$; 3. $B \cdot A = A \cdot B = A$.

g) Можно ли решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы, если определитель системы не равен нулю? Сколько решений имеет однородная система, определитель которой равен нулю?

Задания для контрольной работы

1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} -6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_1 + 9x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$
 методом обратной матрицы. Определитель

вычислять разложением по строке или столбцу.

2. Решить систему
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$
 методом Крамера. Определители вычислять разложением

по строке или столбцу.

3. Решить систему методом Гаусса
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}.$$

4. Исследовать систему
$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$$
 на совместность. В случае совместности решить

ее методом Гаусса.

5. Решить систему
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$
 методом Жордана-Гаусса.

6. Найти фундаментальную систему решений:
$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Раздел 3. Элементы векторной алгебры

Вопросы для собеседования

Тема 3.1. «Геометрические векторы на плоскости и в пространстве»

1. Дайте определение вектора.
2. Как определяется сумма и разность двух векторов?
3. Дайте определение коллинеарных и компланарных векторов.
4. Дайте определение проекции вектора на ось.
5. Что называется углом между векторами?

Тема 3.2. «Аффинная система координат»

6. Что такое базис? Приведите пример базиса на плоскости.
7. Как выглядит разложение вектора по базису на плоскости и в пространстве? Что такое координаты вектора?
8. Зависят ли координаты вектора от выбора базиса?
9. Как определяются декартовы координаты точки на плоскости?
10. Чем отличаются координаты двух точек, симметричных относительно: а) оси Ox ; б) оси Oy ; в) начала координат?
11. Напишите формулы для координат середины отрезка через координаты его концов.
12. Как вычислить расстояние между двумя точками?
13. Как связаны координаты двух коллинеарных векторов?
14. Как найти координаты вектора, заданного координатами точек—начала и конца этого вектора?

Тема 3.3. «Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов»

15. Дайте определение скалярного произведения двух ненулевых векторов. Приведите пример.
16. Каковы свойства скалярного произведения векторов?
17. Как найти угол между двумя векторами, заданными своими координатами? Как найти длину вектора по его координатам?
18. Каково условие ортогональности двух векторов?
19. Чему равен модуль векторного произведения двух ненулевых векторов?
20. Когда векторное произведение двух векторов равно нулю?
21. Как найти вектор, перпендикулярный двум данным векторам?
22. Как найти площадь треугольника, построенного на двух векторах?
23. Как найти объем пирамиды с вершинами в заданных точках?
24. Чему равно смешанное произведение трех некопланарных ненулевых векторов?
25. Когда смешанное произведение трех векторов равно нулю?
26. Как выглядит условие компланарности трех векторов?

Тесты

1. Вектор $\vec{b}(7;3;\alpha)$ ортогонален вектору $\vec{c}(3;\alpha;-6)$, если α равно: а) 7; б) -1; в) 9; г) нет правильного ответа.
2. Если $\vec{a}(-2;-3;2)$, $\vec{b}(2;2;-3)$, то $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ равен: а) $-\frac{14}{17}$; б) $-\frac{14}{16}$; в) 0; г) нет правильного ответа.
3. Если $|\vec{a} \times \vec{b}| = 3$, $|\vec{a}| = 4$, а угол между \vec{a} и \vec{b} равен $\frac{\pi}{6}$, то $|\vec{b}|$ равен: а) $\frac{3}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 0; г) нет правильного ответа.

4. Векторы $\vec{a}(2;3;4)$, $\vec{b}(0;\alpha;2)$, $\vec{c}(0;4;1)$ компланарны, если α равно: а) 0; б) -1; в) 8; д) нет правильного ответа.
5. Вектор образует с осями OX , OY и OZ углы α , β , γ соответственно. Определите, какие углы α , β , γ может составить вектор: а) $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 120^\circ$; б) $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 90^\circ$; в) $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $\gamma = 135^\circ$; д) $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 90^\circ$.
6. Скалярное произведение $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} + 4\vec{b})$ при $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, угле между \vec{a} и \vec{b} равном $\frac{\pi}{3}$, равно: а) $-\frac{15}{2}$; б) -1; в) 3; д) нет правильного ответа.
7. Какое из перечисленных условий является необходимым и достаточным условием линейной зависимости данной системы векторов: а) ранг матрицы системы равен нулю; б) ранг матрицы системы равен числу векторов; в) ранг матрицы системы меньше числа векторов; д) нет правильного ответа.
8. Какое из условий является условием ортогональности двух векторов: а) векторное произведение векторов равно 0; б) смешанное произведение векторов равно 0; в) скалярное произведение векторов равно 0; д) нет правильного ответа.
9. Смешанное произведение трех ненулевых и некопланарных векторов равно: а) площади треугольника; б) объему пирамиды; в) объему параллелепипеда; д) нет правильного ответа.
10. Синус угла между векторами $\vec{a}(2;1;2)$ и $\vec{b}(-2;2;1)$ равен: а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; д) нет правильного ответа.
11. Определите вид зависимости между векторами $\vec{a}(-1;2;7)$ и $\vec{b}(-1;3;4)$: а) линейно зависимы; б) линейно независимы; в) нелинейно зависимы; д) нет правильного ответа.
12. Векторное произведение двух ненулевых и неколлинеарных векторов равно: а) площади треугольника; б) объему пирамиды; в) площади параллелограмма; д) нет правильного ответа.
13. Векторы $\vec{a}(1;3;2)$, $\vec{b}(4;5;6)$, $\vec{c}(1;1;3)$: а) коллинеарны; б) компланарны; в) некопланарны; д) нет правильного ответа.
14. Скалярным произведением двух векторов является: а) число; б) вектор; в) матрица; д) нет правильного ответа.
15. Векторным произведением двух ненулевых векторов является: а) площадь параллелограмма; б) вектор; в) число; д) нет правильного ответа.
16. Смешанное произведение ненулевых векторов равно: а) площади треугольника; б) объему пирамиды; в) объему параллелепипеда; д) нет правильного ответа.
17. Установить соответствие

Произведение векторов	Результат
1. $\vec{i} \cdot \vec{k}$	а) \vec{i}
2. $\vec{i} \times \vec{k}$	б) \vec{k}
3. $\vec{i} \times \vec{i}$	в) \vec{j}
	д) $-\vec{i}$
	е) $-\vec{j}$
	ф) $-\vec{k}$
	г) 0

	h) $\vec{0}$ i) 1
--	----------------------

Ответ: 1. _____; 2. _____; 3. _____.

18. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$, тогда координаты вектора $2\vec{a} - \vec{b}$ равны _____.

19. Если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 26$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 52$, то скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ равно _____.

Задания разных уровней

Уровень I

1. Под каким углом к положительному направлению оси Ox наклонен отрезок, соединяющий точки $A(1; -3)$ и $B(-7; 3)$?

2. Заданы векторы $\vec{a}(-1; 2; 0)$, $\vec{b}(3; 1; 1)$, $\vec{c}(2; 0; 1)$ и $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$. Вычислить: а) $|\vec{a}|$; направляющие косинусы вектора \vec{a} ; б) $\cos(\vec{a}, \vec{j})$; в) $\text{Pr}_{\vec{j}} \vec{d}$.

3. Вектор \vec{x} , коллинеарный вектору $\vec{a}(0; 6; -8)$ образует острый угол с осью Oz . Зная, что $|\vec{x}| = 50$, найти его координаты.

4. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, угол между \vec{a} и \vec{b} равен 135° , найти $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

5. Дан треугольник с вершинами $A(-3; 5; 6)$, $B(1; -5; 7)$, $C(8; -3; -1)$. Найти внутренний угол при вершине A .

6. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$ вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

7. Определить векторное произведение и его модуль для векторов $\vec{a}(-1; 2; 4)$ и $\vec{b}(2; -1; -4)$.

8. Найти смешанное произведение трех векторов $\vec{a}(1; 1; 2)$, $\vec{b}(2; 1; 1)$, $\vec{c}(1; -2; 3)$. Какую тройку векторов образуют эти векторы? Найти $\text{Pr}_{\vec{c}} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

9. Лежат ли точки $A(1; 2; -1)$, $B(4; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ в одной плоскости?

10. На плоскости заданы векторы $\vec{e}_1(-1; 2)$, $\vec{e}_2(2; 1)$ и $\vec{a}(0; -2)$. Убедиться, что \vec{e}_1 и \vec{e}_2 образуют базис. Найти разложение вектора \vec{a} по базису \vec{e}_1, \vec{e}_2 .

Уровень II

1. Вычислить длину медиан треугольника, зная координаты его вершин $A(3; -2)$, $B(5; 2)$ и $C(-1; 4)$.

2. Найти вектор \vec{x} , направленный по биссектрисе угла между векторами $\vec{a} = 7\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, если $|\vec{x}| = 5\sqrt{6}$.

3. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = 60^\circ$, причем $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 5$. Определить $|\vec{a} + \vec{b}|$.

4. Найти координаты вектора \vec{x} , коллинеарного вектору $\vec{a}(2; 1; -1)$ и удовлетворяющего условию $\vec{a} \cdot \vec{x} = 3$.

5. Доказать, что $\triangle ABC$, где $A(3; -2; 0)$, $B(4; -3; -8)$, $C(2; 5; -1)$ – прямоугольный, и найти прямой угол.

6. $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$, угол между \vec{a} и \vec{b} равен $\frac{\pi}{6}$. Вычислить $|(2\vec{a} - 3\vec{b}) \times (\vec{a} + 4\vec{b})|$.
7. Даны вершины пирамиды $A(2;0;4), B(0;3;7), C(0;0;6), D(4;3;5)$. Вычислить площадь основания ΔABC .
8. Выяснить при каком значении α векторы $\vec{a}(1;1;\alpha), \vec{b}(-3;2;1), \vec{c}(2;0;-3)$ компланарны.
9. Даны вершины пирамиды $A(2;0;4), B(0;3;7), C(0;0;6), D(4;3;5)$. Вычислить объем пирамиды.
10. Даны векторы $e_1(1; -3; 4), e_2(7; 3; -2), e_3(-2; 1; -1)$, а $(-3; -1; 2)$ в некотором базисе. Показать, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис, и найти координаты вектора a в этом базисе.

Раздел 4. Линейные пространства

Вопросы для собеседования

Тема 4.1 «Базис и размерность линейного пространства»

1. Дайте определение линейного пространства.
2. В каком случае линейное пространство имеет размерность равную n ?
3. Сколько линейно независимых векторов в n -мерном линейном пространстве?
4. Сколькими способами можно разложить произвольный вектор в заданном базисе?
5. Дайте определение базиса линейного пространства.
6. Сформулируйте геометрический смысл линейной зависимости системы векторов.
7. Дайте определение подпространства линейного пространства. Приведите примеры.
8. Сколько может быть базисов в конечномерном линейном пространстве? Ответ обосновать.
9. Как выражаются координаты вектора в новом базисе через координаты этого вектора в первоначальном базисе?

Тема 4.2 «Примеры линейных пространств»

10. Приведите пример стандартного базиса в \mathbb{R}^n .
11. Чему равна размерность пространства многочленов степени не выше n ? Приведите пример базиса в этом пространстве.
12. Чему равна размерность пространства решений однородной СЛАУ? Что является базисом в этом пространстве?
13. Чему равна размерность пространства матриц размерности $m \times n$? Приведите пример базиса.
14. Что является базисом в пространстве геометрических векторов на плоскости?
15. Какова размерность пространства геометрических векторов в пространстве? Приведите пример базиса.

Тесты

1. Базисом системы векторов $\vec{a}(1;1;0), \vec{b}(1;0;1), \vec{c}(2;1;1), \vec{d}(0;1;-1)$ являются векторы:
 - а) любые два вектора; б) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; в) $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$; г) все векторы; д) нет правильного ответа.
2. Координатами вектора $\vec{d}(-1;6;13)$ в базисе $\vec{a}(1;2;3), \vec{b}(3;2;1), \vec{c}(1;0;1)$ являются: а) $(1;1;1)$; б) $(-1;6;13)$; в) $(1;2;3)$; г) нет правильного ответа.
3. Векторы $\vec{a}(1;0;1;0), \vec{b}(1;1;0;0), \vec{c}(1;0;0;1)$ являются: а) линейно зависимыми; б) линейно независимыми; в) попарно коллинеарными.
4. В линейном пространстве количество нулевых элементов равно: а) 0; б) 1; в) бесконечное множество; г) нет правильного ответа.
5. Система векторов линейного пространства называется линейно независимой, если: а) один из векторов нулевой; б) несколько из векторов компланарны; в) их линейная комбинация равна нулю; г) только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору.

6. Сколько базисов имеется в линейном пространстве \mathbb{R}^n : а) 1; б) n ; в) $n-1$; г) бесконечно много.
7. Базисом системы векторов $\vec{a}(0;1;0)$, $\vec{b}(0;2;0)$, $\vec{c}(0;3;0)$, $\vec{d}(1;0;0)$ являются векторы:
а) \vec{a}, \vec{b} ; б) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; в) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$; г) нет правильного ответа.

Раздел 5. Элементы аналитической геометрии. Комплексные числа.

Вопросы для собеседования

Тема 5.1 «Прямая и плоскость»

1. Дайте определение уравнения линии на плоскости.
2. Как найти координаты точки пересечения двух линий на плоскости, заданных своими уравнениями?
3. Чем отличается уравнение прямой на плоскости в декартовых координатах от уравнения других линий на плоскости?
4. Напишите формулу для вычисления угла между двумя прямыми на плоскости.
5. Как выглядит условие параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости?
6. Напишите уравнение прямой на плоскости, проходящей: а) через заданную точку в заданном направлении; б) через две заданные точки.
7. Как написать уравнение медианы, высоты в треугольнике на плоскости, если известны координаты его вершин?
8. Как выглядит уравнение плоскости, проходящей: а) через заданную точку с заданным нормальным вектором; б) через три заданные точки?
9. Напишите формулу для вычисления угла между двумя плоскостями.
10. Какие Вы знаете виды уравнений прямой в пространстве?
11. Как выглядит формула для отыскания угла между двумя прямыми в пространстве?
12. Как найти координаты точки пересечения плоскости и прямой?
13. Как найти расстояние от заданной точки до заданной плоскости?
14. Как найти угол между плоскостью и прямой?

Тема 5.2 «Кривые второго порядка»

15. Сформулируйте определения эллипса, гиперболы, параболы. Каковы канонические уравнения этих линий?
16. Что называется эксцентриситетом эллипса и гиперболы и какие значения он может иметь для каждой из этих линий?
17. Чему равны координаты фокуса параболы $x^2 = 2py$?

Тема 5.3 «Комплексные числа и действия над ними»

18. Дайте определение комплексного числа. Приведите пример двух комплексно сопряженных чисел.
19. Изобразите на комплексной плоскости числа $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + i$ и $z_1 \cdot z_2$.
20. Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа $z = a + ib$.
21. Напишите различные формы записи комплексных чисел и приведите примеры.
22. Напишите формулу Муавра и приведите пример ее применения.
23. Сколько существует корней n -ой степени из комплексного числа z ?

Задания для контрольной работы

Вариант 1.

1. Дан ΔABC : $A(8;-1)$, $B(-8;11)$, $C(-1;-13)$. Найти уравнение стороны BC и высоты AD . Сделать точный чертеж.
2. Определить, при каких значениях l и m плоскости $2x + ly + 3z - 5 = 0$ и $mx - 6y - 6z = 0$ параллельны.

3. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $F(-1;-2)$ и от прямой $x = -5$. Сделать чертеж.

4. Представить в алгебраической форме $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$.

Вариант 2.

1. Составить канонические уравнения прямой:
$$\begin{cases} x-2y+3z+4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$$

2. При каком значении m плоскости $2x+3y-5z+4=0$ и $x-2y+mz-3=0$ перпендикулярны?

3. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение ее расстояний до точки $F(2;0)$ и до прямой $y = 4$ равно $1/2$. Сделать чертеж.

4. Вычислить $\sqrt{-i}$.

Вариант 3.

1. Даны прямые $l_1: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-4}{0}$ и $l_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{5}$. Найти угол между прямыми l_1 и l_2 , точку пересечения прямых.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $A(-1;0;2)$, $B(2;3;1)$, $C(-4;2;1)$.

3. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение ее расстояний до точки $F(7;0)$ и до прямой $x = 3$ равно 2. Сделать чертеж.

4. Решить уравнение $x^2 - 6x + 16 = 0$.

Вариант 4.

1. Дан ΔABC : $A(10;-4)$, $B(-6;8)$, $C(1;-16)$. Найти уравнение и длину медианы CM . Сделать точный чертеж.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-2;-3)$ параллельно плоскости Oyz .

3. Даны фокус параболы $F(-7;0)$ и уравнение директрисы $x - 7 = 0$. Записать уравнение параболы.

4. Вычислить $(1+i)^{12}$ и представить в алгебраической форме.

Вариант 5.

1. Дан ΔABC : $A(9;0)$, $B(-3;-5)$, $C(2;4)$. Найти уравнение прямой, проходящей через вершину B параллельно прямой CD . Сделать точный чертеж.

2. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M(-2;-1;2)$ перпендикулярно плоскости $x-3y+2z-2=0$.

3. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 10 и действительная ось равна 8.

4. Найти все корни уравнения $z^3 - i + 1 = 0$.

Вариант 6.

1. Дан ΔABC : $A(1;-1)$, $B(7;2)$, $C(4;5)$. Найти внутренний угол A и уравнение стороны AB . Сделать точный чертеж.

2. При каком значении m прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{-1}$ лежит в плоскости $x+4y+6z+m=0$?

3. Даны фокус параболы $F(0;-2)$ и уравнение директрисы $y - 2 = 0$. Записать каноническое уравнение параболы.

4. Упростить выражение $\left(\frac{2-7i}{-14-4i}\right)^{-4}$.

2. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Промежуточная аттестация студентов по дисциплине «Линейная алгебра» проводится в форме экзамена в 1 семестре в соответствии с графиком учебного процесса. Экзамен принимает лектор.

Экзамен проводится в письменно-устной форме по билетам. Экзаменационный билет включает один теоретический вопрос и четыре практических задания.

Таким образом, фонд оценочных средств промежуточной аттестации включает:

- экзаменационные билеты.

2.1. Критерии оценки

Критерии оценки знаний студентов на экзамене:

Оценка «**отлично**» выставляется студенту, глубоко и прочно усвоившему теоретический программный материал, исчерпывающее, последовательно, грамотно и логически стройно его излагающему. При этом студент не затрудняется с ответом при видоизменении задания. Используя теоретические знания, студент свободно справляется с задачами и другими видами контроля знаний, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических заданий

Оценка «**хорошо**» выставляется студенту, твердо знающему теоретический программный материал, грамотно и по существу излагающему его. Студент не допускает существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические знания при решении практических вопросов и заданий, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.

Оценка «**удовлетворительно**» выставляется студенту, который имеет недостаточно систематизированные теоретические знания программного материала, допускает неточности, нарушение последовательности при его изложении, и испытывает затруднения в выполнении практических заданий.

Оценка «**неудовлетворительно**» выставляется студенту, который не знает значительной части теоретического программного материала, допускает существенные ошибки при его изложении, не справляется с выполнением практических заданий.

2.2 Вопросы к экзамену

1. Матрицы, операции над ними.
2. Определители квадратных матриц, способы вычисления.
3. Свойства определителей.
4. Обратная матрица.
5. Ранг матрицы.
6. Системы линейных уравнений, основные понятия и определения.
7. Система n линейных уравнений с n переменными. Метод Крамера.
8. Система n линейных уравнений с n переменными. Метод обратной матрицы.
9. Метод Гаусса.
10. Система m линейных уравнений с n переменными. Теорема Кронекера-Капелли.
11. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.
12. Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции над ними.
13. Скалярное произведение векторов.
14. N -мерный вектор и векторное пространство.
15. Линейная зависимость и независимость векторов линейного пространства.
16. Размерность и базис линейного пространства.
17. Переход к новому базису.
18. Прямая на плоскости. Виды уравнений прямой.
19. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

20. Окружность и эллипс.
21. Гипербола.
22. Парабола.
23. Плоскость в пространстве. Взаимное расположение двух плоскостей.
24. Прямая в пространстве. Взаимное расположение двух прямых.
25. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

а) имеет бесчисленное множество решений; б) не имеет решений; в) имеет только одно решение (единственное решение); г) имеет нулевое и ненулевое решение.

12. Известно, что матрица системы – квадратная матрица n -го порядка и ее определитель не равен нулю. Выберите верное утверждение: а) система не имеет решений; б) система имеет ровно n решений; в) система имеет единственное решение; г) система имеет бесчисленное множество решений.

13. Указать формулы для решения системы
$$\begin{cases} -2x_1 + x_3 = -3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$
 методом Крамера и записать

решение в виде вектора $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

а) $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, $(i = \overline{1,3})$, где $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$;

б) $x_i = \Delta_i \cdot \Delta$, $(i = \overline{1,3})$, где $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$;

в) $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, $(i = \overline{1,3})$, где $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$;

г) $x_i = \Delta - \Delta_i$, $(i = \overline{1,3})$, где $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

14. Скалярным произведением двух векторов является: а) число; б) вектор; в) матрица; г) нет правильного ответа.

15. Какое из условий является условием ортогональности двух векторов: а) векторное произведение векторов равно 0; б) смешанное произведение векторов равно 0; в) скалярное произведение векторов равно 0; г) нет правильного ответа

16. Векторное произведение двух ненулевых и неколлинеарных векторов равно:

а) площади треугольника; б) объему пирамиды; в) площади параллелограмма; г) нет правильного ответа.

17. Смешанное произведение трех ненулевых и некомпланарных векторов равно: а) площади треугольника; б) объему пирамиды; в) объему параллелепипеда; г) нет правильного ответа.

18. Сколько базисов имеется в линейном пространстве \mathbb{R}^n : а) 1; б) n ; в) $n-1$; г) бесконечно много.

По ОК-7 получены результаты: _____

2. Способностью находить организационно-управленческие решения, оценивать результаты и последствия принятого управленческого решения и готовность нести за них ответственность с позиций социальной значимости принимаемых решений (ОПК-2)

1. Какие свойства для матриц A, B, C и числа α верны в общем случае:

а) $(\alpha A)B = A(\alpha B)$; б) $(A+B)C = AC + BC$; в) $AB = BA$; г) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$; д) $A(BC) = (AB)C$.

2. Разложение определителя $\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ по первой строке имеет вид:

а) $11a - 2b - c$; б) $-a + 2b + c$; в) $a + 2b - c$; г) $11a + 2b - c$.

3. Ранг матрицы равен (выбрать все верные утверждения):

а) числу ненулевых строк в ступенчатой матрице, полученной из исходной с помощью элементарных преобразований; б) числу ненулевых элементов матрицы; в) максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) матрицы; г) порядку базисного минора матрицы; д) максимальному числу r , для которого существует ненулевой минор порядка r .

4. Указать матрицы, ранг которых равен 3.

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Указать формулы для решения системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$ методом обратной матрицы и записать

решение в виде вектора $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

а) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}^T$; г) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

6. Известно, что система линейных алгебраических уравнений имеет невырожденную матрицу. Выберите верное утверждение: а) систему нельзя решить методом обратной матрицы; б) система не имеет решения; в) систему можно решить методом обратной матрицы, и она имеет бесчисленное множество решений; г) систему можно решить методом обратной матрицы и это будет единственное решение.

7. Какой вывод можно сделать о каждой из систем, если в результате элементарных преобразований над расширенными матрицами систем получились следующие матрицы:

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

а) система несовместна; б) система имеет единственное решение; в) система имеет бесчисленное множество решений.

Ответ:

	1	2	3	4
а				
б				
в				

8. Для системы
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$
 указать ФСР (фундаментальную систему решений).

а) $\vec{e}_1 = (1, -2, -2, 12)^T$; б) $\vec{e}_1 = (1, -2, 1, 1)^T$, $\vec{e}_2 = (1, -1, 1, 0)^T$; в) $\vec{e}_1 = (1, 0, -3, 11)^T$, $\vec{e}_2 = (0, 1, -2, 5)^T$, $\vec{e}_3 = (1, -2, 1, 1)^T$; г) $\vec{e}_1 = (0, 1, -2, 5)^T$, $\vec{e}_2 = (1, -2, 1, 1)^T$.

9. Пусть $\vec{h} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ некоторое решение неоднородной системы, а $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

фундаментальная система решений соответствующей однородной системы. Тогда общее решение неоднородной системы X имеет вид:

а) $X = \begin{pmatrix} C_1 - 2 \\ C_2 + 11 \\ C_3 \\ C_3 \end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix} C_1 - 2C_3 \\ C_2 + 11C_3 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$; в) $X = \begin{pmatrix} -2C_1 \\ 11C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; г) $X = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 - 2 \\ C_1 + 11 \\ C_3 \\ C_2 + C_3 \end{pmatrix}$.

10. Указать координаты вектора $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ в базисе $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$:

а) $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$.

11. Вектор $\vec{b}(7; 3; \alpha)$ ортогонален вектору $\vec{c}(3; \alpha; -6)$, если α равно: а) 7; б) -1; в) 9; г) нет правильного ответа.

12. Скалярное произведение $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} + 4\vec{b})$ при $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, угле между \vec{a} и \vec{b} равном $\frac{\pi}{3}$, равно: а) $-\frac{15}{2}$; б) -1; в) 3; г) нет правильного ответа.

13. Векторы $\vec{a}(1; 3; 2)$, $\vec{b}(4; 5; 6)$, $\vec{c}(1; 1; 3)$: а) коллинеарные; б) компланарны; в) некомпланарные; г) нет правильного ответа.

14. Если $|\vec{a} \times \vec{b}| = 3$, $|\vec{a}| = 4$, а угол между \vec{a} и \vec{b} равен $\frac{\pi}{6}$, то $|\vec{b}|$ равен: а) $\frac{3}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 0; г) нет правильного ответа.

15. Определите вид зависимости между векторами $\vec{a}(-1; 2; 7)$ и $\vec{b}(-1; 3; 4)$: а) линейно зависимы; б) линейно независимы; в) нелинейно зависимы; г) нет правильного ответа.

16. Система векторов линейного пространства называется линейно независимой, если: а) один из векторов нулевой; б) несколько из векторов компланарны; в) их линейная комбинация равна нулю; г) только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору.

По ОПК-2 получены результаты: _____


Критерии оценки результатов тестирования:

– оценка «отлично» выставляется студенту, если он отвечает верно на 80-100 % вопросов.

- оценка «хорошо», выставляется студенту, если он отвечает верно на 70-79 % вопросов.
- оценка «удовлетворительно», выставляется студенту, если он отвечает верно на 60-69 % вопросов.
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не освоил материал темы, дает менее 60% правильных ответов.

Итого по дисциплине количество баллов

Составитель


(подпись)

Тарсис Е.Ю.

МАТРИЦА СООТВЕТСТВИЯ КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ УРОВНЮ СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ

Критерии оценки	Уровень сформированности компетенций
Оценка по пятибалльной системе	
«Отлично»	«Высокий уровень»
«Хорошо»	«Повышенный уровень»
«Удовлетворительно»	«Пороговый уровень»
«Неудовлетворительно»	«Не достаточный»
Оценка по системе «зачет – незачет»	
«Зачтено»	«Достаточный»
«Не зачтено»	«Не достаточный»

Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

1. Положение «О балльно-рейтинговой системе аттестации студентов»: СМК ПНД 08-01-2015, введено приказом от 28.09.2011 №371-О, утверждено ректором 12.10.2015 г. (<http://nsau.edu.ru/file/403>: режим доступа свободный);

2. Положение «О проведении текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся в ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ»: СМК ПНД 77-01-2015, введено в действие приказом от 03.08.2015 №268а-О (<http://nsau.edu.ru/file/104821>: режим доступа свободный).

Составитель _____

подпись

Е.Ю. Тарсис

« 11 » 06 20 10 г.