НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Допущено Министерством сельского хозяйства Российской федерации в качестве учебного пособия для студентов высших аграрных учебных заведений, обучающихся по инженерным специальностям.

Издание второе, стереотипное

Новосибирск 2017

УДК 517.3

ББК 22.161.1

Д 503

Составители: В.Н.Бабин, доц., Р.Т.Бильданов, ст. преп., М.В.Грунина, доц.

Рецензенты: В.П.Ильин, д-р.физ.-мат.наук, проф.,
М.С.Соппа, д-р.физ.-мат.наук, проф.

Интегральное исчисление: учеб.-метод. пособие / сост.: В.Н.Бабин, Р.Т.Бильданов, М.В.Грунина; Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т. – Новосибирск, 2017. – 117 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, всех форм обучения по направлениям подготовки, реализуемым в ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ

Глава 1. Неопределенный интеграл

§1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные формулы интегрирования

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообразной от функции** $\boldsymbol{f(x)}$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Отыскание функции $F(x)$ по ее производной (дифференциалу) называется **интегрированием**.

Теорема. Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесконечное множество различных первообразных функций, которые отличаются друг от друга на постоянную.

Определение 2. Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Свойства неопределенного интеграла:

1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$ или $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

2) $\int F'(x)dx = F(x) + C$ или $\int dF(x) = F(x) + C$;

3) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла;

4) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$, т.е. интеграл от алгебраической суммы равен сумме интегралов от всех слагаемых.

Основные формулы интегрирования

1. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C;$

4. $\int e^u du = e^u + C;$

5. $\int \sin u du = -\cos u + C;$

6. $\int \cos u du = \sin u + C;$

7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$

9. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$

10. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln | u + \sqrt{u^2 \pm a^2} | + C;$

12. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$

В этих формулах a и α постоянны, а u – независимая переменная или любая дифференцируемая функция от независимой переменной.

Примеры. Найти интегралы:

а) $\int \left(6x^3 - \frac{3x}{\sqrt[3]{x}} + 4x \cdot \sqrt[5]{x} - 2 + \frac{5}{x} \right) dx;$ б) $\int \frac{3\sqrt{x} - x \sin x}{x} dx.$

Решение. а) Преобразуем подынтегральную функцию и воспользуемся свойствами 2), 3), и 4):

$$\int \left(6x^3 - \frac{3x}{\sqrt[3]{x}} + 4x \cdot \sqrt[5]{x} - 2 + \frac{5}{x} \right) dx = 6\int x^3 dx - 3\int x^{1-\frac{1}{3}} dx + 4\int x^{1+\frac{1}{5}} dx - 2\int dx +$$

$$+5\int \frac{dx}{x} = 6\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 4\frac{x^{\frac{6}{5}+1}}{\frac{6}{5}+1} - 2x + 5\ln|x| + C = \frac{3}{2}x^4 - \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{20}{11}x^{\frac{11}{5}} -$$

$$-2x+5\ln|x|+C=\frac{3}{2}x^4-\frac{9}{5}x\cdot\sqrt[3]{x^2}-\frac{20}{11}x^2\cdot\sqrt[5]{x}-2x+5\ln|x|+C.$$

(Использовали табличные интегралы 1) и 2)).

б) $\int\frac{3\sqrt{x}-x\sin x}{x}dx=\int(3x^{\frac{1}{2}-1}-\sin x)dx=3\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\int\sin x dx=$

$$=3\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\cos x+C=6\sqrt{x}+\cos x+C.$$

§2. Интегрирование методом внесения под знак дифференциала

Из определения дифференциала и таблицы производных следуют формулы.

Таблица дифференциалов

1) $dx=d(x+C)$;

2) $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$;

3) $xdx=\frac{1}{2}dx^2$;

4) $x^2dx=\frac{1}{3}dx^3$;

5) $x^n dx=\frac{1}{n+1}dx^{n+1}$;

6) $\frac{dx}{x}=d\ln|x|$;

7) $a^x dx=\frac{da^x}{\ln a}$;

8) $e^x dx=de^x$;

9) $\cos x dx=d\sin x$;

10) $\sin x dx=-d\cos x$;

11) $\frac{dx}{\cos^2 x}=d\,\mathrm{tg}\,x$;

12) $\frac{dx}{\sin^2 x}=-d\,\mathrm{ctg}\,x$;

13) $\frac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}d\,\mathrm{arctg}\,x;\\-d\,\mathrm{arcctg}\,x;\end{cases}$

14) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}d\arcsin x;\\-d\arccos x.\end{cases}$

Пример. Найти интеграл $\int (2x+3)^{11} dx$.

$$\int (2x+3)^{11} dx = \left| dx = \frac{1}{2} d(2x+3) \right| = \frac{1}{2} \int (2x+3)^{11} d(2x+3) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(2x+3)^{12}}{12} + C = \frac{(2x+3)^{12}}{24} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \left| \cos x dx = d \sin x \right| = \int (\sin x)^2 \cdot d \sin x =$$

$$= \frac{(\sin x)^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

$$\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \left| e^x dx = d(e^x) \right| = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int e^{x^3} x^2 dx$.

$$\int e^{x^3} x^2 dx = \left| x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3 \right| = \frac{1}{3} \int e^{x^3} dx^3 = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$.

$$\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x} = \left| \frac{dx}{x} = d \ln x \right| = \int (\ln x)^{\frac{1}{2}} d \ln x = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 x} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\cos x dx}{3+5\sin x}$.

$$\int \frac{\cos x dx}{3+5\sin x} = \left| \cos x dx = d \sin x \right| = \int \frac{d \sin x}{3+5\sin x} = \frac{1}{5} \int \frac{d(3+5\sin x)}{3+5\sin x} =$$

$$= \frac{1}{5} \ln |3+5\sin x| + C.$$

§3. Метод подстановки (замены переменной)

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены переменной в этом случае имеет вид

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt .$$

2) $u = \psi(x)$, где u – новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int f(u)du .$$

Замечание. Очевидно, что метод внесения под знак интеграла и второй вид подстановки практически один и тот же.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$, результат интегрирования проверить дифференцированием.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{1+e^x} = z & x = \ln(z^2-1) \\ (1+e^x) = z^2 & dx = d(\ln(z^2-1)) \\ e^x = z^2 - 1 & dx = \dfrac{1}{z^2-1} \cdot 2zdz \end{array} \right| = \int \frac{2zdz}{z(z^2-1)} =$$

$$= 2\int \frac{dz}{(z^2-1)} = \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.$$

Проверка:

$$\left(\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C \right)' = \frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)' =$$

$$=\frac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\cdot e^x(\sqrt{1+e^x}+1)-\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\cdot e^x(\sqrt{1+e^x}-1)}{(\sqrt{1+e^x}+1)^2}=$$

$$=\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}(\sqrt{1+e^x}+1-\sqrt{1+e^x}+1)}{(\sqrt{1+e^x}+1)(\sqrt{1+e^x}-1)}=\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}(e^x+1-1)}=\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}.$$

Верно!

Пример. Найти интеграл $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$.

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx=\left|\begin{array}{ll}1+\cos^2 x=z & 2\cos x\cdot(-\sin x)dx=dz\\ d(1+\cos^2 x)=dz & -\sin 2xdx=dz\\ (1+\cos^2 x)'dx=dz & \sin 2xdx=-dz\end{array}\right|=$$

$$=-\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=-\int z^{-\frac{1}{2}}dz=-z^{\frac{1}{2}}:\frac{1}{2}+C=-2\sqrt{z}+C=-2\sqrt{1+\cos^2 x}+C.$$

§4. Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле $\int udv=uv-\int vdu,$ где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью этой формулы $\int udv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int vdu$. Применение этой формулы нужно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен. При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так, например, для интегралов $\int P(x)\,a^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\,e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\sin\alpha x\,dx$, $\int P(x)\cos\alpha x\,dx$, где $P(x)$ – многочлен, за u следует принять $P(x)$, а за dv – соответственно выражения $a^{\alpha x}dx$, $e^{\alpha x}dx$, $\sin\alpha x\,dx$, $\cos\alpha x\,dx$; для интегралов вида $\int P(x)\ln\alpha x\,dx$, $\int P(x)\arcsin\alpha x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,\alpha x\,dx$ за u принимаются соответственно функции $\ln\alpha x$, $\arcsin\alpha x$, $\mathrm{arctg}\,\alpha x$, а за $dv - P(x)dx$.

Пример. Найти интеграл $\int(3-2x)\sin\frac{x}{2}dx$.

$$\int(3-2x)\sin\frac{x}{2}dx=\left|\begin{array}{l}u=3-2x\\ dv=\sin\frac{x}{2}dx\\ du=u'dx=(3-2x)'dx=-2dx\\ v=\int dv=\int\sin\frac{x}{2}dx=2\int\sin\frac{x}{2}d\frac{x}{2}=-2\cos\frac{x}{2}\end{array}\right|=$$

$$=-2(3-2x)\cos\frac{x}{2}-\int\left(-2\cos\frac{x}{2}\right)\cdot(-2dx)=(4x-6)\cos\frac{x}{2}-4\int\cos\frac{x}{2}dx=$$

$$=(4x-6)\cos\frac{x}{2}-8\int\cos\frac{x}{2}d\frac{x}{2}=(4x-6)\cos\frac{x}{2}-8\sin\frac{x}{2}+C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int\arcsin x dx$, результаты интегрирования проверить дифференцированием.

$$\int\arcsin x dx=\left|\begin{array}{l}u=\arcsin x\\ dv=dx\\ du=u'dx=(\arcsin x)'dx=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ v=\int dv=\int dx=x\end{array}\right|=$$

$$= x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} 1-x^2 = z & -2xdx = dz \\ d(1-x^2) = dz & xdx = -\frac{1}{2}dz \\ (1-x^2)'dx = dz & \end{matrix} \right| = x\arcsin x -$$

$$-\int \frac{-\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}dz = x\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\ .$$

Проверка:

$$(x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C)' = x'\arcsin x + x(\arcsin x)' +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Верно!

Пример. Найти интеграл $\int e^{2x}\cos 3xdx$.

Пусть $J = \int e^{2x}\cos 3xdx$.

$$J = \int e^{2x}\cos 3xdx = \left| \begin{matrix} u = e^{2x} \\ dv = \cos 3xdx \\ du = u'dx = (e^{2x})'dx = 2e^{2x}dx \\ v = \int dv = \int \cos 3xdx = \frac{1}{3}\int \cos 3xd3x = \frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{e^{2x}}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x \cdot 2e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\cdot \sin 3xdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = e^{2x} \\ dv = \sin 3xdx \\ du = 2e^{2x}dx \\ v = \int \sin 3xdx = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right| = \frac{e^{2x}}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\left[-\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x - \right.$$

$$-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 2e^{2x}dx\Bigg] = \frac{e^{2x}}{3}\sin 3x + \frac{2e^{2x}}{9}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cdot\cos 3x dx.$$

Итак, $J = \frac{e^{2x}}{9}(3\sin 3x + 2\cos 3x) - \frac{4}{9}J + C$.

Решаем уравнение относительно J.

$$\frac{13}{9}J = \frac{e^{2x}}{9}(3\sin 3x + 2\cos 3x) + C \quad \Rightarrow \quad J = \frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x + 2\cos 3x) + C.$$

Таким образом, $\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x + 2\cos 3x) + C.$

§5. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется отношение многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ степеней n и m соответственно.

Рациональная дробь называется правильной, если $n < m$, в противном случае она называется неправильной.

Простейшими дробями называются правильные дроби вида

I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{A}{(x-a)^m}$, $m \in Z$, $m \geq 2$;

III. $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ ($ax^2+bx+c = 0$ не имеет действительных корней);

IV. $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m}$, $m \in Z$, $m \geq 2$, $b^2 - 4ac < 0$.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{3dx}{x-4}$.

$$\int\frac{3dx}{x-4} = 3\int\frac{d(x-4)}{x-4} = 3\ln|x-4| + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int\frac{7dx}{(x-5)^5}$.

$$\int \frac{7dx}{(x-5)^5} = 7\int (x-5)^{-5}\,d(x-5) = 7\frac{(x-5)^{-4}}{-4} + C = -\frac{7}{4(x-5)^4} + C\ .$$

Подробно остановимся на интегралах III типа, заметим, что $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ интегрируются таким же способом и объединяются в общий класс функций (функции, содержащие квадратный трехчлен).

Пример. Найти интеграл $\int \frac{3x-1}{x^2-6x+10}dx$, результат интегрирования проверить дифференцированием.

Решение. Прежде чем перейти к интегрированию, сделаем следующие "заготовки":

1) найдем дифференциал от квадратного трехчлена:

$$d(x^2 - 6x + 10) = (x^2 - 6x + 10)'dx = (2x - 6)dx;$$

2) преобразуем числитель $3x - 1 = \frac{3}{2}(2x - 6) + 8$;

3) выделим полный квадрат в квадратном трехчлене

$$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 10 = (x - 3)^2 + 1.$$

$$\int \frac{3x-1}{x^2-6x+10}dx = \left|\text{применяем (2)}\right| = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-6)+8}{x^2-6x+10}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x-6)dx}{x^2-6x+10} + 8\int \frac{dx}{x^2-6x+10} = \left|\begin{array}{l}\text{к первому интегралу применяем (1)}\\ \text{ко второму интегралу применяем (3)}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2-6x+10)}{x^2-6x+10} + 8\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+1} = \frac{3}{2}\ln|x^2-6x+10| + 8\,\mathrm{arctg}(x-3) + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{3}{2}\ln|x^2-6x+10| + 8\,\mathrm{arctg}\left(x-3\right) + C\right)' = \frac{3}{2}\frac{1}{x^2-6x+10}(x^2-6x+10)' +$$

$$+8\cdot\frac{1}{(x-3)^2+1}\cdot(x-3)'=\frac{3(2x-6)}{2(x^2-6x+10)}+\frac{8}{(x-3)^2+1}=\frac{3x-9+8}{x^2-6x+10}=$$

$$=\frac{3x-1}{x^2-6x+10}.$$

Чтобы найти интеграл от любой рациональной дроби, нужно:

1) если дана неправильная рациональная дробь, выделить из нее целую часть, т.е. представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=M_k(x)+\frac{R_l(x)}{Q_m(x)},\ n\ge m,\ l<m;$$

2) разложить знаменатель $Q_m(x)$ на простейшие действительные множители. По основной теореме алгебры это разложение может содержать линейные и квадратные множители:

$$Q_m(x)=(x-a)^p\ldots(x-b)^l(x^2+px+q)^t\ldots(x^2+cx+d)^r,$$

$$p+\ldots+l+2t+\ldots+2r=m;$$

3) написать схему разложения данной дроби на простейшие слагаемые дроби в следующем виде:

$$\frac{R_{n_1}(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_p}{(x-a)^p}+\ldots+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+$$

$$+\ldots+\frac{B_l}{(x-b)^l}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_tx+N_t}{(x^2+px+q)^t}+$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+cx+d)^2}+\ldots+\frac{C_rx+D_r}{(x^2+cx+d)^r} \qquad (*)$$

Заметим, что квадратные трехчлены x^2+px+q и x^2+cx+d не имеют действительных корней;

4) привести к общему знаменателю правую часть равенства (*). Получим две дроби, у которых знаменатели равны, приравняем числители.

Из равенства двух многочленов найдем значение коэффициентов (способы их нахождения посмотрим на примерах).

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 7}{x^3 + 5x^2 + 6x} dx$ и результат проверить дифференцированием.

Решение. Замечаем, что в числителе стоит многочлен порядка 4, в знаменателе – порядка 3, т.е. дробь неправильная. Выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель:

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 7 & x^3 + 5x^2 + 6x \\
\cline{2-2}
x^4 + 5x^3 + 6x^2 \qquad & x - 1 \\
\cline{1-1}
-\; -x^3 - 4x^2 - 7 & \\
-x^3 - 5x^2 - 6x & \\
\cline{1-1}
x^2 + 6x - 7 &
\end{array}
$$

Итак, $\frac{x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 7}{x^3 + 5x^2 + 6x} = x - 1 + \frac{x^2 + 6x - 7}{x^3 + 5x^2 + 6x}$.

Разложим на линейные множители $x^3 + 5x^2 + 6x$:

$x^3 + 5x^2 + 6x = x(x^2 + 5x + 6) = x(x + 2)(x + 3)$,

т.к. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Разложим дробь $\frac{x^2 + 6x - 7}{x^3 + 5x^2 + 6x}$ на простейшие слагаемые:

$$\frac{x^2 + 6x - 7}{x(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} = \frac{A(x+2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x+2)}{x(x+2)(x+3)}.$$

Знаменатели равны, приравняем числители:

$x^2 + 6x - 7 = A(x + 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x + 2)$.

Если два многочлена равны, то они равны при любых значениях x.

Подставим в последнее равенство $x = 0$, $x = -2$, $x = -3$.

При $x = 0$: $-7 = 6A \Rightarrow A = -\frac{7}{6}$,

при $x = -2$: $-15 = -2B \Rightarrow B = \frac{15}{2}$, при $x = -3$: $-16 = 3C \Rightarrow C = -\dfrac{16}{3}$.

Итак, подынтегральную дробь можно представить в виде:

$$\frac{x^4+4x^3+2x^2-7}{x^3+5x^2+6x} = x-1-\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x}+\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

Найдём интеграл

$$\int\left(x-1-\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x}+\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{x+3}\right)dx = \int xdx-\int dx-\frac{7}{6}\int\frac{dx}{x}+\frac{15}{2}\int\frac{d(x+2)}{x+2}-$$

$$-\frac{16}{3}\int\frac{d(x+3)}{x+3} = \frac{x^2}{2}-x-\frac{7}{6}\ln|x|+\frac{15}{2}\ln|x+2|-\frac{16}{3}\ln|x+3|+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{x^2}{2}-x-\frac{7}{6}\ln|x|+\frac{15}{2}\ln|x+2|-\frac{16}{3}\ln|x+3|+C\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2x-1-$$

$$-\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x}+\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{x+3} = x-1-\frac{7}{6x}+\frac{15}{2(x+2)}-\frac{16}{3(x+3)} =$$

$$= \frac{6x(x-1)(x+2)(x+3)-7(x+2)(x+3)+15\cdot 3x(x+3)-16\cdot 2x(x+2)}{6x(x+2)(x+3)} =$$

$$= \frac{6x^4+30x^3+36x^2-6x^3-30x^2-36x-7x^2-35x-42+45x^2+135x}{6x(x+2)(x+3)}+$$

$$+\frac{-32x^2-64x}{6x(x+2)(x+3)} = \frac{6x^4+24x^3+12x^2-42}{6x(x+2)(x+3)} = \frac{x^4+4x^3+2x^2-7}{x^3+5x^2+6x}.$$

Пример. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию на простейшие слагаемые:

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}.$$

Знаменатели дробей равны, приравняем числители:

$$1 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx.$$

Подставим в равенство $x = 0$ и $x = –1$.

При $x = 0$: $1 = A \Rightarrow A = 1$,

при $x = –1$: $1 = –C \Rightarrow C = –1$.

Для определения B приравняем, например, коэффициенты при x^2, так как если два многочлена равны, то равны и коэффициенты при одинаковых степенях x.

x^2: $0 = A + B \Rightarrow B = –A = –1$.

Итак, подынтегральную функцию можно представить в виде

$\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$, тогда

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{d(x+1)}{x+1} - \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = \ln|x| - \ln|x+1| -$$

$$-\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C.$$

Пример. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 + x} dx$.

Решение. Подынтегральное выражение – неправильная рациональная дробь.

Выделим целую часть:

$$\begin{array}{r|l} -\ x^3 - 1 \quad\quad & 4x^3 + x \\ \cline{2-2} x^3 + 0{,}25x \quad & 0{,}25 \\ \cline{1-1} -0{,}25x - 1 & \end{array}$$

Итак, $\displaystyle\frac{x^3 - 1}{4x^3 + x} = \frac{1}{4} + \frac{-\frac{1}{4}x - 1}{4x^3 + x}$.

Разложим $\displaystyle\frac{-\frac{1}{4}x - 1}{4x^3 + x}$ на простейшие слагаемые дроби:

$$\frac{-\frac{1}{4}x-1}{x(4x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{4x^2+1}=\frac{A(4x^2+1)+Bx^2+Cx}{x(4x^2+1)}.$$

Знаменатели дробей равны, приравняем числители

$$-\frac{1}{4}x-1=4Ax^2+A+Bx^2+Cx.$$

Два многочлена равны, значит, равны коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравняем коэффициенты при x^2, x, x^0 (свободный член).

x^2: $0=4A+B\Rightarrow B=-4A\Rightarrow B=4$,

x: $-\frac{1}{4}=C\Rightarrow C=-\frac{1}{4}$,

x^0: $-1=A\Rightarrow A=-1$.

Итак,

$$\int\frac{x^3-1}{4x^3+x}dx=\int\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{x}+\frac{4x-\frac{1}{4}}{4x^2+1}\right)dx=\frac{1}{4}\int dx-\int\frac{dx}{x}+4\int\frac{xdx}{4x^2+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{4x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}x-\ln|x|+4\int\frac{\frac{1}{2}dx^2}{4\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}-\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x^2+\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}x-\ln|x|+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}-$$

$$-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}2x=\frac{1}{4}x-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\frac{1}{4}\right|-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}2x+C.$$

§6. Интегрирование тригонометрических выражений

Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложение, вычитание, умножение и деление), принято обозначать $R(\sin x, \cos x)$, где R – знак рациональной функции.

а) Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx.$

Универсальная тригонометрическая подстановка $t = tg\frac{x}{2}$ приводит интегралы такого типа к интегралам от рациональной функции переменной t. В результате этой подстановки имеем: $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow$

$$x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = (2\operatorname{arctg} t)'dt \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x} = \left| \begin{array}{ll} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, & \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{10t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2dt}{3+3t^2+10t+3-3t^2} = \int \frac{2dt}{2(3+5t)} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5t+3)}{5t+3} = \frac{1}{5}\ln|5t+3| + C =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right| + C.$$

б) Интеграл вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ **.**

Рассмотрим три случая.

1. По крайней мере, один из показателей m или n – нечетное положительное число. Если n – нечетное, то подстановка $\sin x = t$, если m, то $t = \cos x$.

Пример. Найти интеграл $\int \sin^3 x dx$.

$$\int \sin^3 x dx = \left| \begin{array}{ll} \cos x = t & \sin x dx = -dt \\ d\cos x = dt & \sin^3 x dx = \sin^2 x \cdot \sin x dx = \\ -\sin x dx = dt & = (1-\cos^2 x)\sin x dx \end{array} \right| = \int (1-t^2)(-dt) =$$

$$= \int t^2 dt - \int dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

2. Оба показателя m и n – четные положительные числа. Для понижения степени подынтегральной функции применяем формулы:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x;$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x);$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Пример. Найти интеграл $\int \cos^4 x dx$.

$$\int \cos^4 x dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4}\int dx +$$

$$+\frac{2}{4}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x) dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\int \cos 2x d2x + \frac{1}{8}\int dx +$$

$$+\frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\int \cos 4x d4x =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

3. m, n – четные целые числа, но хотя бы одно из них отрицательно. Подстановка $t = \mathrm{tg} x$, тогда $x = \mathrm{arctg} t$, откуда $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

Используем известные тригонометрические формулы:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$.

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx = \left| \begin{array}{ll} t = \operatorname{tg} x, & \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}, \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, & \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}. \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{1}{1+t^2} \cdot \dfrac{dt}{1+t^2}}{\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^4} = \int t^{-4}dt = \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} + C.$$

в) Интеграл вида $\int R(\operatorname{tg} x)dx$ приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $t = \operatorname{tg}x$.

Пример. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^5 xdx$.

$$\int \operatorname{tg}^5 xdx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^5 \cdot dt}{t^2+1} = \left| \begin{array}{l} \text{Выделим целую часть} \\ \begin{array}{r|l} -t^5 & t^2+1 \\ \cline{2-2} t^5+t^3 & t^3-t \\ \cline{1-1} -t^3 & \\ -t^3-t & \\ \cline{1-1} t & \\ \cline{1-1} \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \int t^3 dt - \int tdt + \int \frac{tdt}{t^2+1} = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} =$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + C.$$

г) Интегралы вида $\int \sin mx \cdot \cos nxdx, \quad \int \sin mx \cdot \sin nxdx$ **и** $\int \cos mx \cdot \cos nxdx$ **.**

При нахождении интегралов такого типа применяются формулы:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x].$$

Пример. Найти интеграл $\int \sin 10x \cdot \cos 15x dx$.

$$\int \sin 10x \cdot \cos 15x dx = \frac{1}{2}\int [\sin 25x + \sin(-5x)]dx = \frac{1}{50}\int \sin 25x d25x -$$

$$-\frac{1}{10}\int \sin 5x d5x = -\frac{1}{50}\cos 25x + \frac{1}{10}\cos 5x + C.$$

§7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Иррациональные функции интегрируются в элементарных функциях только в некоторых определенных случаях. Мы рассмотрим два из них:

а) интеграл $\int R(x, x^{\alpha}, x^{\beta}...)dx$, где R – рациональная функция, $\alpha = \frac{m_1}{n_1}$, $\beta = \frac{m_2}{n_2}$,... – рациональные числа, сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x = t^k$, где k – общий знаменатель всех дробных показателей степеней x;

б) интегралы $\int R[x, (ax+b)^{\alpha}, (ax+b)^{\beta}...]dx$ или $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, ...\right]dx$ приводятся к рациональному виду аналогично случаю а) с помощью подстановок $ax + b = t^k$ или $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

В этом примере $x^{\frac{1}{3}}$ и $x^{\frac{1}{2}}$, общий знаменатель $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ равен 6, поэтому подстановка $x = t^6$.

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5 dt \\ \sqrt{x} = \sqrt{t^6} = t^3 \\ \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{t^6} = t^2 \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{(1+t^2)t^3} = 6\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 6\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= 6\int dt - 6\int \frac{dt}{1+t^2} = 6t - 6\operatorname{arctg} t + C = 6 \cdot \sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.$$

Пример. Найти $\int \sqrt{\frac{x-2}{x}} \cdot \frac{dx}{x}$.

Сделаем подстановку

$\sqrt{\frac{x-2}{x}} = t \Rightarrow \frac{x-2}{x} = t^2 \Rightarrow (x-2) = xt^2$, отсюда выразим x:

$x = \frac{2}{1-t^2}$, дальше найдем dx:

$$dx = \left(\frac{2}{1-t^2}\right)' dt = 2(-(1-t^2)^{-2})(1-t^2)' dt = -\frac{2}{(1-t^2)^2} \cdot (-2t) dt = \frac{4t dt}{(1-t^2)^2}.$$

Тогда

$$\int \sqrt{\frac{x-2}{x}} \cdot \frac{dx}{x} = \int \frac{t \cdot \frac{4t dt}{(1-t^2)^2}}{\frac{2}{1-t^2}} = \int \frac{2t^2 dt}{1-t^2} = -2\int \frac{t^2}{t^2-1} dt = -2\int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt =$$

$$= -2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2 - 1} = -2t - \frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -2\sqrt{\frac{x-2}{x}} - \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x-2}{x}} - 1}{\sqrt{\frac{x-2}{x}} + 1}\right| + C =$$

$$= -2\sqrt{\frac{x-2}{x}} - \ln\left|\frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}}\right| + C.$$

Глава 2. Определенный интеграл

§1. Определение, основные свойства и вычисление определенных интегралов

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Разделим отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей точками
$a = x_0 < x_1 < x_2 <...< x_{n-1} < x_n = b$, выберем на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку c_k, найдем значение функции в этих точках, длину каждого отрезка $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и максимальную из длин отрезков $\Delta = \max\limits_k \Delta x_k$.

Определение 1. Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется сумма вида

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Определение 2. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (или в пределах от a до b) называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из отрезков ($\max \Delta x_k$) стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta\to 0} \sigma_n = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Теорема (о существовании определенного интеграла).
Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на этом отрезке.

Если $f(x) > 0$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ и $x = b$.

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

4. $\int\limits_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b \varphi(x)dx$;

5. $\int\limits_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$, c – постоянная.

6. Оценка определенного интеграла: если m, M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$m \cdot (b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M \cdot (b-a).$$

7. **Теорема о среднем значении**. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то существует такая точка $c \in [a, b]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a).$$

Правила вычисления определенных интегралов

1. Формула Ньютона-Лейбница:

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

2. Интегрирование по частям:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu\ .$$

3. Замена переменной:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(t)$ – функция, непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \le t \le \beta$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $f[\varphi(t)]$ – функция, непрерывная на $[\alpha, \beta]$.

4. Если $f(x)$ – нечетная функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

5. Если $f(x)$ – четная функция, т.е. $f(-x) = f(x)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Пример. Вычислить определённые интегралы.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x^2+2x+1)+1} = \int_{-1}^{0} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_{-1}^{0} =$

$\displaystyle= \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4}.$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x(\cos x dx) = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)d\sin x = \int_0^{\pi/2} d\sin x -$

$\displaystyle- \int_0^{\pi/2} \sin^2 x d\sin x = \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^3 x}{3}\Big|_0^{\pi/2} == \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \frac{1}{3}\sin^3\frac{\pi}{2} +$

$\displaystyle+\frac{1}{3}\sin^3 0 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$

3. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

Переходим к новой переменной интегрирования, полагая $x = t^2$ $(t > 0)$. При $x = 0$ $t = 0$, а при $x = 4$ $t = 2$.

Функция $x = t^2$ монотонна, непрерывна и имеет непрерывную производную $x' = 2t$ на отрезке [0;2]. Поэтому, используя формулу замены переменной, имеем:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1}dt = 2\int_0^2 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$= 2(t-\ln|t+1|)\Big|_0^2 = 2(2-\ln 3+\ln 1) = 4-2\ln 3.$$

4. $$\int_0^3 x\operatorname{arctg} xdx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x; & du = \dfrac{dx}{1+x^2}; \\ dv = xdx; & v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2}. \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{x^2dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{9}{2}\operatorname{arctg} 3 - 0 - \frac{1}{2}\int_0^3 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{9}{2}\operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2}(x-\operatorname{arctg} x)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{9}{2}\operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3 = 5\operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2}.$$

5. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^5 xdx = 0$, т.к. подынтегральная функция $\sin^5 x$ является функцией нечетной.

§2. Несобственные интегралы

Понятие определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ введено для случая, когда промежуток интегрирования [a, b] конечен, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на [a, b]. Такие интегралы называют **собственными**. Данное понятие можно обобщить на случай, когда промежуток интегрирования бесконечен или подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв на [a, b]. Подобные интегралы называют **несобственными**.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (интегралы I рода) определяются посредством предельного перехода:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx\,;$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx,$$

где c – любое действительное число.

Несобственные интегралы от функции с бесконечными разрывами на $[a, b]$ (интегралы II рода) вводятся также с помощью предельного перехода.

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$ и непрерывна во всех других точках промежутка $(a, b]$, то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\,,\ (\varepsilon > 0).$$

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = b$ и непрерывна во всех других точках промежутка $[a, b)$, то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx\,,\ (\varepsilon > 0)\,.$$

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$, $c \in [a, b]$, а в остальных точках отрезка $[a, b]$ непрерывна, то $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx$, где $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и изменяются независимо друг от друга.

Если все указанные пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются сходящимися, в противном случае – расходящимися.

Пример. Исследовать несобственные интегралы на сходимость и найти их значение в случае, если они сходятся.

1. $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.

$$\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{e}^{b} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{e}^{b} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b\to\infty} \ln\left|\ln x\right| \Big|_{e}^{b} =$$

$= \lim\limits_{b\to\infty} (\ln\ln b - \ln\ln e) = \infty$, т.к. $y = \ln x$ – функция возрастающая, и при $b \to \infty$ $\ln b \to \infty$ и $\ln\ln b \to \infty$.

Так как предел бесконечен, значит, исходный интеграл расходится.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

По определению несобственного интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{a}^{0} +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{0}^{b} = \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) + \lim_{b\to\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

т.к. при $x \to \infty$ $\operatorname{arctg} x \to \frac{\pi}{2}$ и при $x \to -\infty$ $\operatorname{arctg} x \to -\frac{\pi}{2}$. Значит, интеграл сходится к числу π.

3. $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$.

Функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = 4$ (знаменатель дроби обращается в нуль), в остальных точках отрезка [2; 6] $f(x)$ непрерывна.

Воспользуемся определением несобственного интеграла.

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}} = \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}} + \int_4^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_2^{4-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{4+\varepsilon_2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_2^{4-\varepsilon_1} (x-4)^{-\frac{2}{3}} dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{4+\varepsilon_2}^{6} (x-4)^{-\frac{2}{3}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} (3 \cdot \sqrt[3]{x-4}) \Bigg|_{2}^{4-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} (3 \cdot \sqrt[3]{x-4}) \Bigg|_{4+\varepsilon_2}^{6} =$$

$$= 3 \lim_{\varepsilon_1 \to 0} (\sqrt[3]{4-\varepsilon_1-4} - \sqrt[3]{2-4}) + 3 \lim_{\varepsilon_2 \to 0} (\sqrt[3]{6-4} - \sqrt[3]{4+\varepsilon_2-4}) =$$

$$= 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 6 \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Данный несобственный интеграл сходится.

§3. Геометрические приложения определенных интегралов

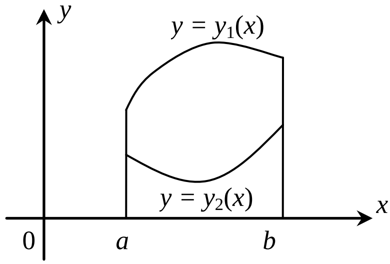
а) Вычисление площадей

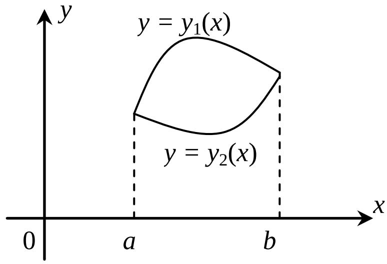
1. Декартовы координаты

Если плоская фигура ограничена прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$) и кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, причем $y_1(x) \le y_2(x)$ ($a \le x \le b$), то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx .$$

В отдельных случаях левая граница $x = a$ (или правая граница $x = b$) может выродиться в точку пересечения кривых $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$. В этих случаях величины a и b отыскиваются как абсциссы точек пересечения указанных кривых.





2. Параметрическое задание кривых

Если граница фигуры задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

то площадь фигуры вычисляется по одной из трех формул:

$$S = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt; \quad S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt; \quad S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (xy' - yx')dt,$$

где α и β – значения параметра t, соответствующие началу и концу обхода контура в положительном направлении (при котором фигура остается слева).

3. Полярные координаты

Площадь сектора, ограниченного дугой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

б) Вычисление длины кривой

1. Декартовы координаты

Уравнение кривой $y = y(x)$ и $y'(x)$ – непрерывная функция, то

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

– длина участка кривой, соответствующая изменению x в промежутке $[a, b]$.

2. Параметрическое задание кривых

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t_1 \le t \le t_2$$

$x'(t), y'(t)$ – непрерывные функции, то

$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt$ – длина участка кривой при $t \in [t_1, t_2]$.

3. Полярные координаты

Пусть $r = r(\varphi)$, то

$$l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi, \ \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2].$$

в) Вычисление объемов тел

1. Декартовы координаты

Если известна площадь $S(x)$ любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, и a и b – соответственно левая и правая границы изменения x, то объем тела выражается интегралом

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, ($f(x) \ge 0$),
$y = 0$; $x = a$, $x = b$ ($a < b$), выражается интегралом

$$V = \pi \int\limits_a^b (f(x))^2 dx.$$

Если же фигура, ограниченная линиями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$,
($0 \le y_1(x) \le y_2(x)$), $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения выражается интегралом

$$V = \pi \int\limits_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x))dx.$$

Если вращение происходит вокруг оси Oy и $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$,

$0 \le x_1(y) \le x_2(y)$, $y = a$ и $y = b$, то

$$V = \pi\int_a^b (x_2^2(y) - x_1^2(y))dy\,.$$

2. Параметрическое задание функции

Кривая $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_1 \le t \le t_2$ вращается вокруг оси Ox, объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\cdot x'(t)dt\,.$$

3. Полярные координаты

Объем тела, полученный при вращении сектора, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вокруг полярной оси, вычисляется по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi d\varphi\,.$$

г) Поверхность тела вращения

1. Декартовы координаты

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги L кривой $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$, выражается интегралом

$$S = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx\,.$$

2. Параметрическое задание функции

Если кривая задана параметрическими уравнениями:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, то

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta \big(y(t)\big(\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt\,.$$

3. Полярные координаты

Если кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, то

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sin\varphi \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi .$$

д) Вычисление моментов и координат центра тяжести

С помощью определенного интеграла можно вычислять статические моменты, моменты инерции и координаты центра тяжести однородных (плотность – величина постоянная) фигур и линий.

Например, статические моменты криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx; \quad M_y = \int_a^b xy dx.$$

Координаты центра тяжести вычисляются по формулам

$$x_{\text{ц.т.}} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}; \quad y_{\text{ц.т.}} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}.$$

(плотность полагаем равной единице).

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$. Сделать чертеж.

Решение. Найдём точки пересечения данных парабол, для этого решим систему из их уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = 4 - x^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 - 2x = 4 - x^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ 2x^2 - 2x - 4 = 0. \end{cases}$$

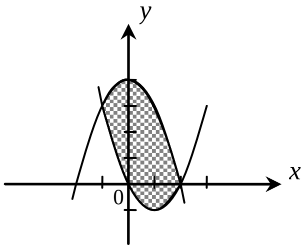
Найдём корни уравнения $2x^2 - 2x - 4 = 0$ или $x^2 - x - 2 = 0$.

$x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Тогда $y_1 = 2^2 - 2\cdot 2 = 0$,

$y_2 = (-1)^2 - 2\cdot(-1) = 3$.

Получим две точки пересечения (2, 0) и (–1, 3).



Для построения схематического чертежа найдем вершины парабол:

1) $y = x^2 - 2x$ (ветви направлены вверх).

$y' = 2x - 2$, $2x - 2 = 0$, $x = 1$.

$y(1) = 1^2 - 2\cdot1 = -1 \Rightarrow$ точка $(1, -1)$ – вершина параболы.

2) $y = 4 - x^2$ (ветви направлены вниз)

$y' = -2x$, $-2x = 0$, $x = 0$.

$y(0) = 4 - 0 = 4 \Rightarrow (0, 4)$ – вершина параболы.

Находим площадь по формуле $S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$

$$S = \int\limits_{-1}^{2} [4 - x^2 - (x^2 - 2x)]dx = \int\limits_{-1}^{2} (4 + 2x - 2x^2)dx = \left(4x + 2\cdot\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= 4\cdot(2-(-1)) + (4-(-1)^2) - \frac{2}{3}\cdot(8-(-1)^3) = 12 + 3 - 6 = 9 \text{ кв.ед.}$$

Пример. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями

$2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$.

Решение. Найдем точки пересечения параболы $y = \dfrac{x^2}{2}$ и прямой $y = \dfrac{3-2x}{2}$. Решаем систему из уравнений этих кривых:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2}, \\ y = \dfrac{3}{2} - x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2}, \\ \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{3}{2} - x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2}, \\ x^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

Найдем корни уравнения $x^2 + 2x – 3 = 0$.

$x_1 = –3$, $x_2 = 1$ и значения функций в этих точках:

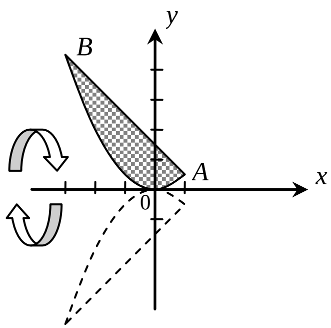
$y(–3) = \dfrac{(-3)^2}{2} = \dfrac{9}{2}$ и $y(1) = \dfrac{1}{2}$.

Получены точки пересечения

$A(1, \dfrac{1}{2})$ и $B(–3, \dfrac{9}{2})$.

Прямую проведем через точки A и B, для построения параболы учтем, что вершиной параболы является точка начала координат (0, 0).

Найдём объем тела, полученного вращением фигуры вокруг оси Ox по формуле $V = \pi\int\limits_a^b (y_2^2 - y_1^2)dx$.

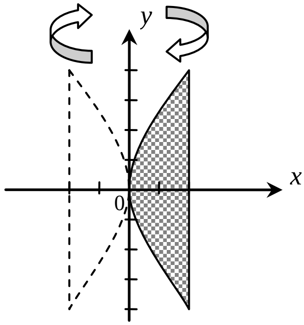


$$V = \pi\int\limits_{-3}^{1}\left[\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right]dx = \pi\int\limits_{-3}^{1}\left(\frac{9}{4} - 3x + x^2 - \frac{x^4}{4}\right)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{9}{4}x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= \pi\left[\frac{9}{4}(1+3) - \frac{3}{2}(1-9) + \frac{1}{3}(1+27) - \frac{1}{20}(1+243)\right] = 18\frac{2}{15}\pi \text{ куб.ед.}$$

Пример. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, образованной линиями $y^2 = 8x$ и $x = 2$.



Решение. Парабола $y^2 = 8x$ и прямая $x = 2$ пересекаются в точках (2, 4) и (2, –4).

Найдём объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy*, по формуле $V = \pi\int_a^b (x_2^2 - x_1^2)dy$.

$x_1(y) = \dfrac{y^2}{8}$ и $x_2(y) = 2$.

Так как фигура вращения симметрична относительно оси *Ox*,

$$V = 2\pi\int_0^4 \left[2^2 - \left(\frac{y^2}{8}\right)^2\right]dy = 2\pi\left(4y - \frac{y^5}{64\cdot 5}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{128\pi}{5} \text{ куб.ед.}$$

Глава 3. Кратные интегралы

§1. Задача об объёме цилиндрического тела

Тело, ограниченное снизу плоскостью *xOy*, сверху поверхностью $z = f(x, y)$ и с боков цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси *Oz*, называется цилиндрическим телом или цилиндроидом.

Задача. Вычислить объём *V* цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу областью *D*, сбоку – цилиндрической поверхностью, для которой направляющей служит контур замкнутой области *D*.

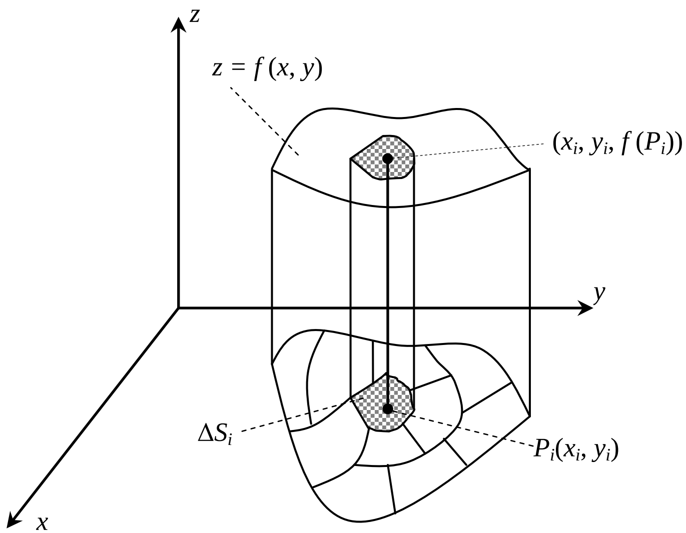


Рис. 1

Решение. Разобьём основание *D* на *n* произвольных частей (площадок) Δs_1, Δs_2, Δs_3, ... Δs_n, где Δs_i выражает площадь соответствующей площадки (рис.1). Если для каждой площадки выделить цилиндрическую поверхность, образующая которой параллельна оси *Oz*, а направляющей служит контур этой площадки, то в результате данное тело разобьётся на n частей (цилиндрических столбиков). В каждой из площадок Δs_i выберем произвольно (внутри или на границе) некоторую точку P_i; тогда произведение $f(P_i)\cdot\Delta s_i$ будет приближённо выражать объём i-го столбика, а сумма таких объёмов

$$f(P_1)\cdot\Delta s_1 + f(P_2)\cdot\Delta s_2 + \ldots + f(P_n)\cdot\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta s_i \qquad \textbf{(1)}$$

приближённо равна искомому объёму V, $V \approx \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta s_i$.

Назовём наибольшее расстояние между точками, принадлежащими площадке Δs_i, **диаметром** и обозначим его через d_i. За величину объёма V данного цилиндрического тела принимают тот предел, к которому стремится сумма (1) при $n\to\infty$ и одновременном стремлении к нулю наибольшего диаметра площадок ($\max d_i$).

Таким образом, $V = \lim\limits_{\substack{\max d_i\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta s_i$

$$\text{или } V = \lim_{\substack{\max d_i\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot\Delta s_i \qquad \textbf{(2)}$$

Разнообразные задачи приводят к необходимости отыскания пределов вида (2). Эти задачи приводят к понятию двойного интеграла.

§2. Двойной интеграл и его свойства

Пусть $f(x,y)$ непрерывная функция двух переменных в некоторой замкнутой области D. Разобьём область D на n частей Δs_1, Δs_2, Δs_3, ... Δs_n и в каждой замкнутой области Δs_i выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$. Умножим значение функции $f(x,y)$ в точке P_i на площадь области Δs_i и составим следующую сумму:

$$f(P_1)\cdot\Delta s_1 + f(P_2)\cdot\Delta s_2 + \ldots + f(P_n)\cdot\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta s_i \qquad \textbf{(1)}$$

Сумма (1) называется **двумерной интегральной суммой** для функции $f(x,y)$ в области *D*. Для функции $f(x,y)$ в области *D* можно составить бесчисленное множество интегральных сумм вида (1), так как последняя зависит от способа разбиения на элементарные области Δs_i и от выбора соответствующих точек P_i в пределах каждой такой элементарной области Δs_i.

Двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области *D* называется предел интегральной суммы (1) при условии, что $n \to \infty$, а $\max d_i \to 0$.

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot \Delta s_i \qquad \textbf{(2)}$$

Теорема. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области *D*, то предел (2) существует и не зависит ни от способов разбиения области *D* на элементарные области Δs_i, ни от выбора точек $P_i(x_i,y_i)$ в пределах каждой области.

Если предел (2) существует, то функция $f(x,y)$ называется **интегрируемой** в области *D*. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)ds$ функцию $f(x,y)$ называют **подынтегральной функцией**, *D* – **областью интегрирования**, а *ds* – **элементом площади**.

Свойство 1. Двойной интеграл от суммы двух функций по области *D* равен сумме двойных интегралов по области *D* от каждой из функций в отдельности: $\iint\limits_D [f(x,y)+\varphi(x,y)]ds = \iint\limits_D f(x,y)ds + \iint\limits_D \varphi(x,y)ds$.

Свойство 2. Постоянный множитель *A* можно вынести за знак двойного интеграла: $\iint\limits_D Af(x,y)ds = A\iint\limits_D f(x,y)ds$.

Свойство 3. Если область интегрирования *D* разбить на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то

$$\iint_D f(x,y)ds = \iint_{D_1} f(x,y)ds + \iint_{D_2} f(x,y)ds .$$

Свойство 4. Если m есть наименьшее значение и M – наибольшее значение функции $f(x,y)$ в области D, то $m \cdot S \le \iint_D f(x,y)ds \le M \cdot S$, где S – площадь области D .

Свойство 5 (теорема о среднем). Двойной интеграл $\iint_D f(x,y)ds$ равен произведению площади S области D на значение подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования

$$\iint_D f(x,y)ds = f(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}) \cdot S \qquad \textbf{(3)}$$

Значение $f(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}})$, определяемое равенством (3), называется **средним** значением функции $f(x,y)$ в области D.

Теорема о среднем имеет следующий геометрический смысл: объём цилиндрического тела равен объёму прямого цилиндра с тем же основанием D и с высотой, равной одной из аппликат точек поверхности $z = f(x,y)$; верхнее основание этого цилиндра параллельно нижнему.

§3. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных координатах

В прямоугольной системе координат элемент площади ds можно записать в виде произведения $dx \cdot dy$. Тогда

$$\iint_D f(x,y)ds = \iint_D f(x,y)dxdy . \qquad \textbf{(1)}$$

Чтобы вычислить двойной интеграл (1), будем рассматривать его как число, выражающее объём соответствующего цилиндрического тела с основанием D, которое ограничено сверху поверхностью $z = f(x,y)$.

Рассмотрим сначала частный случай: пусть область D есть прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат (рис. 2).

Известно, что объём тела с помощью определённого интеграла можно найти по формуле $V = \int\limits_a^b S(x)dx$, **(2)**

где $S(x)$ – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс, а $x = a$ и $x = b$ – уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело.

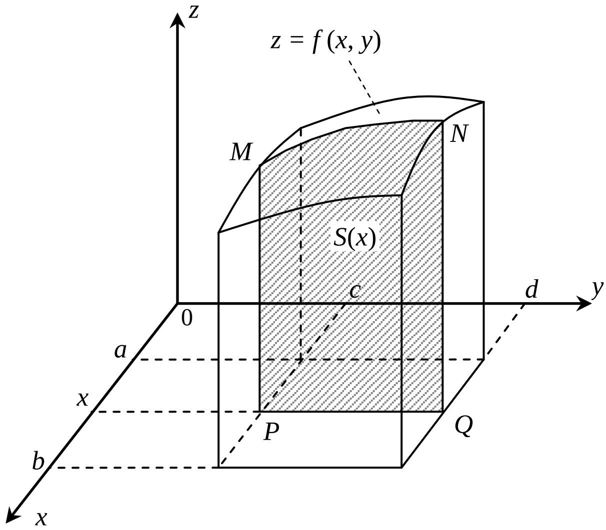


Рис. 2

Как видно из рис. 2, площадь сечения $S(x)$ равна площади криволинейной трапеции $PMNQ$, которая ограничена сверху кривой MN. Площадь этой трапеции можно найти по формуле $S(x) = \int\limits_c^d f(x, y)dy$, **(3)**

где подынтегральную функцию $f(x, y)$ следует рассматривать как функцию одной только переменной y (x в этом случае считается постоянной). Подставив (3) в (2), получим $V = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)dy \right) dx$.

Так как V можно заменить двойным интегралом (1), то получаем

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx \, . \qquad \textbf{(4)}$$

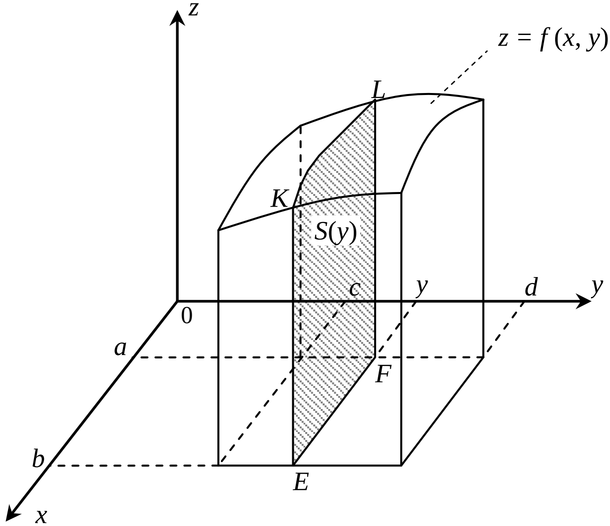


Рис. 3

С другой стороны, объём того же тела можно найти по формуле

$$V = \int\limits_c^d S(y)dy \, , \qquad \textbf{(5)}$$

где $S(y)$ – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси ординат, а $y = c$ и $y = d$ – уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело. Как видно из рис. 3, площадь сечения $S(y)$ равна площади криволинейной трапеции $EKLF$, которая ограничена сверху кривой KL. Площадь этой трапеции можно найти по формуле

$$S(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx \, , \qquad \textbf{(6)}$$

где подынтегральную функцию $f(x, y)$ следует рассматривать как функцию одной только x (y в этом случае считается постоянной). Подставив (6) в (5) и заменяя объём V двойным интегралом (1), получим

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy\,. \qquad \textbf{(7)}$$

Таким образом, данный двойной интеграл можно вычислить по формуле (4), если внутренний интеграл интегрировать по переменной *y,* а внешний по переменной *x*. С другой стороны, данный двойной интеграл можно вычислить по формуле (7), если внутренний интеграл интегрировать по переменной *x*, а внешний по переменной *y*. Итак,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx \qquad \textbf{(8)}$$

для прямоугольника. Если область D ограничена прямыми $x = a$, $x = b$, $b > a$ и кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a,b]$, то двойной интеграл можно вычислить по формуле:

$$\iint\limits_B f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \qquad \textbf{(9)}$$

Формулы (8), (9) показывают, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определённых интегралов. Интегралы в формулах (8) и (9) называются двукратными. Формулы (8), (9) позволяют двойной интеграл привести к двукратному.

Пример. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (10 - x^2 - y^2)dxdy$, если область D есть прямоугольник, стороны которого определены уравнениями $x = 1$; $x = 2$; $y = 0$; $y = 2$ (рис. 4).

Решение. Применяем формулу (4).

$$\iint\limits_D (10 - x^2 - y^2)dxdy = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^2 (10 - x^2 - y^2)dy \right) dx\,.$$

Вычислим внутренний интеграл. При интегрировании считаем *x* постоянной величиной

$$\int_0^2 (10 - x^2 - y^2)dy = \left[10y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = 20 - 2x^2 - \frac{8}{3} = \frac{52}{3} - 2x^2.$$ Тогда

$$\iint_D (10 - x^2 - y^2)dxdy = \int_1^2 \left(\frac{52}{3} - 2x^2\right)dx = \left[\frac{52}{3}x - \frac{2x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{38}{3}.$$

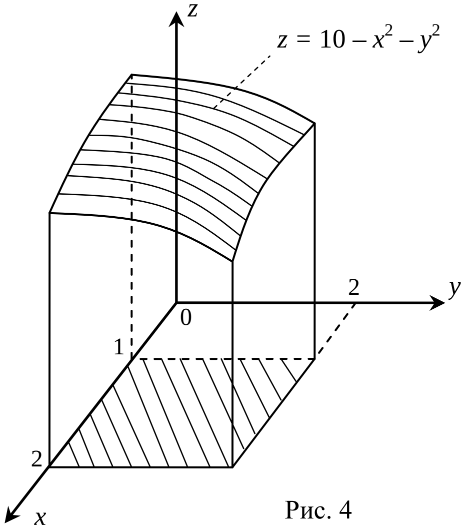


Рис. 4

Изменим порядок интегрирования. Применим формулу (7).

$$\iint_D (10 - x^2 - y^2)dxdy = \int_0^2 \left(\int_1^2 (10 - x^2 - y^2)dx\right)dy.$$

Считая y постоянной, вычислим внутренний интеграл.

$$\int_1^2 (10 - x^2 - y^2)dx = \left[10x - \frac{x^3}{3} - xy^2\right]_1^2 = 20 - \frac{8}{3} - 2y^2 - 10 +$$

$$+\frac{1}{3} + y^2 = \frac{23}{3} - y^2.$$

Тогда $\displaystyle\iint_D (10 - x^2 - y^2)dxdy = \int_1^2 \left(\frac{23}{3} - y^2\right)dy = \left[\frac{23}{3}y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{38}{3}.$

Как видно, полученные результаты совпадают.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_3^5 dx \int\limits_1^e \frac{2x-1}{y} dy$.

Решение. При вычислении внутреннего интеграла *x* считается постоянной, поэтому множитель (2*x*-1) можно вынести за знак внутреннего интеграла.

Имеем $\int\limits_3^5 dx \int\limits_1^e \frac{2x-1}{y} dy = \int\limits_3^5 (2x-1)dx \int\limits_1^e \frac{dy}{y} = \int\limits_3^5 (2x-1)dx(\ln y)\Big|_1^e =$

$$= \int\limits_3^5 (2x-1)dx(\ln e - \ln 1) = \int\limits_3^5 (2x-1)dx = \ (x^2 - x)\Big|_3^5 = 25-5-9+3=14.$$

§4. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

В прямоугольной системе координат двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области *D* имел вид $\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. **(1)**

Пусть область *D* задана в полярной системе координат. Если полюс *O* полярной системы координат совпадает с началом прямоугольной системы, а направление полярной оси совпадает с направлением оси абсцисс, то формулы перехода $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, **(2)**

где *r* и φ – координаты точек области *D*. В полярной системе координат элемент площади $ds = rdrd\varphi$ и

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi \qquad \textbf{(3)}$$

или $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$. **(4)**

Формула (4) позволяет преобразовать двойной интеграл в прямоугольных координатах в двойной интеграл в полярных координатах.

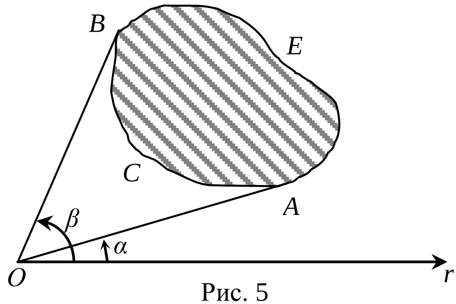


Рис. 5

Рассмотрим способ вычисления такого интеграла.

Пусть контур D пересекается лучами, исходящими из полюса O не более двух раз (рис. 5). Предположим, что область D заключена между лучами OA и OB; пусть луч OA образует с полярной осью угол α, а луч OB образует угол β.

Если $r = r_1(\varphi)$ есть уравнение линии ACB в полярной системе координат, а $r = r_2(\varphi)$ есть уравнение линии AEB в полярной системе координат, то интеграл (4) вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr\ . \qquad \textbf{(5)}$$

Если, в частности, полюс O содержится внутри области интегрирования D и любой полярный радиус пересекает контур области в одной точке, то угол φ в этом случае изменяется от 0 до 2π.

Пример. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, где область D есть круг с центром в начале координат и с радиусом, равным единице (рис. 6).

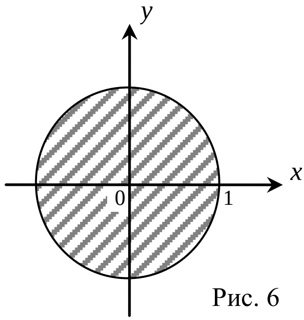


Рис. 6

Решение. Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy = rdrd\varphi$, то

$I = \iint\limits_D \sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}\, rdrd\varphi = \iint\limits_D \sqrt{1-r^2}\, rdrd\varphi$. Для заданной области D угол φ меняется от 0 до 2π, а полярный радиус r при любом φ изменяется от 0 до 1. Следовательно,

$$\iint\limits_D \sqrt{1-r^2}\, rdrd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\, rdr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int\limits_0^1 \left(1-r^2\right)^{\frac{1}{2}} (-2rdr) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left[\frac{2}{3}\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\pi.$$

Пример. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D ydxdy$, где область D есть полукруг с центром в точке (3; 0) и с радиусом, равным 3 (рис. 7).

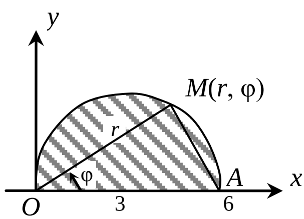


Рис. 7

Решение. Перейдём к полярной системе координат. Пусть полюс совпадает с началом координат, а полярная ось совпадает с положительным направлением оси *Ox*. Чтобы найти уравнение полуокружности *AMO* в полярной системе координат, выберем на ней произвольную точку $M(r, \varphi)$ и определим зависимость между полярными координатами r и φ. Как видно, при любом выборе точки *M* угол *AMO* будет прямым. Следовательно, $r = OA\cdot\cos\varphi$ или $r = 6\cos\varphi$ (так как $OA = 6$). Таким образом, в заданной области *D* полярный радиус *r* меняется от 0 до $6\cos\varphi$, а полярный угол φ изменяется от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$.

Переходя к полярной системе координат, будем иметь

$$\iint\limits_D y\,dxdy = \iint\limits_D r\sin\varphi\, r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{6\cos\varphi} r^2 dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{6\cos\varphi} =$$

$$= 72\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin\varphi\, d\varphi = -72\left[\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 18.$$

§5. Геометрические приложения двойного интеграла

а) Вычисление площадей плоских фигур

Как известно, объём *V* тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит граница области *D*, а образующие параллельны оси *Oz*, равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области *D*, т.е. $V = \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$.

Если в области *D* подынтегральная функция равна единице, то значение интеграла численно равно площади области *D*. Следовательно, двойной интеграл можно применять для вычисления площадей плоских фигур. Если площадь области D обозначить через S, то $S=\iint\limits_D dxdy$, $S=\iint\limits_D rdrd\varphi$.

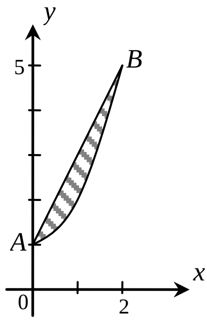


Рис. 8

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 2x + 1$ и параболой $y = x^2 + 1$ (рис. 8).

Решение. Решая совместно систему $\begin{cases} y=2x+1 \\ y=x^2+1 \end{cases}$, находим точки пересечения этих линий: $A(0, 1)$ и $B(2, 5)$.

Имеем $S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2+1}^{2x+1} dy=\int\limits_0^2 (2x+1-x^2-1)dx=\left[x^2-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2=\dfrac{4}{3}$.

б) Вычисление объёмов тел

Пример. Вычислить объём тела, ограниченного параболоидом $z=3x^2+y^2$, плоскостями $x = 1$ и $y = 2$ и координатными плоскостями (рис. 9).

Решение. Объём V вычисляется с помощью двойного интеграла по формуле $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

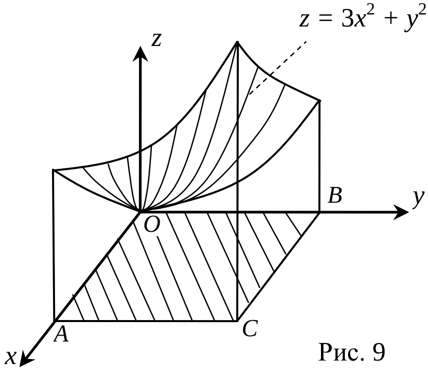


Рис. 9

В данном случае область D – основание тела – есть прямоугольник ***OACB*. По условию область *D* задана неравенствами** $0 \le x \le 1$**,** $0 \le y \le 2$**.**

Следовательно, $V = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \left(3x^2 + y^2\right) dy = \int\limits_0^1 dx \left[3x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^2 =$

$$= \int\limits_0^1 \left(6x^2 + \frac{8}{3}\right) dx = \left[2x^3 + \frac{8}{3}x\right]_0^1 = \frac{14}{3} \text{ куб.ед.}$$

в) Вычисление площади поверхности

Пусть поверхность, заданная уравнением $z = f(x, y)$, проецируется на плоскость *xOy* в область *D*. В этом случае площадь *S* этой поверхности вычисляется по формуле $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$.

Пример. Вычислить площадь части плоскости $x + y + z = 4$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ (рис. 10).

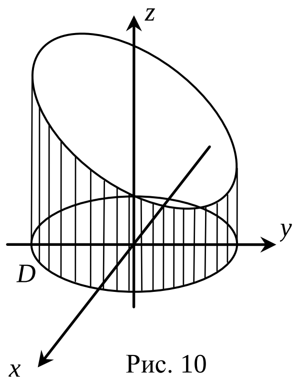


Рис. 10

Решение. Область интегрирования D есть круг радиуса $r = 2$. Находим частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$; $z = 4 - x - y$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -1$.

Тогда $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{3}dxdy$.

Чтобы вычислить этот интеграл, введём полярные координаты. Область D определяется: $r = 2$; $0 \le \varphi \le 2\pi$. Следовательно,

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{3}rdr = \sqrt{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = 2\sqrt{3}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = 4\pi\sqrt{3}.$$

§6. Приложения двойных интегралов к задачам механики

Пусть дана материальная пластинка, которая расположена в плоскости xOy и занимает площадь области D. Если на этой пластинке масса распределена с поверхностной плотностью $\rho = f(x,\, y),$ то масса этой пластинки вычисляется по формуле $M = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

Пример. Определить массу круглой пластинки радиуса R, если поверхностная плотность $\rho = f(x, y)$ в каждой точке $P(x, y)$ обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до центра круга.

Решение. По условию имеем $f(x, y) = \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где k – коэффициент пропорциональности. Тогда $M = \iint\limits_D \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$. Переходя к полярным координатам, получим

$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{k}{r} rdr = k\int_0^{2\pi} d\varphi \left[r\right]_0^R = kR\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = 2k\pi R.$$

Если $C(x_c, y_c)$ есть центр тяжести пластинки с массой M, то $x_c = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{\iint\limits_D f(x, y)xdxdy}{M}$; $y_c = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{\iint\limits_D f(x, y)ydxdy}{M}$, где M_x и M_y – статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy.

Если пластинка однородна, т.е. поверхностная плотность $\rho = f(x, y)$ равна постоянному числу, то $x_c = \dfrac{\iint\limits_D xdxdy}{S}$; $y_c = \dfrac{\iint\limits_D ydxdy}{S}$, где S – площадь области D, т.е. площадь пластинки.

Пример. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $y = \dfrac{x^2}{2}$ и прямой $y = 4 - x$ (рис. 11).

Решение. Определим площадь S заданной фигуры с помощью двойного интеграла $S = \iint\limits_D dxdy$. Так как парабола и прямая пересекаются в точках (-4; 8) и (2; 2), то область D определяется неравенствами: $-4 \le x \le 2$; $\dfrac{x^2}{2} \le y \le 4 - x$.

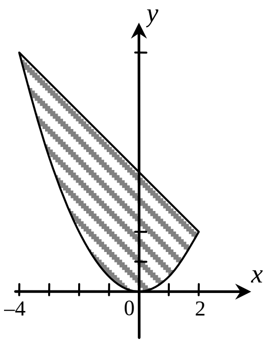


Рис. 11

$$S=\int_{-4}^{2}dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x}dy=\int_{-4}^{2}\left(4-x-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left[4x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_{-4}^{2}=$$

$$=8-2-\frac{8}{6}+16+8-\frac{64}{6}=18;\ S=18.$$

Вычислим M_y: $M_y=\iint_D xdxdy=\int_{-4}^{2}xdx\int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x}dy=\int_{-4}^{2}\left(4x-x^2-\frac{x^3}{2}\right)dx=$

$$=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}\right]_{-4}^{2}=8-\frac{8}{3}-2-32-\frac{64}{3}+32=-18.$$

Следовательно, $x_c=\frac{-18}{18}=-1$. Находим теперь M_x:

$$M_x=\iint_D ydxdy=\int_{-4}^{2}dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x}ydy=\int_{-4}^{2}dx\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x^2}{2}}^{4-x}=\int_{-4}^{2}\left(\frac{(4-x)^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)dx=$$

$$=\int_{-4}^{2}\left(8-4x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)dx=\left[8x-2x^2+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}\right]_{-4}^{2}=$$

$= 16 - 8 + \frac{8}{6} - \frac{4}{5} + 32 + 32 + \frac{64}{6} - \frac{128}{5} = 57{,}6.$ Следовательно,

$y_c = \frac{57{,}6}{18} = 3{,}2$.

Таким образом, $C(-1;\ 3{,}2)$ – центр тяжести.

§7. Понятие о тройном интеграле

Пусть в прямоугольной системе координат дано некоторое неоднородное тело T, объём которого равен V. Пусть плотность распределения массы в этом теле выражается непрерывной положительной функцией $\rho = f(x, y, z)$ – функцией координат точек тела. Определим массу M данного тела T .

Разобьём тело T произвольным образом на n частей и обозначим объёмы этих частей через Δv_1, Δv_2, Δv_3, ... Δv_n. В каждой части Δv_i выберем произвольным образом точку P_i и будем предполагать, что плотность во всех точках части Δv_i постоянна и равна плотности в точке P_i. Тогда масса M тела T будет приближённо равна сумме

$$M \approx f(P_1)\cdot\Delta v_1 + f(P_2)\cdot\Delta v_2 + \ldots f(P_n)\cdot\Delta v_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta v_i \ . \qquad \textbf{(1)}$$

Обозначим наибольшее расстояние между точками, принадлежащими части Δv_i, через d_i. За величину массы M тела T принимают тот предел, к которому стремится сумма (1) при $n \to \infty$ и одновременном стремлении к нулю наибольшего диаметра $\max d_i$.

Сумма (1) называется n-й интегральной суммой, а её предел – **тройным интегралом** от функции $f(x, y, z)$ по пространственной области V.

Таким образом, $M = \lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta v_i = \iiint\limits_V f(x, y, z)dv$.

К понятию тройного интеграла, помимо определения массы тела, приводят и другие задачи. Основные свойства тройных интегралов такие же, как и свойства двойных интегралов.

В прямоугольной системе координат элемент объёма $dv = dxdydz$ и тройной интеграл принимает вид $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$.

Если область интегрирования V определяется неравенствами $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, то тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad \textbf{(2)}$$

Область V ограничена сверху поверхностью $z = z_2(x,y)$, а снизу поверхностью $z = z_1(x,y)$ и проектируется на плоскость xOy в виде некоторой области, определяемой неравенствами $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$.

Если область V является прямоугольным параллелепипедом, грани которого параллельны координатным плоскостям и заданы уравнениями $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = m$ и $z = n$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_m^n f(x,y,z)dz. \qquad \textbf{(3)}$$

Пример. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2 y + 2z\right)dxdydz$, если область V ограничена плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 3$, $z = 0$ и $z = 2$.

Решение. Для вычисления интеграла применяем формулу (3).

$$\iiint\limits_V \left(x^2 y + 2z\right)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^3 dy \int\limits_0^2 \left(x^2 y + 2z\right)dz.$$

Вычисляем внутренний интеграл, считая при этом x и y постоянными.

$\int\limits_0^2 \left(x^2 y + 2z\right) dz = \left[x^2 yz + z^2\right]_0^2 = 2x^2 y + 4$. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^3 dy \int\limits_0^2 \left(x^2 y + 2z\right) dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^3 \left(2x^2 y + 4\right) dy = \int\limits_0^1 dx \left[x^2 y^2 + 4y\right]_{-1}^3 =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(9x^2 + 12 - x^2 + 4\right) dx = \int\limits_0^1 \left(8x^2 + 16\right) dx = \left[\frac{8x^3}{3} + 16x\right]_0^1 = \frac{56}{3}.$$

§8. Вычисление объёма тела с помощью тройного интеграла

Тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz$ выражает массу неоднородного тела, объём которого равен V и плотность которого $\rho = f(x, y, z)$. Если плотность $\rho = 1$, то тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz$ будет выражать собой объём области V.

Таким образом, $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

Пример. Найти объём тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2 + 2$ и плоскостями $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$ (рис. 12).

Решение. По условию область V задана неравенствами: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2 - x$, $1 \le z \le x^2 + y^2 + 2$.

Следовательно,

$$V = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_1^{x^2+y^2+2} dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \left[z\right]_1^{x^2+y^2+2} = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} \left(x^2 + y^2 + 1\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y\right]_0^{2-x} = \int\limits_0^2 \left[x^2 (2 - x) + \frac{(2-x)^3}{3} + 2 - x\right] dx =$$

$$= \int_0^2 \left(2x^2 - x^3 + 2 - x\right) dx + \frac{1}{3}\int_0^2 \left(2-x\right)^3 dx =$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}\left(2-x\right)^4 \right]_0^2 = \frac{14}{3}.$$

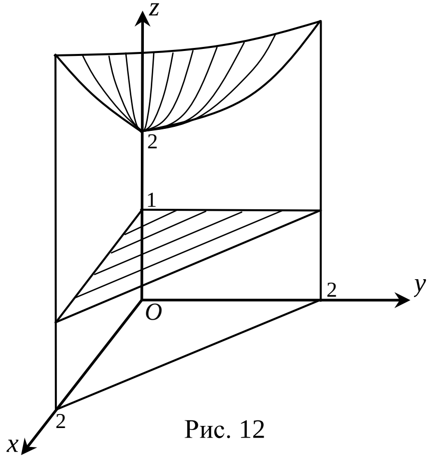


Рис. 12

Пример. Найти объём тела, ограниченного параболоидом

$z = 4 - \dfrac{x^2+y^2}{2}$ и конусом $z = \sqrt{x^2+y^2}$ (рис.13).

Решение. Исключая из заданных уравнений *z*, получим уравнение области *D*, которая является проекцией данного тела на плоскость *xOy*.

$4 - \dfrac{x^2+y^2}{2} = \sqrt{x^2+y^2}$, откуда $x^2+y^2=4$. Таким образом, область *D* есть круг, радиус которого равен 2.

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{4-\frac{x^2+y^2}{2}} dz = = \iint\limits_D \left(4 - \frac{x^2+y^2}{2} - \sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy.$$

Чтобы вычислить полученный двойной интеграл, перейдём к полярным координатам; так как область *D* определяется неравенствами

$0 \le \varphi \le 2\pi$ и $0 \le r \le 2$, то имеем

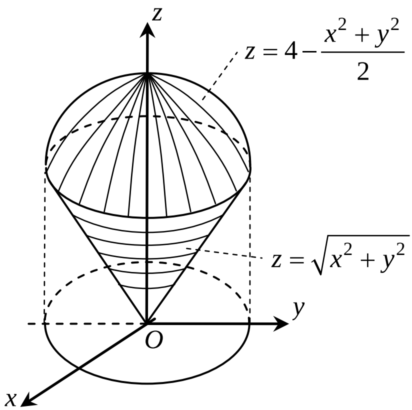


Рис. 13

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(4 - \frac{r^2}{2} - r\right) r dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(4r - \frac{r^3}{2} - r^2\right) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[2r^2 - \frac{r^4}{8} - \frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{10}{3}[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{20}{3}\pi .$$

Глава 4. Криволинейный интеграл

§1. Задача о работе переменной силы на криволинейном пути

Пусть материальная точка $M(x, y)$ под действием переменной силы $\overline{F}$ движется в некоторой области D плоскости xOy по кривой L от точки A к точке B (рис. 14). Пусть сила $\overline{F}$, величина и направление которой зависят только от положения точки $M(x, y)$, задана вектором $\overline{F} = P(x, y)\overline{i} + Q(x, y)\overline{j}$, где $P(x, y)$ есть проекция вектора $\overline{F}$ на ось Ox, а $Q(x, y)$ – проекция вектора $\overline{F}$ на ось Oy. Определим работу A, которую производит сила $\overline{F}$ при перемещении точки M по кривой L от точки A к точке B.

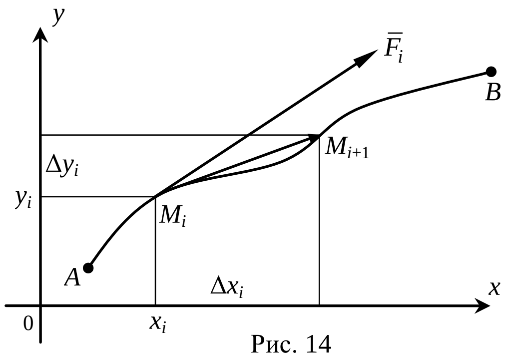


Рис. 14

Разобьём кривую AB на n частей точками: $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, ..., $M_i(x_i, y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$, ..., $M_n(x_n, y_n)$, где $M_0 = A$ и $M_n = B$.

Обозначим через Δx_i и Δy_i приращения координат x_i и y_i при перемещении точки M_i к точке M_{i+1} .

Известно, что если материальная точка движется прямолинейно под действием постоянной силы, то работа, произведённая этой силой, равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Поэтому скалярное произведение $\overline{F_i} \cdot \overline{M_i M_{i+1}}$ можно рассматривать как приближённое выражение работы силы $\overline{F}$ вдоль дуги $M_i M_{i+1}$.

Так как в точке M_i вектор силы $\overline{F_i} = P(x_i, y_i)\overline{i} + Q(x_i, y_i)\overline{j}$, а $\overline{M_i M_{i+1}} = \Delta x_i \overline{i} + \Delta y_i \overline{j}$, то скалярное произведение

$\overline{F_i} \cdot \overline{M_i M_{i+1}} = P(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i$.

Приближённое значение работы A силы $\overline{F}$ будет равно сумме

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i \,. \qquad \textbf{(1)}$$

Переходя к пределу при условии, что $\Delta x_i \to 0$ и $\Delta y_i \to 0$, получим точное выражение работы A.

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i \,. \qquad \textbf{(2)}$$

Предел правой части (2) (независимо от его физического смысла) называют ***<u>криволинейным интегралом</u>*** по координатам и обозначают так:

$$\int\limits_{\cup AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \,.$$

Если кривая L пространственная и сила $\overline{F}$ выражена вектором $\overline{F} = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$, то задача привела бы к криволинейному интегралу вида $\int\limits_{\cup AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$.

§2. Криволинейный интеграл по координатам, его простейшие свойства

Пусть в области D плоскости xOy заданы кривая AB и непрерывные функции двух переменных $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Разобьём дугу AB на n частей точками $M_0 = A$, M_1, ..., M_i, M_{i+1}, ..., $M_n = B$. Пусть $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Между точками M_i и M_{i+1} выберем произвольную точку $N_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$, вычислим значения функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в этой точке и составим следующую сумму: $\sum_{i=1}^{n} P(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\Delta x_i + Q(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\Delta y_i$. **(1)**

Сумма (1) называется n-й интегральной суммой, а её предел при условии, что $\Delta x_i \to 0$ и $\Delta y_i \to 0$, называется криволинейным интегралом по дуге $\cup AB$.

$$\int_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\Delta x_i + Q(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\Delta y_i.$$

Основные свойства криволинейного интеграла по координатам:

Свойство 1. Если в криволинейном интеграле изменить направление пути интегрирования, то интеграл изменит свой знак, т.е.

$$\int_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{\cup BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Свойство 2. Если в криволинейном интеграле контур интегрирования разбить на части, то интеграл по всему контуру равен сумме интегралов, взятых по каждой части в отдельности в том же направлении.

$$\int_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{\cup AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{\cup CB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Свойство 3. Криволинейный интеграл, взятый вдоль замкнутого контура *ABCDA* в определённом направлении, не зависит от начальной (исходной) точки интегрирования.

$$\int_{ABCDA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{BCDAB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

§3. Вычисление криволинейного интеграла по координатам

Вычисление криволинейного интеграла сводится к вычислению соответствующего определённого интеграла. Пусть требуется вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. **(1)**

Если контур интегрирования – линия *AB* – задана уравнением $y = f(x)$, то $dy = f'(x)dx$ и

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P\left[x, f(x)\right]dx + Q\left[x, f(x)\right] f'(x)dx =$$
$$= \int\limits_a^b \Phi(x)dx, \qquad \textbf{(2)}$$

где $\Phi(x)$ – функция одной переменной x, a и b – абсциссы точек A и B. Если контур интегрирования – линия *AB* – задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$ и $y = g(t)$, то, выразив подынтегральное выражение (1) через параметр t, получим

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P\left[\varphi(t), g(t)\right]\varphi'(t)dt + Q\left[\varphi(t), g(t)\right]g'(t)dt =$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \Phi(t)dt\ , \qquad \textbf{(3)}$$

где $\Phi(t)$ – функция параметра t, а t_1 и t_2 – значения параметра t, соответствующие крайним точкам A и B.

Пример. Вычислить значение криволинейного интеграла $\int\limits_L \left(x + y^2\right)dx + 2xydy$ между точками $A(0, 0)$ и $B(2, 4)$ контура L, если контуром L служит парабола $y = x^2$.

Решение. Применяя формулу (2), будем иметь

$$\int_L \left(x+y^2\right)dx+2xydy=\int_L \left(x+x^4\right)dx+2x\cdot x^2\cdot 2xdx=$$

$$=\int_0^2 \left(x+5x^4\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+x^5\right]_0^2=34\,.$$

§4. Формула Грина

Если C – граница области D и функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области D (включая границу C), то справедлива **формула Грина**

$$\oint_C Pdx+Qdy=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

причём обход контура C выбирается так, чтобы область D оставалась слева.

Пример. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_C -x^2ydx+xy^2dy,$ где C – окружность $x^2+y^2=R^2,$ пробегаемая против хода часовой стрелки.

Решение. Здесь $P(x,y)=-x^2y,\ \ Q(x,y)=xy^2.$ Тогда

$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=x^2+y^2.$ Следовательно,

$$I=\oint_C -x^2ydx+xy^2dy=\iint_D (x^2+y^2)dxdy.$$

Введём полярные координаты: $x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi;$ значит $I=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^R \rho^3 d\varphi d\rho=\frac{1}{4}R^4\cdot\int\limits_0^{2\pi} d\varphi=\frac{\pi R^4}{2}.$

Глава 5. Поверхностный интеграл

§1. Основные понятия и определения

Пусть $F(x, y, z)$ – непрерывная функция и $z = f(x, y)$ – гладкая поверхность *S*, где $f(x, y)$ задана в некоторой области *D* плоскости *xOy*.

Поверхностным интегралом первого рода называется предел интегральной суммы, при условии что $\max d_k \to 0$:

$$\lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k = \iint_S F(x, y, z)dS,$$

где ΔS_k – площадь *k*-го элемента поверхности *S*, точка (ξ_k, η_k, ζ_k) принадлежит этому элементу, d_k – диаметр этого элемента, $F(x, y, z)$ определена в каждой точке поверхности *S*.

Значение этого интеграла не зависит от выбора стороны поверхности *S*, по которой производится интегрирование.

Если проекция *D* поверхности *S* на плоскость *xOy* однозначна, то соответствующий поверхностный интеграл первого рода вычисляется по формуле:

$$\iint_S F(x, y, z)dS = \iint_S F[x, y, f(x, y)]\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Рассмотрим двустороннюю поверхность *S* и выберем на ней определённую сторону S^+. Функция $F(x, y, z)$ определена в точках данной поверхности. Предел интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k(x, y)$, где $\Delta S_k(x, y)$ – площадь проекции элемента ΔS_k на плоскость *xOy*, при условии $\max d_k \to 0$ называется **поверхностным интегралом второго рода**, распространённым на выбранную сторону поверхности *S*, и обозначается $I = \int_{S^+} f(x, y, z)dxdy.$

Если $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – непрерывные функции и S^+ – сторона гладкой поверхности S, характеризуемая направлением нормали $\overline{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, то соответствующий интеграл второго рода выражается так:

$$\iint_{S^+} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{S}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS.$$

При переходе на другую сторону S^- поверхности этот интеграл меняет знак на противоположный.

Если поверхность S задана уравнением в неявном виде $G(x,y,z)=0$, то направляющие косинусы нормали этой поверхности определяются по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{\dfrac{\partial G}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial G}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial G}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{\dfrac{\partial G}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial G}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial G}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\dfrac{\partial G}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial G}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial G}{\partial z}\right)^2}},$$

где знак перед радикалом должен быть согласован со стороной поверхности.

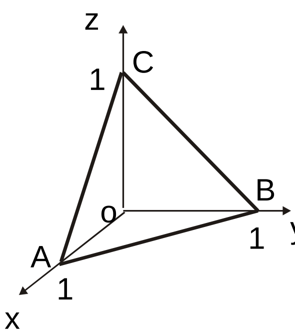
Пример. Вычислить поверхностный интеграл $I=\iint_{\sigma} xd\sigma$, где σ – полная поверхность тетраэдра, отсекаемого от первого октанта плоскостью $x+y+z=1$.

Решение. Полная поверхность σ тетраэдра складывается из его граней: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4$,где

$\sigma_1 = \Delta AOB, \sigma_2 = \Delta AOC, \sigma_3 = \Delta BOC, \sigma_4 = \Delta ABC.$.

Выпишем уравнения поверхностей σ_i и вычислим для них элементы $d\sigma$:

а) $\sigma_1 : z = 0, d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy = dxdy$;



б) $\sigma_2 : y = 0, d\sigma = \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}\,dxdz = dxdz$;

в) $\sigma_3 : x = 0, d\sigma = \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\,dydz = dydz$;

г) $\sigma_4 : x = 1 - z - y, d\sigma = \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\,dydz = \sqrt{3}dydz$.

Задав уравнения поверхностей в явном виде, мы определили тем самым плоскости проецирования их; D_i – области, на которые проецируются σ_i .

$$I = \iint\limits_{\sigma} x d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} + \iint\limits_{\sigma_2} + \iint\limits_{\sigma_3} + \iint\limits_{\sigma_4} =$$

$$= \iint\limits_{D_1} xdydx + \iint\limits_{D_2} xdxdz + \iint\limits_{D_3} 0dydz + \iint\limits_{D_4} (1 - y - z)dydz$$

По поводу последней записи напомним, что следует в подынтегральной функции $f(x, y, z)$ независимые переменные (переменные из области D_i) оставлять без изменения, зависимую переменную заменить из явного уравнения соответствующей поверхности, а $d\sigma$ заменить выражением, полученным выше, причем $D_3 = D_4$. Находим:

$$\iint\limits_{D_1} xdxdy = \left| D_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases} \right| = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} dy = \int\limits_0^1 x(1-x)dx = ;$$

$$= (x^2/2 - x^3/3)\Big|_0^1 = 1/6$$

$\iint\limits_{D_2} xdxdz = \left| D_2 : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-z \end{cases} \right| = 1/6$, так как области D_1 и D_2 переходят одна в другую заменой "y" на "z";

$\iint\limits_{D_3} 0dydz = 0$;

$$\iint\limits_{D_4=D_3} (1-y-z)\sqrt{3}dydz = \left| D_4 : \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1-y \end{cases} \right| = \sqrt{3}\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} (1-y-z)dz =$$

$$= -(\sqrt{3}/2)\int\limits_0^1 (1-y-z)^2\Big|_{z=0}^{z=1-y} \cdot dy = (\sqrt{3}/2)\int\limits_0^1 (1-y)^2 dy = -\frac{\sqrt{3}}{6}(1-y)^3\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$I = 1/6 + 1/6 + 0 + \sqrt{3}/6 = (2+\sqrt{3})/6$.

§2. Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса. Элементы теории поля

Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности S и C – замкнутый контур, ограничивающий поверхность S, то справедлива **формула Стокса**

$$\oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] dS,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности *S*; направление нормали определяется так, чтобы со стороны нормали обход контура *C* казался происходящим против хода часовой стрелки.

Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области *T* пространства, ограниченной замкнутой гладкой поверхностью *S*, то справедлива **формула Остроградского-Гаусса**

$$\oint\!\!\oint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности *S*.

Если каждой точке *M* области *V* поставлена в соответствие скалярная $u = u(M)$ (или векторная $\overline{F} = \overline{F}(M)$) величина, то говорят, что в области *V* задано **скалярное (векторное) поле**.

В декартовой системе координат задание скалярного поля равносильно заданию одной функции трёх переменных:

$$u(M) = u(x, y, z),$$

а векторного поля – трёх функций трёх переменных:

$$\overline{F}(M) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k},$$

где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – проекции вектора $\overline{F}$ на соответствующие координатные оси.

Градиентом скалярного поля $u = u(x, y, z)$ называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}.$$

Дивергенцией векторного поля $\overline{F}(M) = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ называется скаляр $$\operatorname{div}\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Вихрем (ротором) векторного поля $\overline{F}(M) = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ называется вектор

$$\operatorname{rot}\overline{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Потоком векторного поля $\overline{F}(M)$ через поверхность S в сторону, определяемую единичным вектором нормали
$\overline{n} = \overline{i}\cos\alpha + \overline{j}\cos\beta + \overline{k}\cos\gamma$ к поверхности S, называется поверхностный интеграл

$$П = \iint\limits_S \overline{F}\,\overline{n}\,dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS,$$

где $\overline{F}\cdot\overline{n}$ – скалярное произведение вектора поля и единичного вектора выбранного направления нормали.

Линейным интегралом от вектора $\overline{F}$ по ориентированной кривой K называется криволинейный интеграл

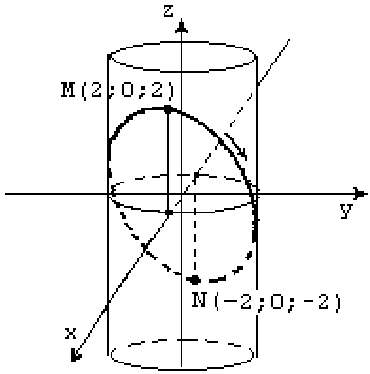
$$\int\limits_K \overline{F}d\overline{r} = \int\limits_K Pdx + Qdy + Rdz,$$

представляющий собой **работу** векторного поля вдоль кривой K. Если контур C – замкнутый, то линейный интеграл

$$Ц = \oint\limits_C \overline{F}\,d\overline{r} = \oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz$$

называется **циркуляцией** векторного поля $\overline{F}(M)$ вдоль контура C.

Пример. Вычислить работу силы $\overline{F} = \left\{xy - y^2;\ \frac{1}{2}xy;\ -xy\right\}$ при перемещении единичной массы вдоль кривой γ□□ линии пересечения двух поверхностей: $x^2 + y^2 = 4$; $2x + y - 2z = 0$ от точки $M(2;0;2)$ до точки $N(-2;0;-2)$.



Решение. Работа силы по перемещению материальной точки единичной массы есть линейный интеграл вдоль дуги γ от точки M до точки N

$$A = \int\limits_{MN} \bar{F}\, d\bar{r} = \int\limits_{MN} F_x dx + F_y dy + F_z dz \,.$$

Последний интеграл есть криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой γ. Его вычисление сводится к вычислению определенного интеграла, для чего кривую γ надо представить в параметрической форме (условием задачи кривая γ задана в виде линии пересечения поверхности кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ с плоскостью $2x + y - 2z = 0$, см. рис.). Параметризацию кривой удобно провести следующим образом: зададим $x = 2\cos t$; тогда из уравнения цилиндра найдем, что $y = 2\sin t$ и из уравнения плоскости, что $z = 2\cos t + \sin t$. Итак, γ: $x = 2\cos t$; $y = 2\sin t$; $z = 2\cos t + \sin t$.

Найдем значения параметра t, соответствующие точкам M и N:

$2\cos t_M = 2$, откуда $t_M = 0$;

$2\cos t_N = -2$, откуда $t_N = \pi$.

Для работы получим $A = \int\limits_{MN} (xy - y^2)dx + \frac{1}{2}xydy - xydz =$

$$= \int\limits_0^{\pi} \Big[(4\sin t \cdot \cos t - 4\sin^2 t)(-2\sin t) + 2\cos t \cdot \sin t \cdot 2\cos t -$$

$$-4\sin t \cdot \cos t(-2\sin t + \cos t) \Big] dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} (-8\sin^2 t \cdot \cos t + 8\sin^3 t + 4\sin t \cdot \cos^2 t + 8\sin^2 t \cdot \cos t -$$

$$4\sin t \cdot \cos^2 t)dt =$$

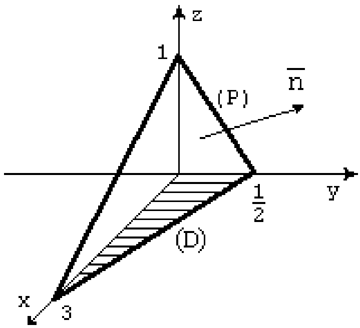
$$= 8\int\limits_0^{\pi} \sin^3 t dt = -8\int\limits_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) d\cos t = -8\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$-8(-2 + \frac{2}{3}) = \frac{32}{3}.$$

Ответ. Работа равна $32/3$.

Пример. Найти поток векторного поля $\overline{a} = 7\pi x \cdot \overline{i} + (4y+1) \cdot \overline{j} + 2\pi z \cdot \overline{k}$ через часть плоскости (P): $\frac{x}{3} + 2y + z = 1$, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

Решение. Запишем уравнение плоскости (P) в отрезках: $\frac{x}{3} + \frac{y}{1/2} + \frac{z}{1} = 1$ и изобразим ее на чертеже (см. рис.). Найдём нормальный вектор $\overline{n}$ к поверхности (напомним, что его координаты вычисляются как частные производные от функции $F \equiv \frac{x}{3} + 2y + z - 1$): $\overline{n} = \{1/3;\ \ 2;\ \ 1\}$.



Поток векторного поля через поверхность (P) определяется, например, через поверхностный интеграл первого рода:

$$\varPi = \iint\limits_{(P)} a_n \cdot dS \ ,$$

где $a_n = (\overline{a}, \overline{n}_0)$ □ проекция вектора поля $\overline{a}$ на нормаль к поверхности. Одной из формул для вычисления поверхностного интеграла является двойной интеграл по области D, в которую проектируется поверхность (P) на плоскость xOy, при этом переменная z убирается с помощью уравнения поверхности.

В нашем случае (D): $0 \le x \le 3$; $0 \le y \le \frac{1}{2} - \frac{x}{6}$; последнее выражение получается из уравнения плоскости (P) при $z = 0$.

$$\varPi = \iint\limits_{(P)} (\overline{a}, \overline{n}_0) ds = \iint\limits_{(P)} (\overline{a}, \overline{n}) \frac{ds}{|\overline{n}|} = \left[ds = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \frac{|\overline{n}|\, dxdy}{|n_z|} \right] = \iint\limits_{(D)} (\overline{a}, \overline{n}) \frac{dxdy}{|n_z|},$$

здесь n_z –третья координата вектора нормали к поверхности.
Итак,

$$\varPi = +\iint\limits_{(D)} (\overline{a}, \overline{n}) \frac{dxdy}{n_z};$$

знак “+” перед двойным интегралом выбран потому, что $n_z > 0$ ($\overline{n}$ образует острый угол с осью Oz).

Вычислим поток, сводя двойной интеграл к повторному:

$$\Pi=\int_0^3 dx\int_0^{1/2-x/6}\left[\frac{7}{3}\pi x+8y+2+2\pi\left(1-\frac{x}{3}-2y\right)\right]dy=\int_0^3 dx\int_0^{1/2-x/6}\left(\frac{5\pi x}{3}+8y-\right.$$

$$\left.-4\pi y+2+2\pi\right)dy=\int_0^3 dx\left[\left(\frac{5\pi x}{3}+2+2\pi\right)y+\left(4-2\pi\right)y^2\right]_0^{1/2-x/6}=\int_0^3\left[\left(\frac{5\pi}{6}-1\right)x+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{9}-\frac{\pi}{3}\right)x^2+\left(2+\frac{\pi}{2}\right)\right]dx=\left[\left(\frac{5\pi}{6}-1\right)\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{9}-\frac{\pi}{3}\right)\frac{x^3}{3}+\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x\right]_0^3=$$

$$=\int_0^3\left[\left(\frac{5\pi}{6}-1\right)x+\left(\frac{1}{9}-\frac{\pi}{3}\right)x^2+\left(2+\frac{\pi}{2}\right)\right]dx=\left[\left(\frac{5\pi}{6}-1\right)\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{9}-\frac{\pi}{3}\right)\frac{x^3}{3}+\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x\right]_0^3=$$

$$=\frac{15\pi}{4}-\frac{9}{2}+1-3\pi+6+\frac{6\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}+\frac{5}{2}.$$

Ответ. Поток векторного поля через часть плоскости равен $\frac{9\pi}{4}+\frac{5}{2}$.

Пример. Тело (T) лежит в первом октанте и ограничено плоскостями координат и поверхностью $(Q):(x+3y)^2=9-z$. Вычислить:

а) поток поля вектора $\overline{a}=\{y^2;-x^2;z\}$ через поверхность, ограничивающую тело (T) в сторону внешней нормали (воспользоваться формулой Остроградского);

б) циркуляцию поля вектора $\overline{a}=\{y^2;-x^2;z\}$ вдоль линии пересечения поверхности (Q) с плоскостями координат в направлении от точки пересечения (Q) с осью Ox к точке пересечения (Q) с осью Oy (воспользоваться формулой Стокса).

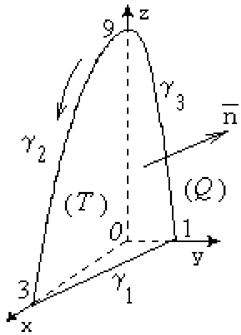
Решение.

а) Изобразим (схематично) тело (T) и линии пересечения поверхности (Q) с плоскостями координат (речь идет только о части поверхности (Q), расположенной в первом октанте), (см. рис).

1. Линия пересечения поверхности (Q) с плоскостью xOy

$$\gamma_1: \quad z=0; \quad (x+3y)^2=9,$$

откуда следует, что $x+3y=\pm 3$ – пара параллельных прямых. В первом октанте поверхность (Q) пересекается с плоскостью $z=0$ по прямой $x+3y=3$ (см. рис).



2. Линия пересечения поверхности (Q) с плоскостью xOz

$$\gamma_2: \quad y=0; \quad x^2=9-z,$$

пересечение происходит по параболе.

3. Полагая далее $x=0$, найдем линию пересечения поверхности (Q) с плоскостью yOz

$$\gamma_3: \quad x=0; \quad 9y^2=9-z,$$

пересечение происходит по параболе. Нормаль к поверхности (Q) образует острые углы с осями координат (для замкнутой поверхности положительным считается направление нормали изнутри тела наружу). Обозначим замкнутую поверхность, ограничивающую тело (T) (т.е. поверхность (Q) и координатные плоскости) через (S). Для нахождения потока поля $\overline{a}=\{y^2;-x^2;z\}$ через замкнутую поверхность (S) воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского. Приведем формулировку этой теоремы: поток поля $\overline{a}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности (S) равен тройному интегралу от дивергенции поля $\overline{a}$, взятому по области, ограниченной поверхностью (S):

$$\Pi = \oiint\limits_{(S)} a_n dS = \iiint\limits_{(T)} \operatorname{div} \overline{a} dv .$$

Найдем $\operatorname{div}\overline{a}$, которая в декартовой системе координат вычисляется по формуле

$$\operatorname{div}\overline{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} .$$

Для нашего поля $\overline{a}$ имеем $\operatorname{div}\overline{a} = 1$ и для потока получим $\Pi = \iiint\limits_{(T)} dv$,

т.е. поток численно равен объему данного тела.

Тройной интеграл распишем как повторный и вычислим

$$\Pi = \int_0^1 dy \int_0^{3-3y} dx \int_0^{9-(x+3y)^2} dz = \int_0^1 dy \int_0^{3-3y} \left[9 - (x+3y)^2 \right] dx =$$

$$\int_0^1 \left[9x - \frac{(x+3y)^3}{3} \right]_0^{3-3y} dy = 9\int_0^1 (y^3 - 3y + 2) dy = 9\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) = \frac{27}{4} .$$

б) Вычислим циркуляцию поля вектора $\overline{a} = \{y^2; -x^2; z\}$ вдоль $L = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ – линии пересечения поверхности (Q) с плоскостями координат в направлении от точки пересечения (Q) с осью Ox к точке пересечения поверхности с осью Oy . Решение необходимо провести с использованием формулы Стокса

$$\oint\limits_{(L)} (\overline{a}, d\overline{r}) = \iint\limits_{(Q)} (\operatorname{rot} \ \overline{a})_n dS ,$$

которая утверждает, что циркуляция векторного поля $\overline{a}$ по замкнутому контуру (L) равна потоку вихрей поля через поверхность, натянутую на контур.

Вычислим ротор заданного поля

$$\operatorname{rot}\bar{a}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & -x^2 & z\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial(-x^2)}{\partial z}\right)-\bar{j}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial y^2}{\partial z}\right)+\bar{k}\left(\frac{\partial(-x^2)}{\partial x}-\frac{\partial y^2}{\partial y}\right)=\{0;0;-2(x+y)\}.$$

Для вычисления потока вихря можно исходить из поверхностного интеграла первого либо второго рода. Приведем оба решения.

1. Будем исходить из представления потока вихря в виде поверхностного интеграла первого рода

$$\Pi(\operatorname{rot}\bar{a})=\iint\limits_{(Q)}(\operatorname{rot}\bar{a})_n\,dS\,.$$

Этот интеграл, как известно, сводится к двойному:

$$\iint\limits_{(Q)}(\operatorname{rot}\bar{a})_n\,dS=+\iint\limits_{(D_1)}(\operatorname{rot}\bar{a},\bar{n})\frac{dxdy}{n_z}\,,$$

причем в двойном интеграле z необходимо заменить на $z=9-(x+3y)^2$; знак “+” перед двойным интегралом потому, что $\bar{n}$ образует острый угол с осью Oz. Нормаль к поверхности имеет следующие проекции:

$$\bar{n}=\{2(x+3y);\;\;6(x+3y);\;\;1\}\,.$$

Скалярное произведение $(\operatorname{rot}\bar{a},\bar{n})=-2(x+y)$. Таким образом, для потока вихря получим

$$\Pi(\operatorname{rot}\bar{a})=-\iint\limits_{D_1}2(x+y)dxdy=-\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{3-3y}(x+y)dx=-\int\limits_0^1(x+y)^2\Big|_0^{3(1-y)}=$$

$$=-\int\limits_0^1(9-12y+3y^2)dy=-9y+6y^2-y^3\Big|_0^1=-4\,.$$

2. Исходя из выражения для потока через поверхностные интегралы второго рода, представим поток вихря в следующем виде:

$$\Pi(\mathrm{rot}\,\overline{a}) = \iint\limits_{(Q)} (\mathrm{rot}\,\overline{a})_x\,dydz + (\mathrm{rot}\,\overline{a})_y\,dxdz + (\mathrm{rot}\,\overline{a})_z\,dxdy = -\iint\limits_{(Q)} 2(x+y)dxdy$$

.

В этом выражении поверхностный интеграл по $dxdy$ сводится к двойному по области (D_1):

$$\Pi(\mathrm{rot}\,\overline{a}) = -\iint\limits_{(D)_1} 2(x+y)dxdy\,.$$

Сведем его к повторному, как и в случае I, но изменим внешнюю переменную интегрирования (изменим порядок интегрирования):

$$\Pi(\mathrm{rot}\,\overline{a}) = -2\int_0^3 dx \int_0^{1-x/3} (x+y)dy = \int_0^3 \left[x^2 - \left(1+\frac{2x}{3}\right)^2 \right] dx = -4\,.$$

Замечание. Циркуляцию поля можно вычислить как сумму линейных интегралов Λ_1, Λ_2, Λ_3 по контурам γ_1, γ_2 и γ_3

$$Ц = \oint\limits_L (\overline{a}, d\overline{r}) = \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{\gamma_i} (\overline{a}, d\overline{r}) = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3.$$

I. Вычислим линейный интеграл Λ_1 по контуру γ_1: $z=0$; $x+3y=3$:

$$\Lambda_1 = \int\limits_{\gamma_1} y^2dx - x^2dy + zdz = \left| \begin{matrix} y = 1 - x/3 \\ dy = -dx/3 \end{matrix} \right| = \int_3^0 \left(1 - \frac{x}{3}\right)^2 dx + \frac{1}{3}\int_3^0 x^2dx = -4\,.$$

2. Вычислим линейный интеграл по контурам γ_2 и γ_3. Так как в уравнениях для γ_2 и γ_3 присутствуют либо $y=0$, либо $x=0$, то

$\int\limits_{\gamma_2} y^2dx - x^2dy = \int\limits_{\gamma_3} y^2dx - x^2dy = 0;$ тогда для контура γ_2 имеем

$\Lambda_2 = \int_9^0 zdz$, а для контура γ_3 $\Lambda_3 = \int_0^9 zdz$ и, следовательно, их сумма $\Lambda_2 + \Lambda_3$ обращается в нуль. Таким образом, окончательно, $Ц = -4$, что совпадает с ранее вычисленным значением с помощью поверхностных интегралов.

Ответ. $\Pi = 27/4$, $Ц = -4$.

Индивидуальное задание №1

Задача 1. Найти неопределённый интеграл, ответ проверить дифференцированием.

1. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$

2. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^8}}$

3. $\int \frac{2^{\operatorname{arctg} 2x} dx}{1+4x^2}$

4. $\int \frac{\ln^3 x+2}{x \cdot \ln x} dx$

5. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x+2}}$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$

7. $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x} dx$

8. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{3+2\cos x}} dx$

9. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+4}} dx$

10. $\int \frac{\sin 2x}{3\sin^2 x+4} dx$

11. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4} dx$

12. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$

13. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$

14. $\int \frac{x+\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$

15. $\int \frac{x^2}{\sqrt{5+x^6}} dx$

16. $\int \frac{\cos x \sin 2x}{3\cos^3 x+2} dx$

17. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

18. $\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} dx$

19. $\int e^{3\sin^2 x} \sin 2x dx$

20. $\int \frac{1-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

21. $\int \frac{\sin x}{(1-3\cos x)^3} dx$

22. $\int \frac{x^5}{x^{12}-1} dx$

23. $\int \frac{2x^2-x^5}{1+x^6} dx$

24. $\int \frac{x^3}{1+x^8} dx$

25. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{3+2\sin x}}dx$

26. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

27. $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$

28. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$

29. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{20}}dx$

30. $\int x^3(1-5x^2)^{10}dx$

Задача 2. Найти неопределённый интеграл, ответ проверить дифференцированием.

1. $\int x\cdot 3^{\frac{x}{2}}dx$

2. $\int x^2\cdot e^{3x}dx$

3. $\int x^2\cdot\sin 2xdx$

4. $\int \sqrt{x}\cdot\ln xdx$

5. $\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx$

6. $\int x\cdot\ln(x^2+1)dx$

7. $\int e^{-x}\sin 2xdx$

8. $\int x\cdot\ln^2 xdx$

9. $\int (x^2+1)\cdot 3^x dx$

10. $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$

11. $\int \frac{x^2\operatorname{arctg}x}{x^2+1}dx$

12. $\int x^2\ln xdx$

13. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$

14. $\int x\cdot\ln xdx$

15. $\int \arcsin xdx$

16. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

17. $\int x\cdot\ln(x-1)dx$

18. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

19. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}dx$

20. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$

21. $\int \frac{e^x-1}{3e^x+1}dx$

22. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}dx$

23. $\int x^2 \sin x dx$

24. $\int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

25. $\int \frac{arctgx}{x^2} dx$

26. $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$

27. $\int x^3 e^{-x^2} dx$

28. $\int \mathrm{arctg} \sqrt{x} dx$

29. $\int x \, \mathrm{arctg}^2 x dx$

30. $\int \sin x \ln \mathrm{tg} x dx$

Задача 3. Найти неопределённый интеграл, ответ проверить дифференцированием.

1. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{2x^2-5x+1}}$

2. $\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}}$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

5. $\int \frac{x+4}{\sqrt{2x^2-3x+5}} dx$

6. $\int \frac{4x+7}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$

7. $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx$

8. $\int \frac{2x-5}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$

9. $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx$

10. $\int \frac{3x-9}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx$

11. $\int \frac{x+5}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$

12. $\int \frac{x-3}{\sqrt{3+66x-11x^2}} dx$

13. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$

14. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}} dx$

15. $\int \frac{x-7}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx$

16. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}} dx$

17. $\int \frac{x}{\sqrt{2+3x-2x^2}} dx$

18. $\int \frac{x+1}{\sqrt{15-4x-4x^2}} dx$

19. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$

20. $\int \frac{x+7}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$

21. $\int \frac{4x+10}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

22. $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

23. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

24. $\int \frac{3x+6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$

25. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

26. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$

27. $\int \frac{5x+6}{\sqrt{x^2+2x-8}}dx$

28. $\int \frac{7x-10}{\sqrt{9x^2-6x+26}}dx$

29. $\int \frac{2-5x}{\sqrt{17-4x-4x^2}}dx$

30. $\int \frac{5-6x}{\sqrt{x^2+2x+37}}dx$

Задача 4. Найти неопределённый интеграл, ответ проверить дифференцированием.

1. $\int \frac{x^3-2x^2+x+2}{x^3-2x^2}dx$

2. $\int \frac{x^5-x^4+3x-2}{x^4-x^3}dx$

3. $\int \frac{x^3-4x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

4. $\int \frac{x^4-3x^2+3x-1}{x^3-3x-2}dx$

5. $\int \frac{x^3+3x^2+8x+12}{\left(x^2+4x+4\right)\left(x-1\right)}dx$

6. $\int \frac{x^4-3x^3+9x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$

7. $\int \frac{x^3+x^2-x+2}{x^2\left(x-1\right)}dx$

8. $\int \frac{2x^4+8x^3+x^2+x-20}{x^3\left(x+5\right)}dx$

9. $\int \frac{x^3-2x^2-12x-7}{x^3-3x-2}dx$

10. $\int \frac{x^4+2x^3+9x^2+5x+2}{x^2\left(x+1\right)}dx$

11. $\int \frac{2x^3-2x^2-16x+32}{x^3-2x^2-4x+8}dx$

12. $\int \frac{x^4+2x^3-2x+x^2+1}{x^3+x^2-x-1}dx$

13. $\int \frac{x^4-2x^3+2x}{x^3-x^2-x+1}dx$

14. $\int \frac{x^3-5x^2+16x+2}{\left(x^2-6x+9\right)\left(x+1\right)}dx$

15. $\int \frac{2x^3+4x^2-8x+3}{x\left(x^2-2x+1\right)}dx$

16. $\int \frac{x^3+3x^2+x+2}{\left(x+2\right)\left(x^2+x-2\right)}dx$

17. $\int \frac{2x^4+9x^3+4x^2-6x-8}{x^3+4x^2}dx$

18. $\int \frac{x^3+2x^2-4x+3}{x^3-2x^2+x}dx$

19. $\int \frac{6x^4-13x^3-24x^2+47x-10}{(x^2-4)\left(x-2\right)}dx$

20. $\int \frac{2x^3-6x^2+22x-20}{x^3-4x^2+4x}dx$

21. $\int \frac{x^4+10x^3+26x^2+22x+17}{\left(x^2+8x+7\right)\left(x+1\right)}dx$

22. $\int \frac{x^3-9x+13}{\left(x^2-3x+2\right)\left(x-1\right)}dx$

23. $\int \frac{2x^4-4x^3-4x^2-12x-9}{x^3-3x^2}dx$

24. $\int \frac{2x^3+9x^2+12x+8}{x^3+4x^2+4x}dx$

25. $\int \frac{x^4-x^3-2x^2+8x-2}{x^3-2x^2+x}dx$

26. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$

27. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$

28. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

29. $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$

30. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$

Задача 5. Найти неопределённый интеграл, ответ проверить дифференцированием.

1. $\int \frac{2x+1}{x^3-1}dx$.

2. $\int \frac{3xdx}{x^3+x^2+2x+2}$.

3. $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}dx$

4. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$

5. $\int \frac{dx}{x^3+8}$

6. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}dx$

7. $\int \frac{x-2}{x^3+4x}dx$

8. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$

9. $\int \frac{dx}{x^3-8}$

10. $\int \frac{dx}{x^4-1}$

11. $\int \frac{x^3-2x+5}{x^4-1}dx$

12. $\int \frac{3x^2+11x+8}{(x+2)\left(x^2+2x+2\right)}dx$

13. $\int \frac{x^2-8x+13}{(x-1)\left(x^2-4x+5\right)}dx$

14. $\int \frac{4x^2+10x+10}{x\left(x^2+2x+5\right)}dx$

15. $\int \frac{x^2-8x+21}{(x-3)\left(x^2-8x+17\right)}dx$

16. $\int \frac{x-4x^2-10}{\left(x^2-x\right)\left(x^2+2x+10\right)}dx$

17. $\int \frac{2-x^3+2x^2+3x}{\left(x^2+x\right)\left(x^2+1\right)}dx$

18. $\int \frac{13x+26}{(x-2)\left(x^2+6x+10\right)}dx$

19. $\int \frac{2x^3+3x^2+x+8}{\left(x^2+x\right)\left(x^2+4\right)}dx$

20. $\int \frac{2x^2-5x-71}{(x-1)\left(x^2+10x+26\right)}dx$

21. $\int \frac{2x^3+5x^2-8x+4}{\left(x^2-4\right)\left(x^2+2\right)}dx$

22. $\int \frac{3x^3+5x^2-4x+28}{x^4-16}dx$

23. $\int \frac{3x^3+5x+5}{x^4+2x^2}dx$

24. $\int \frac{2x-1}{x^4-1}dx$

25. $\int \frac{x-1}{4x^3+x}dx$

26. $\int \frac{2x^3+2x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}dx$

27. $\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$

28. $\int \frac{x+4}{(x^2+x+2)(x^2+21)}dx$

29. $\int \frac{2x^3+2x^2+2x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$

30. $\int \frac{3x^3+7x^2+12x+6}{(x^2+x+3)(x^2+2x+3)}dx$

Задача 6. Найти неопределённый интеграл, ответ проверить дифференцированием.

1. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\cdot\sqrt{x}}$.

2. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

3. $\int \frac{\sqrt[3]{x+2}dx}{(1+\sqrt{x+2})\sqrt[6]{(x+2)^5}}$

4. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{x\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x^5}}dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x})}$

6. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[3]{x^2}}dx$

7. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x^2}}dx$

8. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[4]{x^3}}dx$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(\sqrt{x}+1)}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x})}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3})}$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

13. $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x^2})}$

14. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx$

15. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$

16. $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt[8]{x^7}}dx$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}-\sqrt{x}}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

19. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x^3}(\sqrt{x}+4)}dx$

20. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^5}(1+\sqrt[3]{x})}dx$

21. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$

22. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

23. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$

25. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}dx$

26. $\int \frac{4\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}dx$

27. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$

28. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$

29. $\int \frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}-7x-6\sqrt[4]{x^3}}dx$

30. $\int \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}dx$

Задача 7. Найти неопределённый интеграл, ответ проверить дифференцированием.

1. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$

2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}dx$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

6. $\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2}dx$

7. $\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$

8. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{4-x^2}}$

9. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}dx$

11. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

12. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$

13. $\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}dx$

14. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

15. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$

16. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}dx$

17. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$

18. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$

20. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+1}}$

21. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-1}}$

22. $\int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{x^2-1}}$

23. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}dx$

24. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$

25. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

26. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$

27. $\int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$

28. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

29. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$

30. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Задача 8. Найти неопределённый интеграл, ответ проверить дифференцированием.

1. $\int \frac{\sin^4 xdx}{\cos^2 x}$

2. $\int \sin 5x \cdot \cos 7xdx$

3. $\int \mathrm{tg}^4\, 2xdx$

4. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$

5. $\int \mathrm{ctg}^4\, 3xdx$

6. $\int \sin^5 xdx$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}$

8. $\int \cos 4x \cdot \cos 7xdx$

9. $\int \frac{dx}{\cos^4 3x}$

10. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$

11. $\int \mathrm{ctg}^3\, 5xdx$

12. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 xdx$

13. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$

14. $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 xdx$

15. $\int \frac{\mathrm{tg}^4 x}{\cos^4 x}dx$

16. $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 xdx$

17. $\int \left(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x\right)dx$

18. $\int \mathrm{tg}^5\, 3xdx$

19. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}$

20. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx$

21. $\int \cos^4 x dx$

22. $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^8 x}$

23. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

24. $\int \frac{\mathrm{tg}^2 x}{\cos^4 x} dx$

25. $\int \sin 3x \cdot \cos 10x dx$

26. $\int \sin^4 3x \cdot \cos^4 3x dx$

27. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^6 x dx$

28. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x}$

29. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$

30. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

Задача 9. Найти неопределённый интеграл, ответ проверить дифференцированием.

1. $\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x}$

2. $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$

3. $\int \frac{dx}{5 + \sin x + 3\cos x}$

4. $\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x}$

5. $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x}$

6. $\int \frac{dx}{4 + \mathrm{tg}\, x + 4\,\mathrm{ctg}\, x}$

7. $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x}$

8. $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 1}$

9. $\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$

10. $\int \frac{dx}{2 + 3\cos^2 x}$

11. $\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$

12. $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$

13. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$

14. $\int \frac{1 + \mathrm{tg}\, x}{\sin 2x} dx$

15. $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$

16. $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$

17. $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$

18. $\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$

19. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

20. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

21. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}$

22. $\int \frac{dx}{2\sin x+\sin 2x}$

23. $\int \frac{1+\cos x}{\sin^3 x}dx$

24. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$

25. $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$

26. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$

27. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$

28. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$

29. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

30. $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$

Задача 10. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

1. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+x+1}$

2. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$

3. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x dx}{x}$

4. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{2x^2+6x+5}$

5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

6. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-ax}dx$

7. $\int\limits_{0}^{\infty} x\cdot\cos x dx$

8. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^3}{x^8+1}dx$

9. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^5}{x^6+1}dx$

10. $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$

11. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x dx}{(x+1)^3}$

12. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx$

13. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$

14. $\int\limits_{1}^{\infty} x\sin x dx$

15. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{x}}dx$

16. $\int\limits_{2/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$

17. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x}{(x+1)^2}dx$

18. $\int\limits_{2/\pi}^{\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$

19. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

20. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$

21. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx$

22. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

23. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\cdot\ln x}$

24. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$

25. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx$

26. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{xdx}{x^4-x^2+1}$

27. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

28. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x\ln x dx}{(1+x^2)^2}$

29. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

30. $\int\limits_{5}^{\infty} \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}$

Задача 11. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

1. $\int\limits_{3}^{6} \frac{dx}{x^2-7x+10}$

2. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{xdx}{x^2-4}$

3. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{xdx}{x^2-4}$

4. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{x}}{\sqrt{e^{x}-1}}dx$

5. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{x}{\sin x^2}dx$

6. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \mathrm{ctg}\, x dx$

7. $\int_0^5 \frac{5}{\sqrt{25-x^2}}dx$

8. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

9. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $\int_1^5 \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

11. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

12. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $\int_0^{2a} \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{x}}dx$

14. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2+3x-10}$

15. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$

16. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$

17. $\int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2}$

18. $\int_0^1 \frac{dx}{(x-3)(x-1)}$

19. $\int_{-\pi/6}^0 \frac{\cos xdx}{\sqrt{1/2+\sin x}}$

20. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

21. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

22. $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^5}}dx$

23. $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

24. $\int_2^4 \frac{3x}{2 \cdot \sqrt[4]{x^2-4}}dx$

25. $\int_0^1 x^2 \cdot \ln xdx$

26. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

27. $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

28. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

29. $\int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x-27}}$

30. $\int_1^2 \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

Задача 12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

1. $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 7 \\ y = -2x + 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = x^2 + x - 5 \\ y = 2x + 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y = (x-2)^3 \\ y = 4x - 8 \end{cases}$

5. $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$

6. $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 2 - x \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = 2x - x^2 + 3 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} y = -x^2 + x + 3 \\ y = -x \end{cases}$

9. $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = 5x - 11 \end{cases}$

10. $\begin{cases} y = x^2 - 7x + 3 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 7 \\ y = x + 13 \end{cases}$

12. $\begin{cases} y = -x^2 + 3x + 7 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} y = 3x^2 + x - 4 \\ y = 7x + 5 \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = x^2 + 5x - 2 \\ y = 4x \end{cases}$

15. $\begin{cases} y = -x^2 + 3x + 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} y = 3x^2 - x + 2 \\ y = -4x + 8 \end{cases}$

17. $\begin{cases} y = 2x^2 - 7x + 5 \\ y = -13x + 5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 9 \\ y = -7x + 9 \end{cases}$

19. $\begin{cases} y = x^2 + 3x - 4 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} y = x^2 - 7x + 2 \\ y = -5x + 10 \end{cases}$

21. $\begin{cases} y = x^2 + 6x - 5 \\ y = 8x - 2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} y = x^2 + x - 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} y = -x^2 + 2x - 3 \\ y = 4x - 6 \end{cases}$

24. $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 7 \\ y = -x + 7 \end{cases}$

25. $\begin{cases} y = 4x^2 + 3x \\ y = -9x \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = 4 - (y-1)^2 \\ x = y^2 - 4y + 3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} y=(x-1)^2 \\ y^2=x-1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x=4-y^2 \\ x=y^2-2y \end{cases}$

29. $\begin{cases} x=(y-2)^3 \\ x=4y-8 \end{cases}$

30. $\begin{cases} y=2x-x^2+3 \\ y=x^2-4x+3 \end{cases}$

Задача 13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

1. $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t, \\ x=2, (x\ge 2). \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=2\sqrt{2}\sin t, \\ y=2, (y\ge 2). \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \\ y=4, (y\ge 4). \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \\ x=2, (x\ge 2). \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=6\sin t, \\ y=3, (y\ge 3). \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \\ y=3, (y\ge 3). \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \\ x=6\sqrt{3}, (x\ge 6\sqrt{3}). \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=6\sin t, \\ y=\sqrt{3}, (y\ge \sqrt{3}). \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \\ y=3, (y\ge 3). \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t, \\ x=2, (x\ge 2). \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t, \\ y=3\sqrt{2}\sin t, \\ y=3, (y\ge 3). \end{cases}$

12. $\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t), \\ y=9, (y\ge 9). \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \\ x = 4, (x \geq 4). \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \\ y = 4, (y \geq 4). \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \\ y = 6, (y \geq 6). \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \\ x = 3\sqrt{3}, (x \geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \\ y = 2\sqrt{3}, (y \geq 2\sqrt{3}). \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \\ y = 15, (y \geq 15). \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \\ x = 1, (x \geq 1). \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \\ y = 4, (y \geq 4). \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ y = 1, (y \geq 1). \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \\ x = 1, (x \geq 1). \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \\ y = 2, (y \geq 2). \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \\ y = 12, (y \geq 12). \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \\ x = 9\sqrt{3}, (x \geq 9\sqrt{3}). \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \\ y = 4\sqrt{3}, (y \geq 4\sqrt{3}). \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \\ y = 2, (y \geq 2). \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \\ x = 2, (x \geq 2). \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 5\sqrt{2}\sin t, \\ y = 5, (y \geq 5). \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \\ y = 6, (y \geq 6). \end{cases}$

Задача 14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

1. $\begin{cases} \rho = 4\cos 3\varphi, \\ \rho = 2, (\rho \geq 2). \end{cases}$

2. $\rho = \cos 2\varphi.$

3. $\begin{cases} \rho = \sqrt{3}\cos\varphi, \\ \rho = \sin\varphi. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \rho = 4\sin 3\varphi, \\ \rho = 2, (\rho \geq 2). \end{cases}$

5. $\begin{cases} \rho = 2\cos\varphi, \\ \rho = 2\sqrt{3}\sin\varphi. \end{cases}$

6. $\rho = \sin 3\varphi.$

7. $\begin{cases} \rho = 6\sin 3\varphi, \\ \rho = 3, (\rho \geq 3). \end{cases}$

8. $\rho = \cos 3\varphi.$

9. $\begin{cases} \rho = \cos\varphi, \\ \rho = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$

10. $\begin{cases} \rho = \sin\varphi, \\ \rho = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$

11. $\begin{cases} \rho = 6\cos 3\varphi, \\ \rho = 3, (\rho \geq 3). \end{cases}$

12. $\rho = \dfrac{1}{2} + \sin\varphi.$

13. $\begin{cases} \rho = \cos\varphi, \\ \rho = \sin\varphi. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \rho = \sqrt{2}\sin\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right), \\ \rho = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$

15. $\begin{cases} \rho = \cos\varphi, \\ \rho = \cos 2\varphi. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \rho = \sin\varphi, \\ \rho = \sin 2\varphi. \end{cases}$

17. $\rho = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi.$

18. $\rho = \dfrac{1}{2} + \cos\varphi.$

19. $\rho = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi.$

20. $\begin{cases} \rho = \dfrac{5}{2}\sin\varphi, \\ \rho = \dfrac{3}{2}\sin\varphi. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \rho = \dfrac{5}{2}\cos\varphi, \\ \rho = \dfrac{3}{2}\cos\varphi. \end{cases}$

22. $\rho = 4\cos 4\varphi.$

23. $\rho = \sin 6\varphi.$

24. $\begin{cases} \rho = 2\cos\varphi, \\ \rho = 3\cos\varphi. \end{cases}$

25. $\rho = \cos\varphi + \sin\varphi.$

26. $\rho = 2\sin 4\varphi.$

27. $\begin{cases} \rho = tg\varphi, \\ \varphi = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \rho = 1 + \sin 3\varphi, \\ \rho = 1, (\rho \geq 1). \end{cases}$

29. $\begin{cases} \rho = 2\cos 4\varphi, \\ \rho = 1, (\rho \geq 1). \end{cases}$

30. $\begin{cases} \rho = 2\sin 4\varphi, \\ \rho = 1, (\rho \geq 1). \end{cases}$

Задача 15. Вычислите длину дуги кривой.

1. $\begin{cases} y = 5(1 - \cos t), \\ x = 5(t - \sin t), \end{cases}$
$0 \leq t \leq 2\pi.$

2. $\begin{cases} y = \ln\dfrac{5}{2x}, \\ \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}. \end{cases}$

3. $\rho = 2(1 + \cos\varphi).$

4. $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}, \\ 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y = \ln(x^2 - 1), \\ 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} y = e^x + 6, \\ \ln\sqrt{8} \leq x \leq \ln\sqrt{15}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = -\ln\cos x, \\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y = 12 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \\ \dfrac{1}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \rho = 3\varphi, \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \rho = 2e^{2\varphi}, \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y = 2 + \operatorname{ch} x, \\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} y = 2(1 - \cos t), \\ x = 2(t - \sin t), \end{cases}$
$0 \le t \le 2\pi.$

13. $\begin{cases} y = 2\cos^3 t, \\ x = 2\sin^3 t, \end{cases}$
$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

14. $\begin{cases} \rho = \dfrac{5}{\varphi}, \\ \dfrac{5}{12} \le \varphi \le \dfrac{12}{5}. \end{cases}$

15. $\rho = 3(1 - \cos\varphi).$

16. $\begin{cases} \rho = e^{\frac{\varphi}{\pi}}, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \rho = \dfrac{1}{\varphi}, \\ \dfrac{3}{4} \le \varphi \le \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \rho = 2\varphi, \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

19. $\rho = 4(1 - \cos\varphi).$

20. $\begin{cases} \rho = \dfrac{1}{\varphi}, \\ \dfrac{5}{12} \le \varphi \le \dfrac{12}{5}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \rho = 2e^{\frac{\varphi}{\pi}}, \\ -\pi \le \varphi \le \pi. \end{cases}$

22. $\rho = 7(1 + \cos\varphi).$

23. $\begin{cases} \rho = 4\varphi, \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{5}{12}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} y^2 = \dfrac{4}{9}(x-1)^3, \\ 1 \le x \le 4. \end{cases}$

25. $\rho = 5(1 + \sin\varphi).$

26. $\begin{cases} y = e^x + 26, \\ \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24}. \end{cases}$

27. $\begin{cases} y = \operatorname{ch} x + 3, \\ 0 \le x \le 2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4, \\ 0 \le x \le \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} y = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 3}{4}, \\ 0 \le x \le 2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} y = e^x + e, \\ \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{15}. \end{cases}$

Задача 16. Найдите объём тела вращения плоской фигуры вокруг оси *Ox*.

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y^2 = \dfrac{3}{2}x, \\ x \ge 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = 5\sin^3 t, \\ x = 5\cos^3 t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = 3 - x^2, \\ y = x^2 + 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y^2 = \dfrac{3}{2}x, \\ x \ge 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y = 2^x, \\ y = x + 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} y = -x^2 + 5x - 6, \\ y = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - x^2 - y = 0, \\ 2x^2 - 4x + y = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y = 3\sin x, \\ y = \sin x, \end{cases}$
$0 \le x \le \pi.$

9. $\begin{cases} y^2 = x \cdot e^{-2x}, \\ 0 \le x \le +\infty. \end{cases}$

10. $\begin{cases} (y-1)^2 = x, \\ x = 1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y = 1 - x^2, \\ x + y = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} y^2 - x^2 = 4, \\ x = \pm 2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} (y-3)^2 + 3x = 0, \\ x = -3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = xe^x, \\ y = 0, \\ x = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = 3(1-\cos t), \\ y = 3(t-\sin t), \end{cases}$
$0 \le t \le 2\pi.$

17. $\begin{cases} y = 4\sin t, \\ x = 3\cos t. \end{cases}$

18. $\begin{cases} y = 3\sin^3 t, \\ x = 2\cos^3 t. \end{cases}$

19. $\begin{cases} y = 3+2\sin t, \\ x = 2\cos t. \end{cases}$

20. $\begin{cases} y = R\sin t, \\ x = R\cos t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi.$

21. $\begin{cases} y = (4-x)\sqrt{x}, \\ 0 \le x \le 4. \end{cases}$

22. $\begin{cases} y^2 - x^2 = 9, \\ x = \pm 3. \end{cases}$

23. $\begin{cases} y^2 = x^2 e^{-x}, \\ 0 \le x \le +\infty. \end{cases}$

24. $\begin{cases} y = 3\sin^3 t, \\ x = 3\cos^3 t. \end{cases}$

25. $\begin{cases} y = 4\sin t, \\ x = 3\cos t. \end{cases}$

26. $\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = -x+2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} y = x^3, \\ y = x. \end{cases}$

28. $\begin{cases} y = (x-1)^2, \\ y = 1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} y = x^3, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$

30. $\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$

Задача 17. Вычислить площадь поверхности вращения дуги вокруг оси Ox

1. $\begin{cases} y^2 = 2x, \\ 0 \le x \le \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = \sin x, \\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = chx, \\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y = 15\sin^3 t, \\ x = 15\cos^3 t, \end{cases}$
$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

5. $\begin{cases} y = 2\sqrt{x}, \\ 3 \le x \le 8. \end{cases}$

6. $\begin{cases} y = 4\sin t, \\ x = 4\cos t, \end{cases}$
$0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}.$

7. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 0 \le x \le 3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y = 3(1 - \cos t), \\ x = 3(t - \sin t), \end{cases}$
$0 \le t \le 2\pi.$

9. $\begin{cases} y = \cos x, \\ -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y = 5\sin^3 t, \\ x = 5\cos^3 t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y = \dfrac{t}{3}\left(t^2 - 3\right), \\ x = t^2, \end{cases}$
$0 \le t \le \sqrt{3}.$

12. $\begin{cases} y = 6\cos t, \\ x = 6\sin t, \end{cases}$
$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

13. $\begin{cases} y = e^{-x}, \\ 0 \le x < 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = 6(t - \sin t), \\ x = 6(1 - \cos t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi.$

15. $\begin{cases} y^2 = 4(x - 4), \\ 7 \le x \le 12. \end{cases}$

16. $x^2 + 4y^2 = 4.$

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ 0 \le x \le 2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{3}, \\ -2 \le x \le 2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} y^2 = 4 + x, \\ -4 \le x \le 2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ 0 \le x \le 3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ -1 \le x \le 1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} y = e^{x}, \\ -1 \le x \le 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} y = 10\cos^3 t, \\ x = 10\sin^3 t, \end{cases}$
$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

24. $\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}, \\ 0 \le x \le 3. \end{cases}$

25. $x^2 + (y-3)^2 = 4.$

26. $\begin{cases} y = e^{x-1}, \\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} y = 4(t - \sin t), \\ x = 4(1 - \cos t), \end{cases}$
$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

28. $\begin{cases} y = (x-1)^2, \\ 1 \le x \le 2. \end{cases}$

29. $x^2 + 9y^2 = 36.$

30. $\begin{cases} y = 2\cos t, \\ x = 2\sin t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi.$

Индивидуальное задание №2

Задача 1. Изменить порядок интегрирования.

1. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx.$

2. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx.$

3. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$

4. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f dx.$

5. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f dy.$

6. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f dx.$

7. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f dx.$

8. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f dx.$

9. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f dy.$

10. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy.$

11. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f dy.$

12. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f dx.$

13. $\int\limits_{0}^{\pi/4} dy \int\limits_{0}^{\sin y} f dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_{0}^{\cos y} f dx.$

14. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-2-x}^{0} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^{1/3}}^{0} f dy.$

15. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f dx.$

16. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f dx.$

17. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{0} f dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx.$

18. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^3} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f dx.$

19. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy.$

20. $\int\limits_{-2}^{-1} dyx + \int\limits_{-(2+y)}^{2} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y^{1/3}}^{0} f dx.$

21. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f dx + \int\limits_1^0 dy \int\limits_{\ln y}^1 f dx.$

22. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x^2} f dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy.$

23. $\int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_0^{\sin x} f dy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\cos x} f dy.$

24. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_y^0 f dx.$

25. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^3} f dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f dy.$

26. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x} f dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f dy.$

27. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{(3-x)/2} f dy.$

28. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^3} f dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4-x^2-3}} f dy.$

29. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} f dy.$

30. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f dy.$

Задача 2. Найти объём тела, ограниченного указанными поверхностями.

1. $y = 16\sqrt{2x};\ y = \sqrt{2x};\ z = 0;\ x + z = 2.$

2. $y = 5\sqrt{x};\ y = 5x/3;\ z = 5 + 5x/3;\ z = 0.$

3. $x^2 + y^2 = 2;\ y = \sqrt{x};\ y = 0;\ z = 15x;\ z = 0.$

4. $x + y = 2; y = \sqrt{x}; z = 12y; z = 0.$

5. $x = 20\sqrt{2y}; x = 5\sqrt{2y}; y + z = 1/2; z = 0.$

6. $x = 5\sqrt{y}/2; x = 5y/6; z = 5(3 + \sqrt{y})/6; z = 0.$

7. $x^2 + y^2 = 2; x = \sqrt{y}; z = 30y; x = 0; z = 0.$

8. $x + y = 2; x = \sqrt{y}; z = 12x/5; z = 0.$

9. $y = 17\sqrt{2x}; y = 2\sqrt{2x}; z + x = 1/2; z = 0.$

10. $y = 5\sqrt{x}/3; y = 5x/9; z = 0; z = 5(3 + \sqrt{x})/9.$

11. $x^2 + y^2 = 8; y = \sqrt{2x}; z = 15x/11; y = 0; z = 0.$

12. $x + y = 4; y = \sqrt{2x}; z = 3y; z = 0.$

13. $x = 5\sqrt{y}/6; x = 5y/18; z = 5(3 + \sqrt{y})/18; z = 0.$

14. $x = 19\sqrt{2y}; x = 4\sqrt{2y}; z + y = 2; z = 0.$

15. $x^2 + y^2 = 8; x = \sqrt{2y}; z = 30y/11; x = 0; z = 0.$

16. $x + y = 4; x = \sqrt{2y}; z = 3x/5; z = 0.$

17. $y = 6\sqrt{3x}; y = \sqrt{3x}; x + z = 3; z = 0.$

18. $y = 5\sqrt{x}/6; y = 5x/18; z = 5(3 + \sqrt{x})/18; z = 0.$

19. $x^2 + y^2 = 18; y = \sqrt{3x};\ z = 5x/11;\ y = 0; z = 0.$

20. $x + y = 6;\ y = \sqrt{3x};\ \ z = 4y;\ \ z = 0.$

21. $x = 7\sqrt{3y}; x = 2\sqrt{3y}; y + z = 3; z = 0.$

22. $x = 5\sqrt{y}/3; x = 5y/9; z = 5(3 + \sqrt{y})/9; z = 0.$

23. $x^2 + y^2 = 50; y = \sqrt{5x}; z = 3x/11;\ y = 0;\ z = 0.$

24. $x + y = 6;\ x = \sqrt{3y};\ z = 4x/5;\ z = 0.$

25. $y = \sqrt{15x};\ y = \sqrt{15}x;\ z = \sqrt{15}(\sqrt{x} - 1);\ z = 0.$

26. $x = 4; y = 4; z = x^2 + y^2 + 1.$

27. $y = 0; z = 0; 3x + y = 6; 3x + 2y = 12; x + y + z = 6.$

28. $z = x^2 + y^2; x = 0; y = 0; z = 0; x + y = 0.$

29. $z = x^2 + y^2; x = 0; y = 1; y = 2x; y = 6 - x.$

30. $y = \sqrt{x}; y = \sqrt{2x}; z = 0; x + z = 8.$

Задача 3. Найти объём тела, ограниченного указанными поверхностями.

1. $z = 10\left[(x-1)^2 + y^2\right] + 1;\ z = 21 - 20x.$

2. $x^2 + y^2 = y;\ x^2 + y^2 = 4y;\ z = \sqrt{x^2 + y^2};\ z = 0.$

3. $z = 8(x^2 + y^2) + 3;\ z = 16x + 3.$

4. $x^2 + y^2 + 4x = 0; z = 8 - y^2; z = 0.$

5. $z = 4 - 14(x^2 + y^2);\ z = 4 - 28x.$

6. $x^2+y^2=6\sqrt{2}y; z=x^2+y^2-36; z=0 (z\geq 0).$

7. $z=32(x^2+y^2)+3; z=3-64x.$

8. $x^2+y^2=2y; x^2+y^2=5y; z=\sqrt{x^2+y^2}; z=0.$

9. $z=2-4(x^2+y^2); z=8x+2.$

10. $x^2+y^2=4x; z=10-y^2; z=0.$

11. $z=24(x^2+y^2)+1; z=48x+1.$

12. $x^2+y^2=8\sqrt{2}y; z=x^2+y^2-64; z=0; (z\geq 0).$

13. $z=-16(x^2+y^2)-1; z=-32x-1.$

14. $x^2+y^2=3y; x^2+y^2=6y; z=\sqrt{x^2+y^2}; z=0.$

15. $z=26(x^2+y^2)-2; z=-52x-2.$

16. $x^2+y^2=2\sqrt{2}y; z=0; z=x^2+y^2-4; (z\geq 0).$

17. $z=-2(x^2+y^2)-1; z=4y-1.$

18. $x^2+y^2=8x; x^2+y^2=11x; z=\sqrt{x^2+y^2}; z=0; y=0\ (y\leq 0).$

19. $z=30(x^2+y^2)+1;\ z=60y+1.$

20. $x^2+y^2=4y;\ z=4-x^2; z=0.$

21. $z=2-18(x^2+y^2); z=2-36y.$

22. $x^2+y^2=4\sqrt{2}y;\ z=0;\ z=x^2+y^2-16;\ (z\geq 0).$

23. $z=22(x^2+y^2)+3;\ z=3-44y.$

24. $x^2+y^2=9x;\ x^2+y^2=12x;\ y=0;\ z=0\ (y\geq 0)\ z=\sqrt{x^2+y^2}.$

25. $z=4-6(x^2+y^2);\ z=12y+4.$

26. $x^2+y^2=25;\ z=0;\ z=1; y=x; y=x\sqrt{3}.$

27. $x^2+y^2=2x;\ z=0; z=x^2+y^2.$

28. $z=4-y^2; z=y^2+2; x=-1; x=2.$

29. $z=x^2+y^2; z=x^2+2y^2; y=x; y=2x; x=1.$

30. $z = x^2 + y^2; z = 2x^2 + 2y^2; y = x^2; y = x.$

Задача 4. Найти массу тела.

1. $64(x^2 + y^2) = z^2;\ x^2 + y^2 = 4;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ \mu = 5(x^2 + y^2)/4.$

2. $x^2 + y^2 \le 1;\ x^2 + y^2 = 1;\ x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ x \ge 0;\ \mu = 4|z|.$

3. $x^2 + y^2 = 1;\ x^2 + y^2 = 2z;\ z = 0;\ x \ge 0;\ y \ge 0;\ \mu = 10x.$

4. $x^2 + y^2 = 16z^2/49; x^2 + y^2 = 4z/7; x \ge 0; y \ge 0; \mu = 80yz.$

5. $x^2 + y^2 + z^2 = 1; x^2 + y^2 = 4z^2; x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0; \mu = 20z.$

6. $36(x^2 + y^2) = z^2; x^2 + y^2 = 1; x \ge 0; z \ge 0; \mu = 5(x^2 + y^2)/6.$

7. $x^2 + y^2 + z^2 = 16; x^2 + y^2 = 4; (x^2 + y^2) \le 4; \mu = 2|z|.$

8. $x^2 + y^2 = 8z; x = 0; x^2 + y^2 = 4; z = 0; x \ge 0; y \ge 0; \mu = 5x.$

9. $x^2 + y^2 = 4z^2/25; x^2 + y^2 = 2z/5; x \ge 0; y \ge 0; \mu = 28xz.$

10. $x^2 + y^2 + z^2 = 4; x^2 + y^2 = z^2; x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0; \mu = 6z.$

11. $25(x^2 + y^2) = z^2; x^2 + y^2 = 4; x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0; \mu = 2(x^2 + y^2).$

12. $x^2 + y^2 + z^2 = 9; y \ge 0; x^2 + y^2 \le 4; \mu = |z|.$

13. $x^2 + y^2 = 1; z = 0; x^2 + y^2 = 6z; x \ge 0; y \ge 0; \mu = 90y.$

14. $x^2 + y^2 = z^2/25; x^2 + y^2 = z/5; x \ge 0; y \ge 0; \mu = 14yz.$

15. $x^2 + y^2 + z^2 = 4; x^2 + y^2 = 9z^2; x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0; \mu = 10z.$

16. $9(x^2 + y^2) = z^2; x^2 + y^2 = 4; x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0; \mu = 5(x^2 + y^2)/3.$

17. $x^2 + y^2 + z^2 = 4; x^2 + y^2 \le 1; \mu = 6|z|.$

18. $x^2 + y^2 = z; x^2 + y^2 = 1; z = 0; x \ge 0; y \ge 0; \mu = y.$

19. $x^2 + y^2 = z^2/49;\ x^2 + y^2 = z/7; x \ge 0; y \ge 0;\ \mu = 10xz.$

20. $x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ x^2 + y^2 = 4z^2;\ x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ \mu = 10z.$

21. $16(x^2 + y^2) = z^2;\ x^2 + y^2 = 1;\ x \ge 0; y \ge 0;\ z \ge 0;\ \mu = 5(x^2 + y^2).$

22. $x^2 + y^2 + z^2 = 16;\ x^2 + y^2 \le 4;\ \mu = |z|.$

23. $x^2+y^2=4z;\ x^2+y^2=4;\ \ z=0; x\geq 0;\ y\geq 0;\ \mu=5y.$

24. $x^2+y^2=z^2;\ x^2+y^2=z;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ \mu=35yz.$

25. $x^2+y^2+z^2=1;\ x^2+y^2=z^2;\ x\geq 0;\ y\geq 0;\ z\geq 0;\ \mu=32z.$

26. $x^2+y^2=2x; z=0; z=1; \mu=z\sqrt{x^2+y^2}.$

27. $x^2+y^2=2z; x^2+y^2+z^2=3; z>0; \mu=x^2+y^2+z^2.$

28. $x^2+y^2+z^2=2z; \mu=x^2+y^2+z^2.$

29. $x^2+y^2+z^2=1; x^2+y^2+z^2=4; \mu=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}.$

30. $z=\dfrac{y^2}{2}; x=0; y=0; z=0; 2x+3y-12=0; \mu=x+y+z.$

Задача 5. Вычислить криволинейный интеграл по формуле Грина.

1. $\oint\limits_L (1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy; L: x^2+y^2=R^2$

2. $\oint\limits_L (x+y-x^2y)dx+(xy^2+x+y)dy;\ L: x^2+y^2=R^2.$

3. $\oint\limits_L x^2y^2dx+(2x^3y/3+x)dy;\ L: x^2+y^2=2x.$

4. $\oint\limits_L (x^2-y^3/3)dx+(x^3/3-y^2)dy;\ L: x^2+y^2=R^2.$

5. $\oint\limits_L (x+2xy)dx+(x^2+x)dy; L: x^2+y^2=R^2.$

6. $\oint\limits_L (x+y)dx+(y-x)dy; L: x^2/a^2+y^2/b^2=1.$

7. $\oint\limits_L (2xy^2-1)ydx+(3xy^2+5)xdy; L: x^2+y^2=R^2.$

8. $\oint\limits_L (2y-y^2)dx+(y^2-2xy)dy; L: x^2+y^2=R^2.$

9. $\oint\limits_L (2x-3y)dx+xdy; L: x^2/a^2+y^2/b^2=1.$

10. $\oint\limits_L (y^2 e^{xy^2} + 6x - 8y)dx + (2xye^{xy^2} - 8y)dy; L: x^2 + y^2 = R^2.$

11. $\oint\limits_L (2xy - y)dx + x^2 dy; L: x^2 + y^2 = R^2.$

12. $\oint\limits_L (-x^2 y + x + y)dx + (xy^2 + x - y)dy; L: x^2 + y^2 = R^2.$

13. $\oint\limits_L -x^2 ydx + xy^2 dy; L: x^2 + y^2 = R^2.$

14. $\oint\limits_L (4x^2 y + 1)dx + (x^3 + 2)dy; L: x^2 + y^2 = R^2.$

15. $\oint\limits_L \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + (x + \frac{e^y}{1+x^2})dy; L: x^2 + y^2 = R^2.$

16. $\oint\limits_L (\cos x \cdot \cos y + 6y)dx + (18y^2 - \sin x \cdot \sin y))dy; L: x^2 + y^2 = R^2.$

17. $\oint\limits_L (2xy^3 / 3 - y)dx + x^2 y^2 dy; L: x^2 + y^2 = 2y.$

18. $\oint\limits_L e^{-(x^2 - y^2)}(\cos 2xy \cdot dx + \sin 2xy \cdot dy); L: x^2 + y^2 = R^2.$

19. $\oint\limits_L (x + y)dx + (y - x)dy;\ L: \begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$

20. $\oint\limits_L (x + y)^2 dx + (x - y)^2 dy; \quad L: \begin{cases} y = x^2, \\ y = x. \end{cases}$

21. $\oint\limits_L (x^2 + y^2)dy = 1,$ L: стороны квадрата $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$

22. $\oint\limits_L (x - y)^2 dx + (x + y)dy,$ L: контур $\Delta ABC,$ где $A(0;0),\ B(1;0);\ C(1;1).$

23. $\oint\limits_L e^x(1 - \cos x)dx + e^x(\sin y - y)dy,$ L: контур квадрата, где $0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1.$

24. $\oint\limits_L (x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy,\ L\colon \begin{cases} y=\sqrt{R^2-x^2}; \\ y=0. \end{cases}$

25. $\oint\limits_L (x+y)^2\,dx-(x^2+y^2)dy,\ L\colon \begin{cases} y=\sqrt{R^2-x^2}; \\ y=0. \end{cases}$

26. $\oint\limits_L (x+y)^2\,dx-(x^2+y^2)dy,\ L$: контур $\Delta\,ABC,$ где

$A(1;1),\ B(3;2);\ C(2;5).$

27. $\oint\limits_L xy^2dx-x^2ydy; L: x^2+y^2=R^2.$

28. $\oint\limits_L (1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy; L: x^2+y^2=R^2.$

29. $\oint\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy; L: x^2+y^2=ax.$

30. $\oint\limits_L (yx^3+e^y)dx+(xy^3+xe^y-2y)dy; L: x^2+y^2=R^2.$

Задача 6. Вычислить работу силы $\overline{F}$ при перемещении вдоль линии γ от точки M к точке N.

1. $\overline{F}=\{y;3x;z^2\};\ M(2;0;3);\ N(0;2;3);\ \gamma: \begin{cases} z=x^2+y^2-1, \\ z=3. \end{cases}$

2. $\overline{F}=\{yz;-xz;\ xy\};\ M(2;0;2);\ N(0;2;2);\ \gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=8, \\ z=\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$

3. $\overline{F}=\{yz;2xz;y^2\};\ M(4;0;3);\ N(0;4;3);\ \gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x^2+y^2=16(z>0). \end{cases}$

4. $\overline{F}=\{x;yz;-x\};\ M(1;0;1);\ N(0;011);\ \gamma: \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$

5. $\overline{F}=\{3z;-2y;2y\}; M(1;0;4); N(0;1;4); \gamma: \begin{cases} z=3(x^2+y^2)+1, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

6. $\overline{F}=\{x^2-y;x;1\};M(1;0;1);N(0;1;1);\gamma:\begin{cases}x^2+y^2=z,\\x^2+y^2=1.\end{cases}$

7. $\overline{F}=\{2y;5z;3x\};M(1;0;2);N(0;1;2);\gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x+y+z=3.\end{cases}$

8. $\overline{F}=\{4x;2;-xy\};M(2;0;9);N(0;2;9);\gamma:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\z=2(x^2+y^2)+1.\end{cases}$

9. $\overline{F}=\{2yz;xz;-x^2\};M(1;0;0);N(0;1;2);\gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\z=2(1-x).\end{cases}$

10. $\overline{F}=\{x;-3z^2;y\};M(4;0;4);N(0;4;0);\gamma:\begin{cases}x^2+y^2=16,\\z=4-y.\end{cases}$

11. $\overline{F}=\{y-z;z-x;x-y\};M(1;0;0);N(0;1;1);\gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\z=1-x.\end{cases}$

12. $\overline{F}=\{x;-z^2;y\};M(5;0;5);N(0;5;5);\gamma:\begin{cases}x^2+y^2=25,\\z=\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$

13. $\overline{F}=\{x;2z^2;y\};M(1;0;1);N(0;1;0);\gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\z=x.\end{cases}$

14. $\overline{F}=\{2y;-3x;x\};M(3;0;4);N(0;3;4);\gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\z=4.\end{cases}$

15. $\overline{F}=\left\{6z;-x;xy\right\};M(1;0;2);N(0;1;2);\gamma:\begin{cases}x^2+y^2-z^2/4=0,\\z=2.\end{cases}$

16. $\overline{F}=\{-2z;-x;x^2\};M(1;0;1);N(0;1;1);\gamma:\begin{cases}z=x^2+y^2,\\z=\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$

17. $\overline{F}=\{z;x;y\};M(\sqrt{2};0;\sqrt{2});N(0;\sqrt{2};\sqrt{2});\gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\x^2+y^2=z^2\,(z>0).\end{cases}$

18. $\overline{F}=\{y;-x;z\};M(1;0;1);N(0;1;1);\gamma:\begin{cases}z=2-x^2-y^2,\\z=\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$

19. $\overline{F}=\{2z;-x;y\};M(1;0;\sqrt{3});N(0;1;\sqrt{3});\gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\x^2+y^2=1\ \ (z>0).\end{cases}$

20. $\overline{F}=\{xz;\ x;\ z^2\};M(1;0;1);N(0;1;1);\ \gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2,\\x^2+y^2=z.\end{cases}$

21. $\overline{F}=\{x-y;y-z;z-x\};\ M(2;\ 0;\ 2);\ N(0;\ 2;\ 0);\gamma:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\z=x.\end{cases}$

22. $\overline{F}=\{x;-z^2/3;y\};\ M(1;\ 0;\ 0);\ N(0;\ 1;\ 1);\gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\z=y.\end{cases}$

23. $\overline{F}=\{-x^2y^3;2;xz\};M(1;\ 0;\ 1);\ N(0;\ 1;\ 1);\ \gamma:\begin{cases}x^2+y^2=z,\\x^2+y^2=1.\end{cases}$

24. $\overline{F}=\{-x^2y^3;1;z\};M(1;\ 0;\ 0);\ N(0;\ 1;\ 1);\ \gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\z=1-x.\end{cases}$

25. $\overline{F}=\{7z;-x;yz\};\ M(2;\ 0;\ 9);\ N(0;\ 2;\ 9);\gamma:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\z=2(x^2+y^2)+1.\end{cases}$

26. $\overline{F}=\{z;x;y\};\ M(1;2;3);\ N(2;4;6);\gamma:\begin{cases}x=t,\\y=2t,\\z=3t.\end{cases}$

27. $\overline{F}=\{yz;xz;xy\};\ M(1;1;0);\ N(0;1;1);\gamma:\begin{cases}x=\cos t,\\y=1,\\z=\sin t.\end{cases}$

28. $\overline{F}=\{2x;-z^2;2y\};M(3;0;3);N(0;3;0);\gamma:\begin{cases}x^2+y^2=9,\\z=3-y.\end{cases}$

29. $\overline{F}=\{3y;4z;2x\};M(1;0;1);N(0;1;1);\gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x+y+z=2.\end{cases}$

30. $\overline{F}=\{2y;x;3z^2\};\ M(2;0;5);\ N(0;2;5);\ \gamma:\begin{cases}z=x^2+y^2-1,\\z=5.\end{cases}$

Задача 7. Найти поток векторного поля $\overline{a} = \overline{a}(x, y, z)$ через часть плоскости *P*, расположенную в 1-м октанте (нормаль образует острый угол с осью *Oz*).

1. $\overline{a} = \{7x;\ (5\pi y + 2);\ 4\pi z\};\quad P: x + y/2 + 4z = 1.$

2. $\overline{a} = \{2\pi x;\ 7y + 2;\ 7\pi z\};\quad P: x + y/2 + z/3 = 1.$

3. $\overline{a} = \{9\pi x; 1; -3z\};\quad P: x/3 + y + z = 1.$

4. $\overline{a} = \{2x + 1; -y; 3\pi z\};\quad P: x/3 + y + 2z = 1.$

5. $\overline{a} = \{7x; 9\pi y; 1\};\quad P: x + y/3 + z = 1.$

6. $\overline{a} = \{1; 5y; 11\pi z\};\quad P: x + y + z/3 = 1.$

7. $\overline{a} = \{x; 0; \pi z - 1\};\quad P: 2x + y/2 + z/3 = 1.$

8. $\overline{a} = \{5\pi x; 9y + 1; 4\pi z\};\quad P: x/2 + y/3 + z/2 = 1.$

9. $\overline{a} = \{2; -y; 3\pi z/2\};\quad P: x/3 + y + z/4 = 1.$

10. $\overline{a} = \{9\pi x; 5y + 1; 2\pi z\};\quad P: 3x + y + z/9 = 1.$

11. $\overline{a} = \{7\pi x; 2\pi y; 7z + 2\};\quad P: x + y + z/2 = 1.$

12. $\overline{a} = \{0; \pi y; 4 - 2z\};\quad P: 2x + y/3 + z/4 = 1.$

13. $\overline{a} = \{(3\pi - 1)x; 9\pi y + 1; 6\pi z\};\quad P: x/2 + y/3 + z/9 = 1.$

14. $\overline{a} = \{\pi x; \pi y/2; 4 - 2z\};\quad P: x + y/3 + z/4 = 1.$

15. $\overline{a} = \{0; 5y + 3; 11\pi z\};\quad P: x + y/3 + 4z = 1.$

16. $\overline{a} = \{0; 9\pi y; 7z + 1\};\quad P: x + y + z = 1.$

17. $\overline{a} = \{0; \pi y; 1 - 2z\};\quad P: x/4 + y/3 + z = 1.$

18. $\overline{a} = \{27\pi x - x; 34\pi y + 8; 20\pi z\};\quad P: 3x + y/9 + z = 1.$

19. $\overline{a} = \{\pi x; 2;\ 2\pi z\};\quad P: x^2/2 + y/3 + z = 1.$

20. $\overline{a} = \{4\pi x;\ 7\pi y;\ 2z + 1\};\quad P: 2x + y/3 + 2z = 1.$

21. $\overline{a} = \{3\pi x; 6\pi y; 10\};\quad P: 2x + y + z/3 = 1.$

22. $\overline{a} = \{\pi x; -2y; 1\};\quad P: 2x + y/6 + z = 1.$

23. $\overline{a} = \{21\pi x - x; 62\pi y; 1 - 2\pi z\};\quad P: 8x + y/2 + z/3 = 1.$

24. $\overline{a} = \{\pi x - x; 2\pi y; 2\};\quad P: x/2 + y/4 + z/3 = 1.$

25. $\overline{a} = \{9\pi x; 2\pi y; 8\};\quad P: 2x + 8y + z/3 = 1.$

26. $\overline{a}=\{x-2z,\ x+3y+z,\ 5x+y\}$; $\quad P: x+y+z=1.$

27. $\overline{a}=\{4\pi x;\ 2z+1; 7\pi y\}$; $\quad P: 2x+2y+z/3=1.$

28. $\overline{a}=\{\pi y; 1-2z; 0\}$; $\quad P: x+y/4+z/3=1.$

29. $\overline{a}=\{-y; 3\pi z/2; 2\}$; $\quad P: x+y/4+z/3=1.$

30. $\overline{a}=\{5y+1; 9\pi x; 2\pi z\}$; $\quad P: x+3y+z/9=1.$

Задача 8. Тело T лежит в 1-м октанте и ограничено плоскостями координат с поверхностью Q, заданной уравнением $F(x,y,z) = 0$.

Вычислить:

а) поток поля вектора $\overline{a}$ через поверхность, ограничивающую тело T (воспользоваться формулой Остроградского);

б) циркуляцию поля вектора $\overline{a}$ вдоль линии пересечения поверхности Q с плоскостями координат в направлении от точки пересечения Q с осью Ox к точке пересечения Q с осью Oy (воспользоваться формулой Стокса).

1. $y^2=1-x-z$; $\quad \overline{a}=\{xy; z^2; 0\}.$

2. $(x+z)^2=4-y$; $\quad \overline{a}=\{y^2; -x^2; z\}.$

3. $x^2+4z^2=(y-1)^2$; $\quad \overline{a}=\{z-1; 2y; x+y\}.$

4. $(x-1)^2=y^2+z^2$; $\quad \overline{a}=\{x; z; -y\}.$

5. $(x+y)^2=1-z$; $\quad \overline{a}=\{(x+y)^2; -1; 0\}.$

6. $(x+y)^2=4-z$; $\quad \overline{a}=\{0; 0; x+y+z\}.$

7. $(2x+z)^2=4-y$; $\quad \overline{a}=\{y^2; -x^2; z\}.$

8. $y^2=4-x-z$; $\quad \overline{a}=\{xy; z^2; 0\}.$

9. $x^2+z^2=4-y$; $\quad \overline{a}=\{x; x; z\}.$

10. $(x-2)^2=z^2+y^2$; $\quad \overline{a}=\{x; z; -y\}.$

11. $(y-1)^2=z^2+x^2$; $\quad \overline{a}=\{x+y; 0; 2z\}.$

12. $x^2=2-y-z$; $\quad \overline{a}=\{4x; xz; y\}.$

13. $x^2+y^2=2-z$; $\quad \overline{a}=\{0; y+x; z+x\}.$

14. $(x+2z)^2=1-y$; $\quad \overline{a}=\{2x; x; 3y\}.$

15. $(y+z)^2 = 1-2x; \quad \overline{a} = \{x+y; 0; x+z\}.$

16. $z^2 = 4-x-y; \quad \overline{a} = \{xy; 3z; 5\}.$

17. $x^2 + 4y^2 = 1-z; \quad \overline{a} = \{2y; 0; y+z\}.$

18. $(y+z)^2 = 4-4x; \quad \overline{a} = \{0; y; 5x\}.$

19. $y^2 + x^2 = 3-x; \quad \overline{a} = \{2x;\ x-z; z\}.$

20. $x^2 + y^2 = (z-2)^2; \quad \overline{a} = \{xy;\ z^2;\ 0\}$

21. $(z-1)^2 = 4-x-y; \quad \overline{a} = \{0; y; x^2\}.$

22. $x^2 + z^2 = 4-y; \quad \overline{a} = \{xy; xy; 0\}.$

23. $(x-1)^2 = 4-2y-z; \quad \overline{a} = \{z; y; 0\}.$

24. $x^2 + (z+1)^2 = 4-y; \quad \overline{a} = \{x+y; -y; z\}.$

25. $x^2 + (y+1)^2 = 4-z; \quad \overline{a} = \{x+z; z^2; z+1\}.$

26. $x+y+2z = 2; \quad \overline{a} = \{2xz; -y; z\}.$

27. $x^2 + y^2 + z^2 = 4; \quad \overline{a} = \{y; -x; z\}.$

28. $x^2 + y^2 = 4-z; \quad \overline{a} = \{x; y; x\}.$

29. $(y-1)^2 = 4-2x-z; \quad \overline{a} = \{x; z; 0\}.$

30. $4x^2 + y^2 = 1-z; \quad \overline{a} = \{0; 2x; x+z\}.$

Библиографический список

Высшая математика: Учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 479 с.

Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука,.Т.1, - М.: Интеграл – Пресс, 2006

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука,.Т.2 , - М.: Интеграл – Пресс, 2006

Содержание

Составители:

Бабин Владислав Николаевич
Бильданов Ринат Талгатович
Грунина Мария Викторовна

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Издание второе, стереотипное

Редактор Н.К. Крупина
Компьютерная вёрстка Р.Т.Бильданов

Подписано к печати «25» декабря 2017 г. Формат 60×84/16.
Объем 7,3 уч.-изд.л. Тираж 100 экз. Заказ № 1937