ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

Линейная алгебра

Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины
и выполнению контрольной работы

38.03.01 *Экономика*
38.03.02 *Менеджмент*
38.03.03 *Управление персоналом*
38.03.04 *Государственное и муниципальное управление*

Новосибирск 2020

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, доцент О.Н.Чащин

Линейная алгебра: методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. В.Н.Бабин, Р.Т.Бильданов, С.Н.Бурков, М.В.Грунина, Е.Ю.Тарсис. – Новосибирск, 2020. – 19 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки: 38.03.01 Экономика; 38.03.02 Менеджмент; 38.03.03 Управление персоналом; 38.03.04 Государственное и муниципальное управление.

Утверждены и рекомендованы к изданию учебно-методическим советом факультета Экономики и управления (протокол №1 от 22 сентября 2020).

Содержание

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания линейной алгебры в вузе для студентов экономических и организационно-управленческих специальностей – добиться усвоения студентами основ математического аппарата линейной алгебры, необходимого для решения теоретических и практических экономических и организационно-управленческих задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям, подготовить к чтению современной научной литературы и обеспечить запросы других разделов математики и дисциплин, использующих возникающие в линейной алгебре конструкции; развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также начальные навыки прикладных исследований.

Задачи дисциплины:

– развить у студентов логическое и алгоритмическое мышление,

– познакомить студентов с идеями и методами линейной алгебры,

– привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,

– привить студентам опыт решения задач с использованием инструментариев линейной алгебры.

1.2. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент ***должен***:

Знать:

– основные понятия теории матриц и определителей;

– методы решения систем линейных алгебраических уравнений;

– основные понятия и инструменты векторной алгебры;

– основные понятия и методы аналитической геометрии на плоскости ив пространстве;

Уметь:

– применять математический аппарат линейной алгебры для исследования объектов профессиональной деятельности, построения экономико-математических моделей и решения экономических и управленческих задач;

Владеть:

– навыками применения инструментария линейной алгебры для решения экономических и организационно-управленческих задач.

2. Методические указания по выполнению контрольной работы

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями.

1. Работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер контрольной работы, дата отсылки работы в институт.

2. Задачи следует располагать в порядке возрастания номеров. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать её условие.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.

4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

6. Контрольная работа должна выполняться **самостоятельно.** Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме.

7. Если преподаватель установит **несамостоятельное выполнение работы,** то она **не будет зачтена.**

8. Получив прорецензированную работу (как зачтённую, так и

незачтённую), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты. В случае незачёта по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

9. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

№ варианта	Номера задач контрольной работы по вариантам				
1	1	11	21	31	41
2	2	12	22	32	42
3	3	13	23	33	43
4	4	14	24	34	44
5	5	15	25	35	45
6	6	16	26	36	46
7	7	17	27	37	47
8	8	18	28	38	48
9	9	19	29	39	49
0	10	20	30	40	50

3. Задания для контрольной работы

В задачах **1-10** найти $P(A)$.

1. $P(A) = A^2 - 9A^{-1} - 2|A|E, \;\; A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

2. $P(A) = A^2 - 3A^{-1} + 2|A|E, \;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $P(A) = A^2 - 4A^{-1} + 5|A|E, \;\; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

4. $P(A) = A^2 + 5A^{-1} - 2|A|E, \;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$

5. $P(A) = A^2 - 6A^{-1} + |A|E, \;\; A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

6. $P(A) = A^2 + 2A^{-1} - 8|A|E, \;\; A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

7. $P(A) = A^2 - 7A^{-1} - 2|A|E, \;\; A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

8. $P(A) = A^2 - 2A^{-1} + 3|A|E, \;\; A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

9. $P(A) = A^2 + 4A^{-1} - 5|A|E, \;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

10. $P(A) = A^2 - 5A^{-1} + 2|A|E, \;\; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$

В задачах **11-20** систему уравнений решить методом Крамера.

11. $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} -x + 4y = 5 \\ x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + 4z = -1 \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} 4x - y + 3z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x+2y+z=-1 \\ -x+2z=2 \\ -2x+2y-3z=-5 \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} 4x-y+2z=8 \\ -x+2y=-7 \\ x-3y-5z=2 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 2x-2y+2z=2 \\ 2x+y+z=5 \\ x+y+5z=3 \end{cases}$

17. $\begin{cases} -2x+2y-4z=-8 \\ 3x-y=4 \\ -5x+6y-2z=-13 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=6 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$ **19.** $\begin{cases} 3x-y+2z=12 \\ 2x+y-3z=7 \\ x-z=3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x-4y-5z=5 \\ 3x-y-5z=3 \\ 6x+2y=-8 \end{cases}$

В задачах **21–30** систему уравнений решить методом Гаусса.

21. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3-7x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=2 \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-7x_4=5 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2-x_4=1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1-x_2-4x_3+9x_4=22 \\ x_1+2x_2-4x_4=-3 \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3 \\ 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4=6, \\ x_1+x_2-2x_3+x_4=3, \\ -x_1-2x_2+2x_3-x_4=-4. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2-4x_4=1 \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=3 \\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=1 \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=4 \\ 4x_1+3x_2+4x_3+2x_4=7 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-2x_4=-1, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=3, \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=5, \\ 3x_1-x_2-x_3+3x_4=14. \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=12 \\ x_1+2x_2-2x_3+3x_4=14 \\ 5x_1-x_2+x_3-4x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-2x_3-x_4=13 \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=7, \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=-7, \\ 3x_1-x_2-x_3+x_4=4, \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4=9. \end{cases}$

В задачах **31-40** даны координаты вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4. Средствами векторной алгебры найти:

a) длину ребра A_1A_2;

b) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4

c) проекцию вектора $\overline{A_1A_2}$ на вектор $\overline{A_1A_4}$;

d) площадь грани $A_1A_2A_3$;

e) объём пирамиды.

31. A_1(2;0; 0), A_2(-2; 0; 1), A_3(1; 4; 2), A_4(3; 0; 6)
32. A_1(-2; 0; 2), A_2(0; 0; 4), A_3(3; 2; 5), A_4(-1; 3; 2)
33. A_1(1; 2; 3), A_2(2; 0; 0), A_3(3; 2; 5), A_4(4; 0; 0)
34. A_1(3; 0; 6), A_2(1; -3; 2), A_3(3; 2; 5), A_4(2; 2; 5)
35. A_1(-2; 0; -1), A_2(0; 0; 4), A_3(1; 3; 2), A_4(3; 2; 7)
36. A_1(1; -2; 1), A_2(0; 0; 4), A_3(1; 4; 2), A_4(2; 0; 0)
37. A_1(-2; 1; 0), A_2(3; 2; 7), A_3(2; 2; 5), A_4(6; 1; 5)
38. A_1(-1; 3; 0), A_2(2; 0; 0), A_3(-4; 1; -2), A_4(-6; 0; 5)
39. A_1(1; -1; 6), A_2(-5; -1; 0), A_3(4; 0; 0), A_4(2; 2; 5)
40. A_1(3; 1; 4), A_2(-1; 6; 1), A_3(-1; 1; 6), A_4(0; 4; -1)

В задачах **41–50** даны координаты вершин треугольника *ABC*. Сделать чертёж. Составить уравнение стороны *AB*. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины *C* на медиану *AM*.

41. *A*(-6; –3); *B*(–4; 3); *C*(9;2)
42. *A*(–10; 5); *B*(6; –7); *C*(–1; 17)
43. *A*(10; –4); *B*(–6; 8); *C*(1; –16)
44. *A*(3; 2); *B*(–13; –10); *C*(–6; 14)
45. *A*(7; 4); *B*(–9; –8); *C*(–2; 16)
46. *A*(7; 3); *B*(–9; –9); *C*(–2; 15)
47. *A*(–13; 3); *B*(3; –9); *C*(–4; 15)
48. *A*(12; –2); *B*(–4; –14); *C*(3; 10)
49. *A*(7; 5); *B*(–9; –7); *C*(–2; 17)
50. *A*(13; 7); *B*(–3; –5); *C*(4; 19)

4. Примеры решения задач контрольной работы

Пример 1. Найти $P(A)$.

$$P(A) = A^2 - 2A^{-1} + 3|A|E,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-2)\cdot 4 & 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 3 \\ 4\cdot 1 + 3\cdot 4 & 4\cdot(-2) + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу ищем по формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$

$|A| = 1\cdot 3 - (-2)\cdot 4 = 11,\qquad A_{11} = (-1)^{1+1}|3| = 3,\qquad A_{12} = (-1)^{1+2}|4| = -4,$

$A_{21} = (-1)^{2+1}|-2| = 2,\quad A_{22} = (-1)^{2+2}|1| = 1.$

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{-4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$P(A) = A^2 - 2A^{-1} + 3|A|E = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{-4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} + 3\cdot 11\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{6}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{8}{11} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 33 & 0 \\ 0 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{280}{11} & -\frac{92}{11} \\ \frac{184}{11} & \frac{372}{11} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $P(A)=\begin{pmatrix} \dfrac{280}{11} & -\dfrac{92}{11} \\ \dfrac{184}{11} & \dfrac{372}{11} \end{pmatrix}.$

Пример 2. Решить систему уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6. \end{cases}$$

Решение. Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \text{разложим определитель} \\ \text{по первой строке} \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}+$$

$$+3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-15-8+2(-10+12)+3(-4-9)=-58.$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 20 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \text{разложим определитель} \\ \text{по первой строке} \end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix} 20 & -4 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}+$$

$$+3\cdot\begin{vmatrix} 20 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=6(-15-8)+2(-100+24)+3(-40-18)=-464.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 20 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \text{разложим определитель} \\ \text{по первой строке} \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 20 & -4 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}+$$

$$+3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=-100+24-6(-10+12)+3(12-60)=-232.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix}\text{разложим определитель}\\ \text{по первой строке}\end{matrix}\right| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 20 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 18 + 40 + 2(12-60) + 6(-4-9) = -116.$$

При вычислении определителей можно воспользоваться так же правилом треугольников (Саррюса).

По формулам Крамера находим $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 8$, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 4$, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2.$

Ответ: (8; 4; 2).

Пример 3. Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 19, \\ 5x_1 - 2x_2 - 8x_4 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 26x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение. Применим к расширенной матрице системы элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 6 & 1 & 2 & -4 & 19 \\ 5 & -2 & 0 & -8 & 16 \\ 5 & 2 & -1 & -26 & -1 \end{array}\right) (-6)(-5)(-5) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -16 & -35 \\ 0 & -2 & -5 & -18 & -29 \\ 0 & 2 & -6 & -36 & -46 \end{array}\right) :2 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -16 & -35 \\ 0 & -2 & -5 & -18 & -29 \\ 0 & 1 & -3 & -18 & -23 \end{array}\right) (2)(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -16 & -35 \\ 0 & 0 & -13 & -50 & -99 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 \end{array}\right) (13)(4)(-1) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -24 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -76 & 57 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 \end{array}\right):(-76) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -24 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 \end{array}\right)(2)(24)(-4) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 21/2 \end{array}\right).$$

Таким образом, данная система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -5, \\ x_3 = \dfrac{21}{2}, \\ x_4 = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0; -5; \dfrac{21}{2}; -\dfrac{3}{4}\right)$.

Пример 4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(2; -1; 1)$, $A_2(5; 5; 4)$, $A_3(3; 2; -1)$, $A_4(4; 1; 3)$.

Средствами векторной алгебры найти:

a) длину ребра A_1A_2;

b) угол между ребрами A_1A_2 и A_3A_4;

c) проекцию вектора $\overline{A_1A_2}$ на вектор $\overline{A_1A_4}$;

d) площадь грани $A_1A_2A_3$;

e) объём пирамиды.

Решение.

a) Найдем координаты вектора $\overline{A_1A_2}$:

$\overline{A_1A_2} = \{5-2, 5-(-1), 4-1\} = \{3, 6, 3\}$. Длина ребра A_1A_2 равна

$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{54}.$

b) Чтобы найти угол между ребрами A_1A_2 и A_3A_4 сначала найдем координаты вектора $\overline{A_3A_4}$: $\overline{A_3A_4}=\{1,-1,4\}$, а затем используем формулу $\cos\alpha=\dfrac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_3A_4}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overline{A_3A_4}\right|}=\dfrac{3\cdot1+6\cdot(-1)+3\cdot4}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}}=\dfrac{9}{18\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{3}}$ и определим угол $\alpha=\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

c) Проекция вектора $\overline{A_1A_3}$ на вектор $\overline{A_1A_4}$:

$$Пр_{\overline{A_1A_4}}\overline{A_1A_3}=\frac{\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_4}\right|};\ \overline{A_1A_3}=\{1,3,-2\},\ \overline{A_1A_4}=\{2,2,2\};$$

$$\left|\overline{A_1A_4}\right|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3};$$

$$Пр_{\overline{A_1A_4}}\overline{A_1A_3}=\frac{1\cdot2+3\cdot2-2\cdot2}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

d) Площадь грани $A_1A_2A_3$ – это площадь треугольника $A_1A_2A_3$:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right|;$$

$$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=-21\bar{i}+9\bar{j}+3\bar{k};$$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\sqrt{21^2+9^2+3^2}=\frac{1}{2}\sqrt{531}\,(кв.ед.).$$

e) Объем пирамиды: $V=\dfrac{1}{6}\cdot\left|\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right)\right|$;

$$\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right)=\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=18-24+6-18-12+12=-18;$$

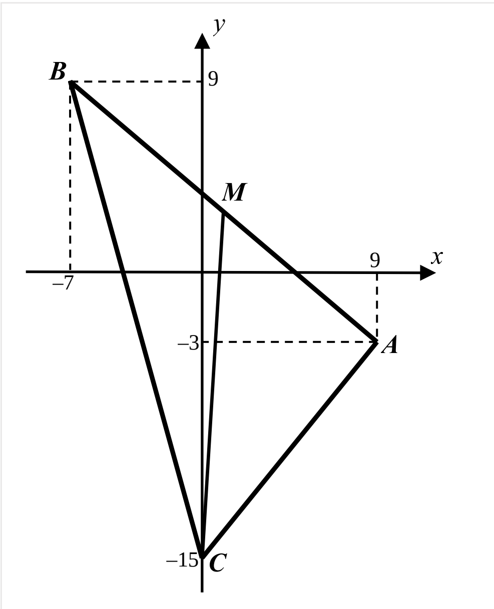
$$V=\frac{1}{6}\cdot|-18|=\frac{18}{6}=3\,(куб.ед.).$$

Ответ: a) $\sqrt{54}$; b) $\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$; c) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; d) $\dfrac{1}{2}\sqrt{531}\,(кв.ед.)$;

е) $3\left(\text{куб.ед.}\right)$.

Пример 5. Даны координаты вершин треугольника *ABC:* *A* (9; –3); *B* (–7;9); *C* (0; –15). Сделать чертёж. Составить уравнение стороны *AB*. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины *A* на медиану *CM*.

Решение.



Для составления уравнения стороны *AB* воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2): $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Тогда *AB*: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}\Rightarrow$

$$\frac{x-9}{-7-9}=\frac{y-(-3)}{9-(-3)}\Rightarrow\frac{x-9}{-16}=\frac{y+3}{12}\ \text{или}\ 3x+4y-15=0.$$

Для составления уравнения перпендикуляра AD будем использовать уравнение прямой, которая проходит через точку (x_0, y_0) перпендикулярно вектору $\bar{n}=\left\{n_x, n_y\right\}$: $n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)=0.$ Так как перпендикуляр опущен на медиану *CM*, то $\bar{n}=\overline{CM}=\left\{x_M-x_C, y_M-y_C\right\}$.

Точка M – середина стороны AB. Её координаты:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{9-7}{2} = 1,\ \ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+9}{2} = 3,\ \ M(1, 3).$$

$\bar{n} = \{1-0, 3-(-15)\} = \{1, 18\}$. Таким образом уравнение перпендикуляра AD: $1(x-9)+18(y+3)=0 \Rightarrow\ x-9+18y+54=0 \Rightarrow\ x+18y+45=0.$

Ответ: AB: $3x+4y-15=0$; AD: $x+18y+45=0$.

5. Вопросы к экзамену

1. Система линейных уравнений. Метод Гаусса
2. Определители второго и третьего порядка. Разложение определителя по строке и столбцу.
3. Свойства определителей.
4. Решение квадратных систем линейных уравнений методом Крамера.
5. Операции над матрицами.
6. Решение квадратных систем линейных уравнений методом обратной матрицы.
7. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
8. Фундаментальная система решений однородной системы.
9. Линейное пространство. Линейная зависимость. Базис и размерность линейного пространства. Арифметическое линейное пространство.
10. Геометрический векторы и их свойства. Линейные операции над векторами.
11. Геометрический смысл линейной зависимости векторов. Базис системы векторов на плоскости и в пространстве. Координаты вектора.
12. Аффинные системы координат на плоскости и в пространстве. Декартова прямоугольная система координат.
13. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов. Их свойства.
14. Общее уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой проходящей через заданную точку. Уравнение прямой проходящей через две заданные точки. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

15. Общее уравнение плоскости. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.
16. Уравнения прямой в пространстве.
17. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых.
18. Кривые второго порядка.
19. Комплексные числа и действия над ними.

Список основной литературы

1. Рудык Б.М. Линейная алгебра: Учебное пособие / Б.М. Рудык. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 318 с. (ЭБС Инфра-М)
2. Шевцов Г. С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: учебное пособие / Г.С. Шевцов. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Магистр: НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 544 с. (ЭБС Инфра-М)

Список дополнительной литературы

1. Мальцев И.А. Линейная алгебра: Учебник / И.А. Мальцев. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Лань, 2010. – 384 с. (ЭБС Лань)

Линейная алгебра: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины
и выполнению контрольной работы

Составители: Бабин Владислав Николаевич
Бильданов Ринат Талгатович
Бурков Сергей Николаевич
Грунина Мария Викторовна
Тарсис Екатерина Юрьевна

Подписано к печати “__”_______ 201_ г. Формат 84×108/32
Объём 1,4 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160