

Математический анализ

Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и
выполнению контрольной работы №1

38.03.01 *Экономика*

38.03.02 *Менеджмент*

38.03.03 *Управление персоналом*

38.03.04 *Государственное и муниципальное управление*

Новосибирск 2020

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, профессор, доцент И. В. Ершов.

Математический анализ: методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы №1 / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. В. Н. Бабин, С. Н. Бурков, М. В. Грунина, С.А. Журавская, Т. В. Фомина,. – Новосибирск, 2020. – 34 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки: 38.03.01 Экономика 38.03.02 Менеджмент; 38.03.03 Управление персоналом; 38.03.04 Государственное и муниципальное управление.

Утверждены и рекомендованы к изданию учебно-методическим советом факультета Экономики и управления (протокол №1 от 22 сентября 2020).

© Новосибирский государственный аграрный университет, 2020

Содержание

1. Введение	4
2. Методические указания по выполнению контрольной работы.....	5
3. Задания для контрольной работы	7
4. Примеры решения задач контрольной работы.....	13
5. Вопросы к экзамену.....	30
6. Литература.....	32

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания математического анализа в вузе для студентов экономических и организационно-управленческих специальностей – добиться усвоения студентами основ математического аппарата математического анализа, необходимого для решения теоретических и практических экономических и организационно-управленческих задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям, подготовить к чтению современной научной литературы и обеспечить запросы других разделов математики и дисциплин, использующих возникающие в математическом анализе, конструкции; развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также начальные навыки прикладных исследований.

Задачи дисциплины:

- развить у студентов логическое и алгоритмическое мышление,
- познакомить студентов с идеями и методами математического анализа,
- привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,
- привить студентам опыт решения задач с использованием инструментария математического анализа.

1.2. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент *должен*:

Знать:

- основные понятия математического анализа;
- различные алгоритмы и методы математического анализа, применяемые для решения экономических задач

Уметь:

- применять математический аппарат математического анализа для исследования объектов профессиональной деятельности, построения экономико-математических моделей и решения экономических и управленческих задач;

Владеть:

- навыками применения инструментария математического анализа для решения экономических и организационно-управленческих задач.

2. Методические указания по выполнению контрольной работы

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями.

1. Работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер контрольной работы, дата отсылки работы в институт.

2. Задачи следует располагать в порядке возрастания номеров. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать её условие.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.

4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

6. Контрольная работа должна выполняться **самостоятельно**. Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме.

7. Если преподаватель установит **несамостоятельное выполнение работы**, то она **не будет зачтена**.

8. Получив прорецензированную работу (как зачтённую, так и незачтённую), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты. В случае незачёта по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

9. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

№ вари- анта	Номера задач контрольной работы по вариантам				
1	1	11	21	31	41
2	2	12	22	32	42
3	3	13	23	33	43
4	4	14	24	34	44
5	5	15	25	35	45
6	6	16	26	36	46
7	7	17	27	37	47
8	8	18	28	38	48
9	9	19	29	39	49
0	10	20	30	40	50

Контрольная работа №1

В задачах **1-10** найти пределы функций

1. а) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 4x - 15}$ при 1) $x_0 = 2$, 2) $x_0 = 3$, 3) $x_0 = \infty$;

$$6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}}{x-4}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\operatorname{arctg} 4x}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+5} \right)^{3n+2}.$$

$$2. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 - 7x - 2}{2x^2 - x - 6} \text{ при 1) } x_0 = 0, \text{ 2) } x_0 = 2, \text{ 3) } x_0 = \infty;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n-4} \right)^{2n-7}.$$

$$3. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 5x + 6} \text{ при 1) } x_0 = 3, \text{ 2) } x_0 = -3, \text{ 3) } x_0 = \infty;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{9-x}}{x-5}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{ctg} 5x}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-6}{n-4} \right)^{4n+2}.$$

$$4. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2} \text{ при 1) } x_0 = -3, \text{ 2) } x_0 = -2, \text{ 3) } x_0 = \infty;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\arcsin 2x}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-3}{5n+6} \right)^{n-3}.$$

$$5. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 14x + 8}{2x^2 - 7x + 4} \text{ при 1) } x_0 = 2, \text{ 2) } x_0 = 4, \text{ 3) } x_0 = \infty;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt{3-x}}{x+2}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 3x; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-5}{4n-3} \right)^{3n+5}.$$

$$6. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 - 25x + 25}{2x^2 - 15x + 25} \text{ при 1) } x_0 = 2, \text{ 2) } x_0 = 5, \text{ 3) } x_0 = \infty;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \sin 6x \operatorname{ctg} 2x; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-4}{n+5} \right)^{5n+3}.$$

$$7. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{7x^2 + 26x - 8}{2x^2 + x - 28} \text{ при 1) } x_0 = 1, \text{ 2) } x_0 = -4, \text{ 3) } x_0 = \infty;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{8-x}}{x-2}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 7x}{5x}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-5}{2n+3} \right)^{4n-5}.$$

$$8. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 15x + 25}{x^2 + 15x + 50} \text{ при } 1) x_0 = 5, 2) x_0 = -5, 3) x_0 = \infty;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 4x}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n+6} \right)^{2n+3}.$$

$$9. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 5x - 8}{2x^2 + 3x - 5} \text{ при } 1) x_0 = -2, 2) x_0 = 1, 3) x_0 = \infty;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}{x-3}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-3}{5n+4} \right)^{n+4}.$$

$$10. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{6x^2 + 13x + 7}{3x^2 + 8x + 5} \text{ при } 1) x_0 = -2, 2) x_0 = -1, 3) x_0 = \infty;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{\sqrt{x-3} - \sqrt{9-x}}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{4x}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n-3} \right)^{5n-1}.$$

В задачах **11-20** исследовать функцию на непрерывность и построить эскиз графика.

$$11. y = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 2; \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

$$12. y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1; \\ 2x, & 1 < x \leq 3; \\ x+2, & x > 3. \end{cases}$$

$$13. y = \begin{cases} x-3, & x < 0; \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4; \\ 3+\sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$$

$$14. y = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 1; \\ 0, & 1 < x \leq 2; \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$15. y = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0; \\ x, & 0 < x \leq 1; \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

$$17. y = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2; \\ 0, & \pi/2 < x < \pi; \\ \pi/2, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$19. y = \begin{cases} 3x+1, & x < 0; \\ x^2+1, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$16. y = \begin{cases} \sin x, & x < 0; \\ x, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$$18. y = \begin{cases} x-1, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x < 2; \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$20. y = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x < \pi/2; \\ x, & x \geq \pi/2. \end{cases}$$

В задачах 21-30 найти производные заданных функций.

$$21. \quad \text{a)} \quad y = \left(3x^4 - \frac{5}{\sqrt[4]{x}} + 2 \right)^5;$$

$$\text{б)} \quad y = \ln^5 \sqrt[5]{\frac{1-5x}{1+5x}};$$

$$\text{в)} \quad y = \arccos 2x + \sqrt{1-4x^2};$$

$$\text{г)} \quad y = 2^{\operatorname{tg} x} + x \sin 2x.$$

$$22. \quad \text{a)} \quad y = \left(5x^2 - 4\sqrt[4]{x^5} + 3 \right)^3;$$

$$\text{б)} \quad y = \ln^6 \sqrt[6]{\frac{1-x^6}{1+x^6}};$$

$$\text{в)} \quad y = \arctg \sqrt{x^2-1};$$

$$\text{г)} \quad y = e^{3x} + 2x \operatorname{tg} 3x.$$

$$23. \quad \text{a)} \quad y = \left(\frac{1}{4}x^8 + 8\sqrt[8]{x^3} - 1 \right)^3;$$

$$\text{б)} \quad y = \ln^4 \sqrt[4]{\frac{4x-1}{1+x^4}};$$

$$\text{в)} \quad y = \arccos \sqrt{x+1};$$

$$\text{г)} \quad y = 3^{\cos x} - x \sin 2x.$$

$$24. \quad \text{a)} \quad y = \left(\frac{1}{5}x^5 - 3x\sqrt[3]{x} - 4 \right)^4;$$

$$\text{б)} \quad y = \ln^3 \sqrt[3]{\frac{x^3-3}{x^3+2}};$$

$$\text{в)} \quad y = \arctg \sqrt{x-1};$$

$$\text{г)} \quad y = \sqrt{x} \operatorname{ctg} 3x - 2x^2.$$

$$25. \quad \text{a)} \quad y = \left(3x^8 + 5\sqrt[5]{x^2} - 3 \right)^5;$$

$$\text{б)} \quad y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x-3};$$

$$\text{б)} \quad y = \ln \sqrt[5]{\left(\frac{5x+3}{x^5+1} \right)^2};$$

$$\text{г)} \quad y = 5^{\sqrt{x}} - x^2 \operatorname{tg} 2x.$$

$$26. \quad \text{a)} \quad y = \left(5x^4 - \frac{2}{x\sqrt{x}} + 3 \right)^2;$$

$$\text{б)} \quad y = \arccos \sqrt{1-x};$$

$$\text{б)} \quad y = \ln \sqrt[5]{\frac{1-8x}{x^8+1}};$$

$$\text{г)} \quad y = 3^{\sqrt{x}} + \frac{1 - \sin 3x}{1 + \sin 3x}.$$

$$27. \quad \text{a)} \quad y = \left(4x^3 + \frac{3}{x\sqrt[3]{x}} - 2 \right)^5;$$

$$\text{б)} \quad y = \operatorname{arcctg} \sqrt{x-1};$$

$$\text{б)} \quad y = \ln \sqrt[6]{\left(\frac{x^6-1}{6x+5} \right)^7};$$

$$\text{г)} \quad y = 2^{x^2+1} - x \sin 4x.$$

$$28. \quad \text{a)} \quad y = \left(7x^5 - 3x\sqrt[3]{x^2} - 6 \right)^4;$$

$$\text{б)} \quad y = \arcsin 3x - \sqrt{1-9x^2};$$

$$\text{б)} \quad y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{3x-4}{3x+1} \right)^4};$$

$$\text{г)} \quad y = e^{\operatorname{tg} x} - \sqrt{x} \cos 2x.$$

$$29. \quad \text{a)} \quad y = \left(3x^4 - \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - 3 \right)^5;$$

$$\text{б)} \quad y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1};$$

$$\text{б)} \quad y = \ln \sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2} \right)^3};$$

$$\text{г)} \quad y = x \operatorname{tg} 3x + 2^{x-2}.$$

$$30. \quad \text{a)} \quad y = \left(8x^3 - \frac{9}{x^2\sqrt{x}} + 6 \right)^5;$$

$$\text{б)} \quad y = \arcsin \sqrt{1-x};$$

$$\text{б)} \quad y = \ln \sqrt[7]{\left(\frac{7x-4}{x^7-2} \right)^3};$$

$$\text{г)} \quad y = 3^{\sin x} - \sqrt[3]{x} \operatorname{tg} 3x.$$

В задачах 31-40 вычислить предел функции с помощью правила Лопиталья.

$$31. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-6x} - 1 + 2x}{x^2}.$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 2x - 12x}{x^3}.$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} 2x - 6x}{x^3}.$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-5x} - 1 + 5x}{x^2}.$$

$$39. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x - 6x}{x^3}.$$

$$32. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{\frac{x}{2}} - 2 - x}{x^2}.$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1 - 2x}{x^2}.$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x) + 3x}{x^2}.$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x - 4x}{x^3}.$$

$$40. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+0,5x) - x}{x^2}.$$

В задачах **41-50** провести полное исследование функции и построить её график.

$$41. y = (x^3 + 4)/x^2.$$

$$43. y = 2/(x^2 + 2x).$$

$$45. y = 12x/(9 + x^2).$$

$$47. y = (4 - x^3)/x^2.$$

$$49. y = (2x^3 + 1)/x^2.$$

$$42. y = (x^2 - x + 1)/(x - 1).$$

$$44. y = 4x^2/(3 + x^2).$$

$$46. y = (x^2 - 3x + 3)/(x - 1).$$

$$48. y = (x^2 - 4x + 1)/(x - 4).$$

$$50. y = (x - 1)^2/x^2.$$

4. Примеры решения задач контрольной работы

Пример 1. Найти пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{6x^2 + 3x - 3}{5x^2 + 4x - 1}$ при 1) $x \rightarrow 1$, 2) $x \rightarrow -1$, 3) $x \rightarrow \infty$;

б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{x - 3} - \sqrt{7 - x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin 2x}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n + 2}{7n - 3} \right)^{14n - 3}$.

Решение.

а)

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 3x - 3}{5x^2 + 4x - 1} &= \left| \begin{array}{l} \text{Заменим в выражении} \\ \text{аргумент его предельным значением.} \end{array} \right. \frac{6x^2 + 3x - 3}{5x^2 + 4x - 1} \\ &= \\ &= \frac{6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 3}{5 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x^2 + 3x - 3}{5x^2 + 4x - 1} = \left| \begin{array}{l} \text{При } x = -1 \text{ числитель и} \\ \text{знаменатель дроби} \\ \text{обращаются в нуль, получаем} \\ \text{неопределенность вида } \frac{0}{0}. \end{array} \right. =$$

$$= \left[\frac{0}{0} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Разложим числитель и знаменатель на множители} \\ \text{по формуле } ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \\ \text{где } x_1, x_2 - \text{ корни соответствующего квадратного} \\ \text{уравнения.} \\ \text{Одним из корней квадратного уравнения} \\ 6x^2 + 3x - 3 = 0 \\ \text{является } -1, \text{ тогда по теореме Виета второй корень} \\ \text{равен } \frac{1}{2}, \text{ аналогично корни уравнения } 5x^2 + 4x - 1 = 0 \\ \text{равны } -1 \text{ и } \frac{1}{5}. \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6(x - (-1))(x - \frac{1}{2})}{5(x - (-1))(x - \frac{1}{5})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6(x - \frac{1}{2})}{5(x - \frac{1}{5})} = \frac{6(-1 - \frac{1}{2})}{5(-1 - \frac{1}{5})} =$$

$$= \frac{6 + 3}{5 + 1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 3x - 3}{5x^2 + 4x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Делим числитель и знаменатель} \\ \text{почленно на наивысшую из} \\ \text{имеющихся степеней} \\ \text{переменной } x, \text{ т. е. на } x^2. \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2}}{5 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}} = \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 6 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{6 + 0 - 0}{5 + 0 - 0} = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Ответ: $1 \frac{1}{5}$.

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{x - 3} - \sqrt{7 - x}} = \left| \begin{array}{l} \text{При } x = 5 \text{ числитель и} \\ \text{знаменатель дроби обращаются} \\ \text{в нуль, получаем} \\ \text{неопределенность вида } \frac{0}{0} \end{array} \right| =$$

$$= \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{умножим числитель и знаменатель} \\ \text{дроби на число, сопряженное знаменателю,} \\ \text{т. е. на } \sqrt{x - 3} + \sqrt{7 - x} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(\sqrt{x - 3} + \sqrt{7 - x})}{(\sqrt{x - 3} - \sqrt{7 - x})(\sqrt{x - 3} + \sqrt{7 - x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(\sqrt{x - 3} + \sqrt{7 - x})}{(\sqrt{x - 3})^2 - (\sqrt{7 - x})^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x})}{(x-3) - (7-x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x})}{x-3-7+x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x})}{2x-10} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x})}{2(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5-3} + \sqrt{7-5}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Воспользуемся следующими} \\ \text{формулами эквивалентности:} \\ \text{если при } x \rightarrow x_0 \quad u \rightarrow 0, \text{ то при } x \rightarrow x_0 \\ u \sim \sin u \sim \arcsin u \sim tg u \sim arctg u \sim \\ \sim e^u - 1 \sim \ln(1+u). \\ \text{при } x \rightarrow 0 \quad 4x \rightarrow 0 \Rightarrow e^{4x} - 1 \sim 4x; \\ \text{при } x \rightarrow 0 \quad 2x \rightarrow 0 \Rightarrow \sin 2x \sim 2x. \end{array} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{2x} = 2.$$

Ответ: 2

$$\begin{aligned}
\text{r) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n+2}{7n-3} \right)^{14n-3} &= [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n-3+5}{7n-3} \right)^{14n-3} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n-3}{7n-3} + \frac{5}{7n-3} \right)^{14n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{7n-3} \right)^{14n-3} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{7n-3}{5} \right)} \right)^{\frac{7n-3}{5} \cdot \frac{5}{7n-3} \cdot (14n-3)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{7n-3}{5} \right)} \right)^{\frac{7n-3}{5}} \right]^{\frac{5(14n-3)}{7n-3}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{7n-3}{5} \right)} \right)^{\frac{7n-3}{5}} \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(14n-3)}{7n-3}} =
\end{aligned}$$

$$= \left| \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(14n - 3)}{7n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 14n}{7n} = 10 \\ \text{при } n \rightarrow \infty \quad \frac{7n - 3}{5} \rightarrow \infty, \\ \text{по второму замечательному пределу:} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{7n - 3}{5} \right)} \right)^{\frac{7n - 3}{5}} = e \end{array} \right| = e^{10}$$

Ответ: e^{10} .

Пример 2. Исследовать функцию на непрерывность и

построить эскиз графика: $y = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1; \\ x + 1, & x < 1. \end{cases}$

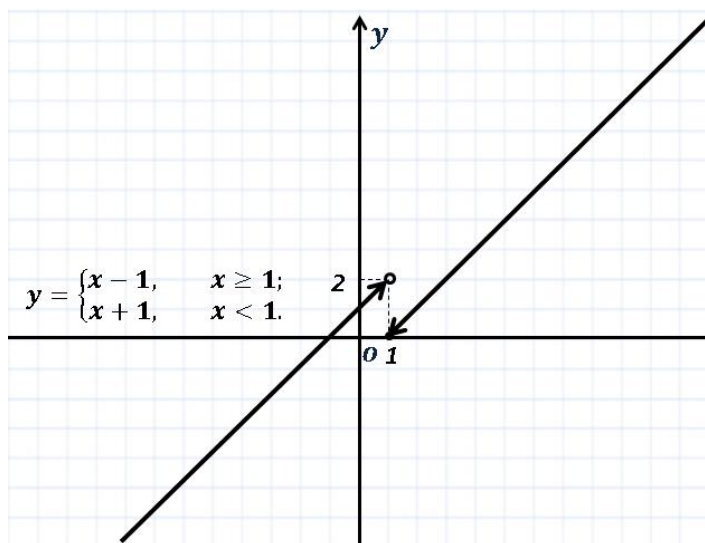
Функция является непрерывной в точке x_0 при соблюдении трёх условий:

1. Функция определена в точке x_0 .
2. Существует предел функции в точке x_0 , при этом правый и левый пределы равны: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
3. Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

При $x = 1$ функция определена, $y(1) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 - 0} (x + 1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 + 0} (x - 1) = 0.$$

Имеем: $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$, таким образом, в точке $x = 1$ функция терпит неустранимый разрыв первого рода.



Пример 3. Найти производные данных функций:

а) $y = 4x^3 - \frac{6}{x^3\sqrt{x}} + 3$; б) $y = \ln \sqrt[5]{\left(\frac{3x^2+1}{2x^4+5}\right)^3}$;

в) $y = \arctg \sqrt{x^3 - 1}$; г) $y = 5^{x^2-3} + 3\sqrt[3]{x} \cdot \sin 2x$.

а) $y' = \left(4x^3 - \frac{6}{x^3\sqrt{x}} + 3\right)' =$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Приведем функцию } \mathbf{y} \text{ к виду, удобному для} \\ \text{дифференцирования, используя правила действия} \\ \text{со степенями:} \\ y = 4x^3 - \frac{6}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}} + 3 = 4x^3 - \frac{6}{x^{\frac{7}{2}}} + 3 = 4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} + 3. \end{array} \right| =$$

$$= \left(4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} + 3 \right)' = \left| \begin{array}{c} \text{Используем правило} \\ \text{дифференцирования} \\ \text{суммы и разности функций:} \\ (\mathbf{u} \pm \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \pm \mathbf{v}' \end{array} \right| =$$

$$= (4x^3)' - \left(6x^{-\frac{7}{2}} \right)' + 3' = 4 \cdot 3x^{3-1} - 6 \cdot \left(-\frac{7}{2} \right) x^{-\frac{7}{2}-1} + 0 =$$

$$= 12x^2 + 21x^{-\frac{9}{2}} = 12x^2 + \frac{21}{\sqrt{x^9}}.$$

$$\text{Ответ: } \mathbf{y}' = 12x^2 + \frac{21}{\sqrt{x^9}}.$$

$$\text{б) } y' = \left(\ln \sqrt[5]{\left(\frac{3x^2+1}{2x^4+5} \right)^3} \right)' =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Приведем функцию } y \text{ к виду, удобному для} \\ \text{дифференцирования, используя правила действия} \\ \text{со степенями и свойства логарифма:} \\ \ln \sqrt[5]{\left(\frac{3x^2+1}{2x^4+5}\right)^3} = \ln \left(\frac{3x^2+1}{2x^4+5}\right)^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5} \ln \left(\frac{3x^2+1}{2x^4+5}\right) = \\ = \frac{3}{5} (\ln(3x^2+1) - \ln(2x^4+5)). \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{5} (\ln(3x^2+1) - \ln(2x^4+5))' = \frac{3}{5} ((\ln(3x^2+1))' -$$

$$- (\ln(2x^4+5))') = \left| \begin{array}{l} \text{Используем формулу:} \\ (\ln u)' = \frac{u'}{u}. \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{5} \left(\frac{(3x^2+1)'}{3x^2+1} - \frac{(2x^4+5)'}{2x^4+5} \right) = \frac{3}{5} \left(\frac{6x}{3x^2+1} - \frac{8x^3}{2x^4+5} \right).$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{5} \left(\frac{6x}{3x^2+1} - \frac{8x^3}{2x^4+5} \right).$$

$$\text{в) } y' = (\operatorname{arctg} \sqrt{x^3-1})' = \left| \begin{array}{l} \text{Используем формулу:} \\ (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}. \end{array} \right| =$$

$$= \frac{(\sqrt{x^3-1})'}{1 + (\sqrt{x^3-1})^2} = \frac{\left((x^3-1)^{\frac{1}{2}}\right)'}{1 + x^3 - 1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{В числителе используем формулу:} \\ (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'. \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(x^3 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^3 - 1)'}{x^3} = \frac{\frac{1}{2}(x^3 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2}{x^3} =$$

$$= \frac{3}{2x\sqrt{x^3 - 1}}.$$

Ответ: $y' = \frac{3}{2x\sqrt{x^3 - 1}}.$

г) $y' = (5^{x^2-3} + 3\sqrt[3]{x} \cdot \sin 2x)' = (5^{x^2-3})' + (3\sqrt[3]{x} \cdot \sin 2x)' =$

Используем формулу:

$$\left| \begin{array}{l} (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', \text{ а так же правило} \\ \text{дифференцирования произведения:} \\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{u}. \end{array} \right| =$$

$$= 5^{x^2-3} \cdot \ln 5 \cdot (x^2 - 3)' + \left(3x^{\frac{1}{3}}\right)' \cdot \sin 2x + (\sin 2x)' \cdot 3\sqrt[3]{x} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Используем формулы:} \\ (C)' = 0; \\ (\mathbf{u}^n)' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n-1} \cdot \mathbf{u}'; \\ (\sin \mathbf{u})' = \cos \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'. \end{array} \right| = 5^{x^2-3} \cdot \ln 5 \cdot 2x + 3 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sin 2x +$$

$$+ \cos 2x \cdot (2x)' \cdot 3\sqrt[3]{x} = 2x \cdot \ln 5 \cdot 5^{x^2-3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \sin 2x +$$

$$+ 6 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \cos 2x.$$

Ответ: $2x \cdot \ln 5 \cdot 5^{x^2-3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \sin 2x + 6 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \cos 2x.$

Пример 4. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{Используем правило Лопиталя:} \\ \text{Если функции } f(x) \text{ и } \varphi(x) \\ \text{дифференцируемы в некоторой} \\ \text{окрестности точки } x_0 \text{ за исключением,} \\ \text{может быть, самой точки } x_0, \text{ причем} \\ \text{в этой окрестности } \varphi'(x) \neq 0, \text{ и если} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0 \text{ или} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty, \text{ то} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(6x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Пример 5. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$

Исследование будем проводить по следующей схеме:

- 1) найти область определения функции и исследовать ее поведение на границах области;
- 2) исследовать функцию на непрерывность;
- 3) определить, является ли данная функция четной, нечетной;
- 4) найти интервалы возрастания и убывания функции и точки ее экстремума;
- 5) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба;
- 6) найти асимптоты графика функции.

Решение.

1. Областью определения функции (**D**) является вся числовая прямая, за исключением точки с абсциссой $x = 1$, в которой знаменатель функции обращается в нуль, т.е.

$$D: (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$\text{а) } x \rightarrow -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty;$$

$$\text{б) } x \rightarrow 1-0; \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty;$$

$$\text{в) } x \rightarrow 1+0; \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \infty; \lim_{x \rightarrow 1+0} y = \infty;$$

$$\text{г) } x \rightarrow \infty; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \infty; \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty.$$

2. Функция непрерывна во всей области определения как частное двух непрерывных функций.
3. Если функция четная, то выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, если нечетная, то выполняется равенство

$f(-x) = -f(x)$, если ни одно из этих равенств не выполняется, то функция не является ни четной, ни нечетной. Найдем $f(-x)$.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2(-x) + 2}{-x - 1} = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x - 1}.$$

$f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, значит, функция ни четная, ни нечетная.

4. Для нахождения точек экстремума найдем критические точки функции, т.е. те точки, в которых первая производная обращается в нуль или не существует.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \right)' = \\ &= \frac{(x^2 - 2x + 2)' \cdot (x - 1) - (x^2 - 2x + 2)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{(2x - 2) \cdot (x - 1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}. \end{aligned}$$

Производная не существует только при $x = 1$, где функция не определена, найдем значения x , при которых она обращается в нуль.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x - 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 2. \end{cases}$$

Вычислим значение функции при $x = 0$ и $x = 2$:

$$f(2) = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 2}{2 - 1} = 2;$$

$$f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 2}{0 - 1} = -2.$$

Получили две критические точки $A_1(0; 2)$ и $A_2(0; -2)$, которые проверим на экстремум с помощью первого достаточного признака. Для этого исследуем, как ведет себя первая производная этой функции при переходе через критические точки.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; \infty)$
y'	+	0	—	не сущ.	—	0	+
y	↗	макс.	↘	не сущ.	↘	мин.	↗

При переходе через точку A_1 производная меняет знак с "+" на "-", значит, в этой точке максимум функции, а при переходе через точку A_2 — с "-" на "+", значит, в этой точке функция достигает своего минимума. Там, где производная положительна, функция возрастает, где отрицательна — убывает.

5. Для определения точек перегиба и направления вогнутости функции найдем вторую производную.

$$\begin{aligned}
 y'' &= \left(\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \right)' = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \\
 &= \frac{(x^2 - 2x)' \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2x)((x-1)^2)'}{(x-1)^4} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2x - 2) \cdot (x - 1)^2 - (x^2 - 2x) \cdot 2 \cdot (x - 1)}{(x - 1)^4} = \\
&= \frac{2 \cdot (x - 1)^3 - (x^2 - 2x) \cdot 2 \cdot (x - 1)}{(x - 1)^4} = \\
&= \frac{2 \cdot (x - 1)((x - 1)^2 - (x^2 - 2x))}{(x - 1)^4} = \\
&= \frac{2 \cdot (x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x)}{(x - 1)^3} = \frac{2}{(x - 1)^3};
\end{aligned}$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль, поэтому точек перегиба у функции нет. Знак второй производной зависит от знака ее знаменателя:

$y'' > 0$, если $(x - 1)^3 > 0$, т.е. $x > 1$;

$y'' < 0$, если $(x - 1)^3 < 0$, т.е. $x < 1$;

Таким образом, функция вогнута на интервале $(1; \infty)$ и выпукла на интервале $(-\infty; 1)$.

6. Определим, имеет ли функция асимптоты. Вернемся к исследованиям в пункте **1**: из **1 а), 1 г)** по определению следует, что горизонтальных асимптот у функции нет; из **1 б), 1 в)** - также по определению следует, что $x = 1$ является вертикальной асимптотой функции. Для того, чтобы существовала наклонная асимптота $y = ax + b$ необходимо существование конечного отличного от нуля предела

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}.$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{(x - 1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1;$$

b определяется по формуле $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax)$

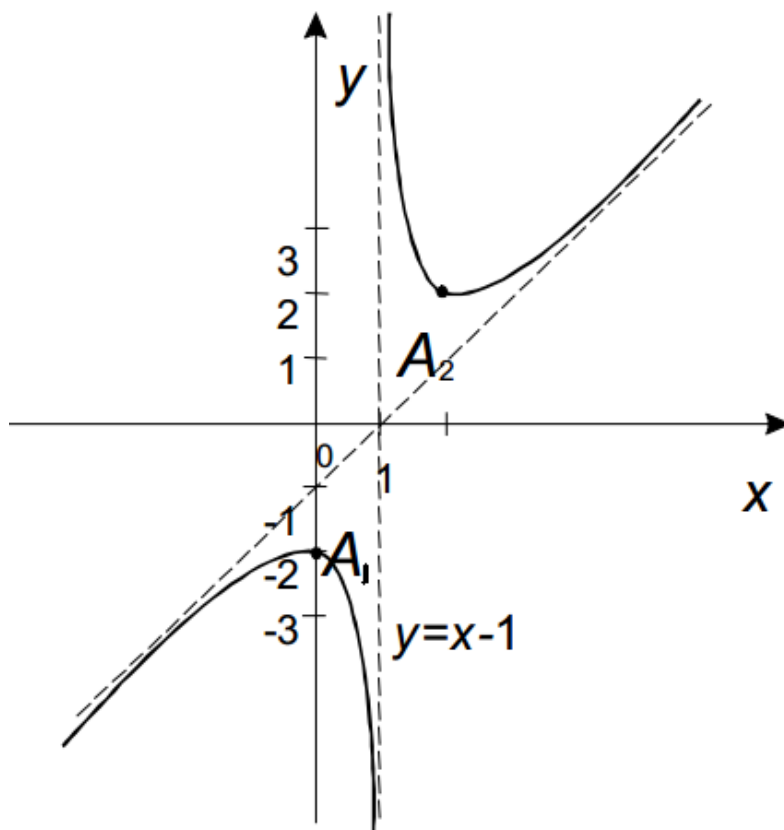
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x + 2}{x - 1} \right) = -1.$$

Таким образом, наклонная асимптота существует и имеет вид $y = ax + b$

7. По полученным исследованиям строим график функции

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$



Список вопросов по математическому анализу 1 курс 1

семестр

1. Предел числовой последовательности.
2. Предел функции в бесконечности.
3. Предел функции в точке.
4. Бесконечно малые величины. Связь бесконечно малых величин с пределами функций.
5. Свойства бесконечно малых величин.
6. Бесконечно большие величины, их свойства.
7. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами.
8. Основные теоремы о пределах.
9. Первый замечательный предел.
10. Второй замечательный предел.
11. Непрерывность функции в точке.
12. Свойства функций непрерывных в точке.
13. Свойства функций непрерывных на отрезке.
14. Определение производной, ее геометрический и физический смысл.
15. Зависимость между непрерывностью функции и дифференцируемостью.
16. Правила дифференцирования.
17. Производная сложной функции. Производная функции, заданной неявно.
18. Производная обратной функции. Производная параметрически заданной функции.
19. Таблица производных элементарных функций.
20. Производная показательно-степенной функции.
21. Теорема Ролля.
22. Теорема Лагранжа.
23. Правило Лопиталя.

24. Достаточное условие возрастания (убывания) функции.
25. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума.
26. Достаточное условие экстремума.
27. Наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке.
28. Выпуклость функции. Достаточное условие выпуклости функции вверх (вниз).
29. Точка перегиба. Необходимое условие перегиба. Достаточное условие.
30. Асимптоты графика функции.
31. Дифференциал функции, его свойства.
32. Инвариантность формы дифференциала.
33. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
34. Понятие о дифференциалах высших порядков.
35. Первообразная функция и неопределенный интеграл.
36. Свойства неопределенного интеграла.
37. Интегралы от основных элементарных функций.
38. Метод интегрирования по частям.
39. Универсальная тригонометрическая подстановка.
40. Метод внесения под знак дифференциала.

Список основной литературы

1. Красс М.С. Математика для экономического бакалавриата: Учебник /М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. –

М.: НИЦ ИНФРА-М, 2020. – 472 с.

2. Шершнеv В.Г. Математический анализ: Учебное пособие / В.Г. Шершнеv. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2019. – 288 с.

Список дополнительной литературы

1. Берман А.Ф. Краткий курс математического анализа: Учебник / А.Ф. Берман, И.Г. Араманович. – М.: Лань, 2010. – 736 с.
2. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – 8-е изд., испр. и доп. – М.: Лань, 2014. – 464 с.

Математический анализ: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы №1

Составители: Бабин Владислав Николаевич
Бурков Сергей Николаевич
Грунина Мария Викторовна
Журавская Светлана Александровна.
Фомина Татьяна Викторовна

Подписано к печати “__” _____ 201_ г. Формат 84×108/32
Объём 1,4 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160

