НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТОМСКИЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ
– ФИЛИАЛ

Кафедра экономики и права

Математика и математическая статистика
Учебное пособие

Новосибирск 2021

УДК 517: 519.22
ББК 22.1 я 73

Автор-составитель: канд. биол.наук, доцент кафедры экономики и права
Н. Н. Рябова

Рецензенты:
канд. техн. наук, Р. Г. Бердникова (Томский СХИ)
канд. физ.-мат. наук, Н. А. Мельникова (Северский технологический институт)

Математика и математическая статистика/. Учебное пособие / автор-составитель Н. Н. Рябова. Новосибирский государственный аграрный университет. Томский сельскохозяйственный институт – филиал; – Новосибирск: ИЦ НГАУ «Золотой колос», 2021. – 118 с.

Учебное пособие составлено в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математика и математическая статистика». В пособии рассматриваются материалы по матрицам, определителям матриц, вопросы интегрального исчисления, а также основы математической статистики. Приведены решения типовых примеров и задач, необходимые приложения и сформулированы задания для выполнения контрольной работы, а также задачи для самостоятельного решения. Предназначено для студентов всех форм обучения по направлениям подготовки 35.03.04 «Агрономия», 35.03.07 «Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции».

Утверждено и рекомендовано к изданию учебно-методическим советом Томского СХИ (протокол №5 от 29 июня 2021)

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие разработано в соответствии с требованиями ФГОС и программой курса «Математика и математическая статистика» для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям 35.03.04 «Агрономия», 35.03.07 «Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции». Современная подготовка будущих специалистов сельскохозяйственного профиля основана на формировании системы фундаментальных и профессиональных знаний, в том числе математических. Знание математического аппарата позволяет развивать у обучающихся компетенции, соответствующие направлению их подготовки и необходимые для эффективного решения профессиональных задач в области агрономии и животноводства.

Пособие включает материал двух модулей: «Математика» и «Математическая статистика». Темы каждого модуля содержат теоретический материал. Изложение теории сопровождается разбором примеров, в конце каждой темы представлены вопросы и задачи для самостоятельной работы. Предложенные варианты заданий могут быть использованы для аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся, а также для проведения текущей и промежуточной аттестации.

Автор пособия надеется, что изучение материала принесет не только пользу студентам при обучении в вузе, но и будет способствовать развитию их математической культуры.

СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Модуль «Математика»

Тема 1. Матрицы. Действия над матрицами. Свойства операций над матрицами.

Виды матриц. Определители 1-го, 2-го и 3-го порядков. Некоторые сведения из теории перестановок. Определитель n-го порядка. Свойства определителей. Обратная матрица.

Тема 2. Интегральное исчисление функции одной переменной. Методы интегрирования.

Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен. Метод подведения под знак дифференциала. Метод замены переменной. Метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование тригонометрических выражений. Интегрирование иррациональных выражений.

Модуль «Математическая статистика»

Тема 3. Случайные величины и их основные характеристики

Виды случайных величин. Закон распределения дискретной случайной величины. Функция распределения вероятностей случайной величины. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины. Математическое ожидание. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

Тема 4. Законы распределения случайных величин

Законы распределения дискретных случайных величин: биномиальное распределение, распределения, близкие к геометрическому, распределение Пуассона (Закон редких явлений). Законы распределения непрерывных случайных величин: равномерное распределение, нормальный закон распределения.

Тема 5. Закон больших чисел

Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева. Теорема Бернулли.

Тема 6. Выборочный метод математической статистики

Виды выборок. Способы отбора. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма. Числовые характеристики вариационного ряда. Статистические оценки параметров распределения. Интервальные оценки параметров распределения. Выборочные распределения и их характеристики.

Тема 7. Проверка статистических гипотез

Понятие статистической гипотезы и статистического критерия, основные типы статистических гипотез. Ошибки 1-го и 2-го рода, уровень значимости, мощность критерия. Гипотезы о законе распределения. Гипотезы о числовом значении генерального среднего и дисперсии.

2. МОДУЛЬ «МАТЕМАТИКА»

2.1. Матрицы. Действия над матрицами. Свойства операций над матрицами

Основные определения

Матрицей размера $m_x n$ называется прямоугольная таблица чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицы обычно обозначаются заглавными латинскими буквами, их элементы – соответствующими прописными буквами с индексами: A= A=$\|a_{ij}\|$.

Векторами назовем матрицы, состоящие из одной строки или одного столбца.

Матрицы, у которых число строк и столбцов совпадает, называются ***квадратными.*** *Элементы* a_{11}, a_{22} , … $a_{кк}$ *образуют* ***главную диагональ*** *матрицы, а их сумма является* ***следом квадратной матрицы***

Квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы суть нули, называется ***единичной*** *матрицей.*

Квадратная матрица, у которой все элементы выше *(ниже) главной диагонали равны нулю, называется* ***нижне(верхне)-треугольной*** *(или просто треугольной).*

Матрица, являющаяся одновременно ***нижне-*** *и* ***верхне-треугольной*** *называется* ***диагональной.***

Матрица, все элементы которой нули, называется ***нулевой*** *и обозначается O.*

Ниже мы будем рассматривать матрицы, элементами которых являются действительные числа. Множество всех матриц размера $m_x n$ обозначим $M_{m_x n}$. Для множества квадратных матриц размера $m_x n$ примем обозначение M_n, и будем говорить, что рассматриваем матрицы порядка n. Множество всех векторов – столбцов длины m обозначим R^m.

Пример 1. Пример 1. Матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ являются матрицами размера 2_x3 и 3_x2 соответственно. Элементами матриц C и D являются функции:

$$C=\begin{pmatrix} x^3 & 2x-1 \\ 1-x & x^4 \\ 2x+x^4 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } D=\begin{pmatrix} \ln x & 3\sin 2x \\ \arccos 2x & 2e^{\cos x} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ является нижне-треугольной.

Матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ является единичной порядка 3.

Матрица $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ является диагональной матрицей второго порядка.

Равенство матриц

Две матрицы A и B называются ***равными****, если они одинакового размера и соответствующие элементы обеих матриц равны.*

Пример 2. Выяснить, какие из следующих матриц равны: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Сравнивать между собой можно лишь матрицы A и B, т.к. они одинакового размера, а соответственные элементы равны лишь у матриц A и B, следовательно, они равны.

Транспонирование матриц

Пусть матрица A имеет вид $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Тогда матрица $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

называется ***транспонированной*** *к матрице A.*

При транспонировании строки и столбцы матрицы меняются местами.

Пример 3. Пусть $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Транспонированными к ним будут матрицы

$$A^{\text{т}}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B^{\text{т}}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сложение матриц

Операция сложения определена для матриц одного размера. Пусть A и $B \in M_{mxn}$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Суммой матриц A и B называется матрица:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Сложим две матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 2+3 & 4+5 & 3+7 \\ 6+1 & 1+0 & 2+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 9 & 10 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции сложения матриц

Операция сложения матриц коммутативна и ассоциативна, т.е.

$A+B=B+A$ – коммутативность.

$(A+B)+C=A+(B+C)$ – ассоциативность

Доказательство следует из соответствующих свойств действительных чисел:

1) $A+O=O+A$. Здесь O – матрица того же размера, что и матрица A.

2) Для любой матрицы A существует единственная такая матрица B, что $A+B=O$.

Матрица B называется **противоположной** матрице A *и обозначается* $-A$, *если* $A+B=O$. *С помощью противоположной матрицы вводится понятие вычитания матриц, а именно* $A-B=A+(-B)$.

Операция сложения и транспонирования связаны соотношением:

$$(A+B)^T = A^T + B^T .$$

Доказательство:

$$\mathrm{A}=\|a_{ij}\|,\ \mathrm{B}=\|b_{ij}\|\ ;\ A^{\mathrm{T}}=\|a_{ji}\|,\ B^{\mathrm{T}} = \|b_{ji}\|;\ A+B=\|a_{ij}+b_{ij}\|;$$

$$(A+B)^{\mathrm{T}}=\|a_{ji}+b_{ji}\|=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$$

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

на число λ называется матрица

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Умножим матрицу *A* на действительное число *λ*.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ \lambda=0{,}5;\ B=\lambda\cdot\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}5\cdot 2 & 0{,}5\cdot 6 \\ 0{,}5\cdot 4 & 0{,}5\cdot 1 \\ 0{,}5\cdot 3 & 0{,}5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0{,}5 \\ 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции умножения матрицы на число

1) $1A = A$;

2) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;

3) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$;

4) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;

5) $(\lambda A)^T=\lambda\, A^T$.

Умножение матриц

Даны две матрицы A и B:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mr} \end{pmatrix}.$$

Если число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, тогда их произведение определяется так:

$$A\cdot B=AB=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mr} \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и

$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, необходимо их перемножить.

Решение. Т.к. число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, то можно говорить о произведении матрицы A на матрицу B:

$$AB=\begin{pmatrix} 2\cdot3+4\cdot5+3\cdot7 & 2\cdot1+4\cdot0+3\cdot2 & 2\cdot2+4\cdot1+3\cdot4 \\ 6\cdot3+1\cdot5+2\cdot7 & 6\cdot1+1\cdot0+2\cdot2 & 6\cdot2+1\cdot1+2\cdot4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 47 & 8 & 20 \\ 37 & 10 & 21 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в данном случае произведение *BA* не существует, т.к. число столбцов матрицы *B* не совпадает с числом строк матрицы *A*.

Свойства операции умножения матриц

1) Если $AM_{m\times n}$, $BM_{n\times r}$, то $AB_{m\times r}$.

2) Умножение матриц, вообще говоря, некоммутативно, т.е., если *AB* и *BA* существует, то не обязательно *AB*=*BA*. В этом заключается одно из отличий операции умножения матриц от операции умножения чисел (последнее всегда коммутативно).

Пример 7.

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. $AB=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -4 & 18\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}10 & 8\\ 10 & 6\end{pmatrix}$,

т.е $AB\neq BA$.

Матрицы, для которых AB=BA, называются ***перестановочными***.

Простейшим примером матрицы, перестановочной со всеми квадратными, является единичная матрица соответствующего порядка.

Пример 8.

$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,

$AB=\begin{pmatrix}6 & 14 & 12\\ 0 & 6 & 14\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}=BA$.

3) Умножение матриц ассоциативно: $(AB)C=A(BC)$ (при условии существования указанных произведений).

4) Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения:

$(A+B)C=AC+BC$, $F(A+B)=FA+FB$.

5) $(\lambda A)B=\lambda(AB)=A(\lambda B)$.

6) $=A^T\,B^T$.

7) Пусть E – единичная матрица. Тогда для любой квадратной матрицы A того же порядка, что и E, $EA=AE=A$.

Отметим ещё одно отличительное свойство умножения матриц: произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным нулю. Ненулевые матрицы A и B, удовлетворяющие условию $AB=O$, называются ***истинными делителями нуля.***

Пример 9.

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -1 & -2\end{pmatrix}$. $AB=0; BA=\begin{pmatrix}15 & 45\\ -5 & -15\end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $AB=BA=0$.

Операция возведения матрицы в целую положительную степень определяется как: $A^k = AA\ A\dots\ A$ (произведение k сомножителей).

Скалярное произведение векторов

Пусть $a=(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $b=(b_1, b_2, \dots, b_k)$ *– векторы одинаковой размерности. Их* ***скалярным произведением*** *назовём число* $(a, b)=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_kb_k$.

Свойства скалярного произведения:

1) $(a,b)=(b,a)$;

2) $(a,b+c)=(a,b)+(a,c)$;

3) $(\lambda A)B=\lambda(AB)$, где λ – некоторое число.

Пример 10. Вычислить скалярное произведение векторов a (3, 5, 1, –7) и b (–1,3,5,4).

Решение. $(a, b)=3\cdot(-1)+5\cdot 3+1\cdot 5+(-7)\cdot 4=-11$.

Многочлен от матрицы

Пусть дан многочлен $f(t)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n$ и квадратная матрица A.

Многочленом *f от матрицы A назовем выражение: $f(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\ldots+a_{n-1}A+a_nE$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.*

Пример 11.

а) Найти значение многочлена $f(t)=2t–3E$ от матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. Многочлен $f(A)$ имеет вид:

$$f(A)=2A-3E=2\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 8 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 8 & -1\end{pmatrix}.$$

б) Найти значение многочлена $f(t)=3t^2–5t+2E$ от матрицы $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Решение.

$f(d)=3d^2–5d+2E=$

$$3\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^2-5\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$= 3\begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 21 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

Квадратная матрица A называется ***обратимой****, если существует матрица B такая, что AB=BA=E. Матрица B называется* ***обратной*** *матрицей для матрицы A и обозначается* A^{-1}.

Следовательно, для обратимых матриц выполняется равенство:

$$AA^{-1}= A^{-1}A=\mathrm{E}.$$

Свойства обратимых матриц

1) Обратная матрица определяется единственным образом;

2) Если A обратима, то A^{-1} также обратима и $(A^{-1})^{-1} = A$;

3) $(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}$;

4) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}, \lambda \neq 0$;

5) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

6) $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$.

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц называются следующие:

1) перемена местами двух строк $C_i \to C_j$ или столбцов $C^i \to C^j$;

2) умножение строки или столбца на число λ, отличное от нуля (обозначается λC_i или λC^i);

3) добавление к одной строке или столбцу другой строки или столбца, умноженных на произвольное число (обозначается $C_i + \lambda C_j$ или $C^i + \lambda C^j$).

Пример 12. Пусть дана матрица $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Выполним преобразование первого типа – поменяем местами вторую и третью строки. Тогда получим: $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Выполним преобразование второго типа – умножим первую строку исходной матрицы на 2. В итоге получим: $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Выполним преобразование третьего типа – прибавим ко второй строке первую, умноженную на – 2. Получим матрицу: $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -2 & -7 & -14 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Теорема. *Элементарные преобразования обратимы и обратные им преобразования являются элементарными преобразованиями того же типа:*

1) $C_i \leftrightarrow C_j$ обратно к $C_j \leftrightarrow C_i$;

2) $(\frac{1}{\lambda})\, C_i$ обратно к λC_i, $\lambda \neq 0$;

3) $C_i - C_j$ обратно к $C_i + C_j$.

Для столбцов ситуация аналогична.

Теорема. *Любая матрица путем конечного числа элементарных преобразований может быть приведена к треугольному виду.*

Приведённые матрицы

Матрица называется ***приведённой****, если в каждой её ненулевой строке найдётся хотя бы один ненулевой элемент (он называется ведущим), такой, что в его столбце остальные элементы – нули.*

Например, следующая матрица A имеет приведённый вид:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ведущими элементами являются в первой строке $a_{15}= 1$, во второй строке $a_{21}= -12$, $a_{22}= 2$, в четвертой строке $a_{43}=1$. Заметим, что ведущий элемент в строке не обязан быть единственным (см. вторую строку).

Теорема. *Любая матрица путем конечного числа элементарных преобразований строк может быть сведена к приведенному виду.*

Определители 1-го, 2-го и 3-го порядков

В этом разделе рассматриваются только квадратные матрицы.

Пусть $A = (a)$ *– квадратная матрица первого порядка, т.е. одноэлементная матрица.* ***Определителем,*** *или* ***детерминантом,*** *этой матрицы, обозначаемым* Δ *или* $detA$, *называется число, равное ее элементу*:

$$\Delta = \det A = a.$$

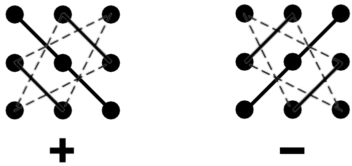
Пример: $A = (-2{,}5)$, $\det A = -2{,}5$.

Определителем, *или* ***детерминантом,*** *квадратной матрицы второго порядка называется число, равное разности произведения элементов матрицы, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали; это число обозначается* Δ, $detA$ *или вертикальными чертами*:

$$\Delta \det A = A|a_{\text{ij}}| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Отметим, что в данной формуле значение определителя задается последним выражением, остальные выражения представляют собой лишь разные виды обозначения определителя.

Определителем, *или* ***детерминантом,*** *квадратной* *матрицы третьего порядка называется число, которое может быть получено из элементов матрицы по так называемому правилу диагоналей и треугольников или правилу Саррюса*:



Для матрицы вида $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ определитель по правилу треугольника вычисляется по формуле:

$\Delta A=$ $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$.

Определитель представляет собой сумму шести слагаемых, три из которых берутся со знаком плюс и три – со знаком минус. Каждое слагаемое есть произведение трех элементов матрицы. Произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, и два произведения элементов, расположенных в вершинах двух равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, и с вершинами в противоположных углах, берутся со знаком плюс. Три произведения, которые строятся по такому же правилу, но относительно побочной диагонали, берутся со знаком минус. Составленная из шести слагаемых сумма (из которых три взяты с плюсом, а другие три – с минусом) и есть определитель квадратной матрицы третьего порядка.

Пример 13. Пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, тогда

определитель будет:

$\Delta A=1\cdot 1\cdot 5+2\cdot 4\cdot(-1)+3\cdot 2\cdot 2-3\cdot 1\cdot(-1)-2\cdot 2\cdot 5-1\cdot 4\cdot 2=-16$.

Для того чтобы ввести понятие определителя квадратной матрицы произвольного порядка, нам потребуются сведения из теории перестановок.

Некоторые сведения из теории перестановок

Пусть имеется n различных объектов. ***Перестановкой*** *из n объектов называется любое расположение их в определенном порядке.*

Пример. Пусть даны фигуры ♠ ♣ ♥. Тогда ♥♣♠ и ♣♥♠ – две различные перестановки этих объектов.

Занумеровав *n* заданных объектов натуральными числами, можно свести их перестановку к перестановке чисел 1, 2, …, n. Так, например, если поставить в соответствие ♠ число 1, ♣ число 2 и ♥ число 3, то две перестановки из приведенного выше примера будут иметь вид (3, 2, 1) и (2, 3 1). Поэтому далее будем рассматривать только перестановки чисел 1, 2, …, n.

Итак, *перестановка из n объектов есть любое конкретное расположение целых чисел от* 1 *до* n ($n \geq 2$). Числа, составляющие перестановку, называются ее *элементами*.

В перестановке важны количество элементов и порядок их расположения. Перестановку принято заключать в круглые скобки. Запятые между элементами перестановки не ставятся, а сами элементы разделяются увеличенными пробелами.

Пример 14. (1 2 3 4 5) и (5 3 4 1 2) – две перестановки из пяти элементов.

В общем виде перестановка из n элементов обозначается $(\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n)$,

где α_i – целые числа от 1 до n, причем все они различные; индекс i обозначает место данного числа в перестановке.

Пусть имеется перестановка $(\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n)$ *чисел* 1, 2, …, n. *Будем говорить, что в этой перестановке два числа* α_i *и* α_j *образуют* ***инверсию***, *если большее число* *предшествует меньшему, т.е. если* $\alpha_i > \alpha_j$ *при* $i < j$.

Пример 15. В перестановке (2 3 1) образуют инверсию числа 2 и 1, а также 3 и 1.

Определение. *Общее количество пар чисел, образующих инверсию, называется* ***числом инверсий*** *перестановки.*

Число инверсий $(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n)$ будем обозначать $s(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n)$ или просто s, когда ясно, о какой перестановке идет речь.

Перестановка называется ***чётной****, если число ее инверсий s чётное, и* ***нечётной****, если число инверсий s нечётное.*

Примеры:

s (1 2 3 4 5) =0 – перестановка четная;

s (3 1 5 4 2) =5 – перестановка нечетная;

s (5 4 3 2 1) =10 – перестановка четная.

Операция перехода от одной перестановки к другой, при которой два элемента меняются местами, а остальные остаются на своих местах, называется ***транспозицией***.

Записывается транспозиция с помощью стрелки. Например, (2 4 3 1) → (2 1 3 4); эта транспозиция состоит в перемене местами чисел 1 и 4.

Теорема. *От любой перестановки из n элементов можно перейти к любой другой перестановке этих же элементов при помощи нескольких последовательно выполненных транспозиций.*

Теорема. *При осуществлении одной транспозиции четная перестановка переходит в нечетную и*, *наоборот*, *нечетная перестановка переходит в четную.*

Пример 16. Перейти от перестановки из четырех элементов (2 3 4 1) к перестановке этих же элементов (1 2 3 4) посредством транспозиций; для каждой перестановки определить число инверсий и наименование (четность или нечетность).

Решение. (2 3 4 1) → (3 2 4 1) → (1 2 4 3) → (1 2 3 4).

s = 3 нечетная, s = 4 четная; s = 1 нечетная; s = 0 четная

Из этого примера видно, что при каждой транспозиции перестановка меняет свое наименование, как и должно быть согласно предыдущей теореме. Отметим, что число инверсий может изменяться при одной транспозиции не обязательно на единицу (в частности, в приведенном примере при второй транспозиции оно изменилось на три). Очевидно, что переход между двумя перестановками может быть реализован не единственным способом.

При доказательстве следующей теоремы нам потребуется одна из теорем комбинаторики, назовем ее Леммой.

Лемма: *Общее количество различных перестановок из n элементов равно* $n!$.

Пример 17. Из трех элементов можно составить 3!=6 перестановок:

(1 2 3), (1 3 2), (2 1 3), (2 3 1), (3 1 2), (3 2 1).

Теорема. *Количество всех четных перестановок из n элементов равно количеству всех нечетных перестановок и равно* $\frac{n!}{2}$.

Доказательство. Прежде всего, отметим, что при любом *n* 2 число является целым, потому что при $n \geq 2$ в факториале участвует в качестве множителя число 2.

Обозначим через *a* количество всех четных и через *b* количество всех нечетных перестановок из *n* элементов. Так как, согласно Лемме, всего имеется $n!$ перестановок из *n* элементов, то $a + b = n!$. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что $a = b$.

Выпишем столбиком все *a* четных перестановок.

Затем в каждой перестановке поменяем местами первые два числа. Полученные таким способом новые перестановки выпишем рядом в виде такого же столбика:

$$a_{\text{штук чётных перестановок}} \begin{pmatrix} \propto_1 & \propto_2 & \propto_3 \dots & \propto_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \dots & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_n \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$a_{\text{штук нечётных перестановок}} \begin{pmatrix} \propto_2 & \propto_1 & \propto_3 \dots & \propto_n \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_3 \dots & \beta_n \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_3 \dots & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_2 & \omega_1 & \omega_3 & \omega_n \end{pmatrix}.$$

Новый столбик состоит из *a* перестановок. Поскольку каждая из них получена из исходной четной перестановки с помощью одной транспозиции, то согласно предыдущей теореме все они нечетные. При этом все они различные. Действительно, если бы среди них нашлись две одинаковые перестановки, то после вторичной перемены местами двух первых чисел в этих перестановках мы пришли бы к двум совпадающим перестановкам в исходном наборе перестановок. Но этого не может быть, потому что все первоначальные перестановки различные.

Количество всех нечетных перестановок из *n* элементов мы обозначили через *b*. Но т. к нет уверенности в том, что во втором столбике (содержащем a различных нечетных перестановок) присутствуют все нечетные перестановки, то мы можем записать пока что только неравенство $a \le b$. Аналогичным образом, поменяв местами в проведенных действиях роли четных и нечетных перестановок, мы докажем неравенство $b \le a$. Из двух полученных неравенств следует, что $a = b$, и теорема доказана.

Определитель *n*-го порядка

Определителем, *или* ***детерминантом,*** *квадратной матрицы A n-го порядка называется число, равное сумме всех* $n!$ *произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца. При этом каждое произведение берется со знаком плюс или минус по следующему правилу.*

Правило для знака*. Если взять какое-либо из произведений, входящих в состав определителя, и расположить в нем сомножители в порядке следования номеров строк: тогда номера столбцов образуют перестановку* $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \dots\ \alpha_n)$ *из n-элементов. Данное произведение берется со знаком плюс, если эта* *перестановка четная, и со знаком минус, если она нечетная.*

Таким образом, если A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, *то*

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n} (-1)^{s(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 .. \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \dots a_{n\alpha_n}$$

где суммирование проводится по всем n! возможным перестановкам номеров столбцов (α_1 α_2 α_3 … α_n).

В первой строке данной формулы выписаны разные виды обозначения определителя, во второй строке – само его значение. Величина, входящая в формулу, равняется либо +1, либо –1 (в зависимости от того, является число инверсий s четным или нечетным). Эта величина стоит множителем при каждом слагаемом под знаком суммы и задает знак слагаемого в соответствии со сформулированным выше правилом для знака. Каждое слагаемое представляет собой произведение n-элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и одному из каждого столбца. Всего в состав определителя матрицы n-

го порядка входят $n!$ слагаемых. Это количество равно количеству различных перестановок номеров столбцов. Половина слагаемых входит в состав определителя со знаком плюс, другая половина – со знаком минус (так как согласно теореме число четных и число нечетных перестановок одинаково).

Определитель матрицы n-го порядка будем именовать *определителем n-го порядка* и будем говорить об элементах, строках и столбцах определителя, понимая под этими терминами соответственно элементы, строки и столбцы матрицы, для которой вычисляется определитель.

Стоит обратить внимание на следующее: 1) понятие определителя вводится только для квадратных матриц; 2) матрица (числовая) есть таблица чисел; определитель матрицы – число (получаемое из элементов матрицы по формуле).

Вычисление определителя n-го порядка на основе одного лишь определения – весьма трудоемкий процесс, ибо количество слагаемых, из которых составляется определитель, очень быстро растет с увеличением n. (Поскольку количество слагаемых равно $n!$, то для определителя 4-го порядка имеем 24 слагаемых, для 5- го порядка – 120 слагаемых, для 6-го порядка – 720 слагаемых и т. д.). В дальнейшем будут указаны алгоритмы, позволяющие упростить вычисления. Эти алгоритмы основаны на свойствах определителей.

Свойства определителей

Определители равных квадратных матриц равны, т.е. если A и B – квадратные матрицы одного порядка, то $A = B|A| = |B|$.

Отметим, что обратное утверждение в общем случае неверно, т.е. из выполнения равенства $|A| = |B|$ нельзя заключить, что $A = B$.

Свойство 1. *Если все элементы какой-либо строки или столбца квадратной матрицы равны нулю, то ее определитель равен нулю.*

Свойство 2. *Определитель диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.*

Свойство 3. *Определитель треугольной матрицы равен произведению ее элементов, находящихся на главной диагонали.*

Свойство 4. *При транспонировании определитель матрицы не меняется. Другими словами, определитель транспонированной матрицы равен определителю* *исходной матрицы*: $|A'| = |A|$, *где* A *– произвольная квадратная матрица*; A' *– матрица*, *транспонированная по отношению к матрице* A.

Свойство 5. *Если в квадратной матрице поменять местами две строки* (*или два столбца*), *оставив остальные на своих местах*, *то определитель полученной матрицы будет равен определителю исходной матрицы с противоположным знаком. Иными словами*: *при перемене местами двух строк* (*или двух столбцов*) *определитель меняет знак.*

Свойство 6. *Если квадратная матрица имеет две одинаковые строки* (*или два одинаковых столбца*), *то ее определитель равен нулю.*

Для того чтобы сформулировать следующее свойство определителей, необходимо предварительно ввести два новых понятия.

Пусть $A=(a_{ij})$ *– квадратная матрица* n*-го порядка* ($n \geq 2$). ***Минором*** M_{ij} *элемента* a_{ij} *матрицы* A *называется определитель матрицы* ($n - 1$)*-го порядка*, *получающейся из матрицы* A *в результате изъятия* (*вычеркивания*) i*-ой строки и* j*- го столбца* (*то есть той строки и того столбца*, *на пересечении которых стоит элемент* a_{ij}).

Алгебраическим дополнением A_{ij} *элемента* a_{ij}

квадратной матрицы A n-го порядка ($n \geq 2$) *называется минор* M_{ij} *этого элемента, взятый со знаком*: $A_{ij} = M_{ij}$.

Пример 18. Образовать минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23} квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ 4-го порядка.

Решение. Вычеркиваем в матрице 2-ю строку и 3-й столбец, на пересечении которых находится элемент a_{23}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} & a_{14} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & \cancel{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & \cancel{a_{43}} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Из оставшихся элементов, сохраняя порядок их расположения, образовываем определитель 3-го порядка. Этот определитель и есть требуемый минор, а взятый со знаком $(-1)^{2+3} = -1$, он является искомым алгебраическим дополнением, поэтому сразу пишем ответ.

Ответ: $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$ $A_{23} =- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$.

Важно знать, что:

1) понятия минора и алгебраического дополнения вводятся только для квадратных матриц.

2) минор M_{ij}, как и всякий определитель, есть число (поставленное в соответствие элементу матрицы a_{ij}).

3) алгебраическое дополнение A_{ij} – тоже число, причем оно может отличаться от минора M_{ij} только знаком. Для четной суммы $i + j$ алгебраическое дополнение A_{ij} и минор M_{ij} совпадают, а для нечетной суммы $i + j$ они имеют противоположные знаки (например, $A_{24} = (-1)^{2+4}M_{24} = M_{24}$; $A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -M_{32}$).

4) Каждому элементу матрицы соответствуют свой минор и свое алгебраическое дополнение, поэтому всего можно образовать столько миноров и алгебраических дополнений, сколько у матрицы имеется элементов.

Свойство минора и алгебраического дополнения. *Минор M_{ij} и алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A не зависят от элементов матрицы, находящихся в i-ой строке и в j-ом столбце.*

Это свойство объясняется тем, что минор M_{ij} и алгебраическое дополнение A_{ij}, в соответствии с их определениями, получаются вычеркиванием в матрице i-й строки и j-го столбца. Вследствие этого элементы матрицы, находящиеся в этих строке и столбце, не участвуют в их образовании. Значит, минор M_{ij} и алгебраическое дополнение A_{ij} действительно не зависят от элементов i-й строки и j-го столбца.

Следствие. *Две матрицы, различающиеся элементами только одной строки, имеют одинаковые миноры и алгебраические дополнения для всех элементов этой строки. Аналогичное свойство имеет место для столбцов.*

В самом деле, согласно сформулированному выше свойству, миноры и алгебраические дополнения элементов любой строки матрицы не зависят от самих этих элементов. Следовательно, в случае матриц, указанных в следствии, миноры и алгебраические дополнения элементов их различающихся строк не зависят от самих этих элементов, а определяются только остальными элементами матриц, которые у обеих матриц совпадают. Значит, эти миноры и алгебраические дополнения у обеих матриц одинаковы. Тем самым для строк утверждение доказано. По следствию к свойству 4, подобное свойство выполняется и для столбцов.

Пусть $A=(a_{ij})$ *– квадратная матрица* n*-го порядка* ($n \geq 2$). *Определитель матрицы A равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения, т.е.*

$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}\ldots.+a_{in}A_{in}$ *при любом* $i = 1, 2,.., n$. *Эта формула называется* ***разложением определителя*** $|A|$ ***по элементам i-й строки***.

Аналогично имеет место ***разложение определителя*** $|A|$ ***по элементам j-го столбца***:

$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}\ldots.+a_{nj}A_{nj}$ *при любом* $j = 1, 2,.., n$.

Свойство 8. *Пусть* $A(a_{ij})$ *– квадратная матрица n-го порядка* ($n\geq 2$). *Сумма произведений элементов одной строки матрицы A на алгебраические дополнения соответственных элементов другой строки равна нулю*:

$$a_{k1}A_{l1}+a_{k2}A_{l2}+a_{k3}A_{l3}+\ldots+a_{kn}A_{ln}+0$$

при $k\neq l$ (k, l *– номера строк*, $1\leq k\leq n$, $1\leq l\leq n$).

Аналогично для столбцов:

$$a_{1p}A_{1q}+a_{2p}A_{2q}+a_{3p}A_{3q}+\ldots+a_{np}A_{nq}+0$$

при $p\neq q$ (p, q *– номера столбцов*, $1\leq p\leq n$, $1\leq q\leq n$).

Свойство 9. *Если все элементы какой-либо одной строки (или одного столбца) квадратной матрицы умножить на одно и то же число, то ее определитель также умножится на это число.*

Свойство 10. *Если квадратная матрица A имеет две* *пропорциональные строки (или два пропорциональных столбца), то ее определитель равен нулю.*

Свойство 11. *Если все элементы k-й строки квадратной матрицы A n-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых*:

$$a_{k1} = b_{k1} + c_{k1}, \qquad a_{k2} = b_{k2} + c_{k2}, \ \ldots, \qquad a_{kn} = b_{kn} + c_{kn},$$

то определитель матрицы A равен сумме определителей двух матриц, у которых все элементы, за исключением стоящих в k-й строке, те же, что у матрицы A, а элементами их k-х строк являются соответственно первые и вторые слагаемые в правых частях равенств, т.е.:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k1} + c_{k1} & b_{k2} + c_{k2} & \ldots & b_{kn} + c_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{vmatrix} + + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{k1} & c_{k2} & \ldots & c_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

Аналогичное свойство имеет место для столбцов.

Важно! Определитель суммы матриц в общем случае не равен сумме их определителей, иначе говоря, если F и G – две квадратные матрицы одного порядка, то в общем случае $|F + G| \neq |F| + |G|$.

Пример 19. Найти значение определителя:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 2 & 0 & a \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 4 & 4+a \end{vmatrix}$$

Решение. Представим элементы последнего столбца определителя, равные a, в виде суммы двух слагаемых: $0 + a$:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0+a \\ 1 & 2 & 0 & 0+a \\ 1 & 2 & 3 & 0+a \\ 1 & 2 & 4 & 4+a \end{vmatrix}=\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 2 & 0 & a \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 4 & a \end{vmatrix}.$$

Тогда в правой части этого выражения первый определитель является определителем треугольной матрицы, поэтому, по свойству 3, он равен произведению элементов главной диагонали, т.е. $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Второй определитель имеет пропорциональные первый и последний столбец, значит, по свойству 10, он равен нулю. Поэтому сумма определителей равна 24.

Ответ: $\Delta = 24$.

Свойство 12. *Определитель квадратной матрицы A n-го порядка не изменится, если к элементам одной его строки прибавить соответственные элементы другой строки, умноженные на одно и то же произвольное число.*

Аналогичное свойство имеет место для столбцов.

Свойство 13. *Определитель произведения двух квадратных матриц A и B n-го порядка равен произведению их определителей*: $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

Свойство 14. ***Определитель матрицы A^{-1}***, *обратной к неособенной квадратной матрице A, равен величине, обратной к определителю матрицы A, т.е.*: $|A^{-1}| = |A|^{-1}=\frac{1}{|A|}$ при $|A|\neq 0$.

Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Дать определение матрицы. Привести примеры. Как матрицы обозначаются? Что означает первый индекс в обозначении элемента матрицы? Что означает второй индекс?

2. Перечислить виды матриц, дать их определение и привести примеры различных видов матриц.

3. Является ли квадратная нуль-матрица верхне(нижне)-треугольной, диагональной?

4.Что такое след матрицы? Вычислить след матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Каковы размеры матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;   б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;   г) $(1 \quad 2 \quad 0 \quad -1)$.

6. Чему равны элементы a_{12}, a_{31}, a_{24} в примере 5 пункт в)?

7. Какая из матриц является матрицей-строкой, квадратной, единичной, треугольной?

8. Сформулировать условие равенства матриц. Что такое соответствующие элементы матриц?

9. Какие из следующих матриц равны:

$A = (2 \quad 1 \quad 0)$; $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$,

$F = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$.

10. Дать определение операции транспонирования матрицы. Перечислить свойства этой операции.

11. Записать матрицы, транспортированные данным:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Если матрица $A^{\text{т}}$ имеет вид: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, то каков вид матрицы A?

13. Какие из перечисленных видов матриц не меняют своего вида при транспонировании: треугольные, диагональные, квадратные, нулевые?

14. Дать определение операции сложения матриц. Перечислить свойства этой операции.

15. Что такое противоположная матрица?

16. Какие из матриц можно сложить:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполнить операцию сложения.

17. Дать определение операции умножения матрицы на число. Перечислить свойства этой операции.

18. Матрицы A и B имеют вид: $A\ (4\ \ 5\ \ 6)$, $B\ (7\ \ 8)$. Выполнить операцию умножения.

19. Каковы размеры матрицы C, если известно, что $A \cdot C = B$?

20. Какого размера должны быть матрицы-сомножители A и B, чтобы их произведение $A\ B$ было

матрицей размера: а) 1×2; б) 4×3; в) 3×1; г) 1×1; д) 2×2?

21. Дать определение операции умножения матриц. Перечислить свойства этой операции.

22. Найти произведение матриц AB, если:

а) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 1 & 1\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & 4 & 4\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\\ 1 & 2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3 & 1\\ 0 & 6 & 1 & 0\end{pmatrix}$; е) $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 5 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 6 & 0 & -1\\ 3 & 5 & 4\\ 1 & -2 & 0\\ 8 & 7 & 3\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

23. Найти произведение матриц *ABCD*, если:

а) $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$; $C=(2,\ \ 3)$; $D=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 1\\ 5 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -6 & 2\\ 0 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$; $C=(1\ \ 7\ \ 5\ \ 1\ \ 4)$;

$D=\begin{pmatrix}0\\ 4\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$.

в) $A=(2\ \ 3\ \ 9\ \ 1)$; $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 1\\ 5 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -9 & 2\\ 0 & 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & 2\\ 1 & 3\\ -2 & -2\end{pmatrix}$;

$D=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

24. Найти $\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3(A+B)+\lambda_4 B+\lambda_5 A$, если:

а) $\lambda_1=\frac{2}{3}$; $\lambda_2=\frac{1}{3}$; $\lambda_3=-\frac{1}{3}$; $\lambda_4=-2$; $\lambda_5=\frac{5}{3}$.

$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 1\\ 5 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -6 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -4 & 1\\ -3 & 0 & -1 & 3\\ -5 & 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

б) $\lambda_1=5$; $\lambda_2=4$; $\lambda_3=-2$; $\lambda_4=-3$; $\lambda_5=-6$.

$A=\begin{pmatrix}1/5 & 4 & 0\\ -2 & 2/3 & 1\\ 1 & 2 & 1/6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1/2 & -1/3 & -4\\ -3 & 5/6 & -1\\ 1 & 2 & 1/2\end{pmatrix}$.

25. Найти $(A+B)^{т}$, $B^{т}+A^{т}$, если:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 5 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5 & -4 & 1\\ -5 & 1 & -5\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

26. Найти $(A+B)^{т}\cdot C^{т}\cdot D^{т}$, если:

а) $A=\begin{pmatrix}10 & 20\\ 15 & 25\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$;

$C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 6\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix}10 & -8\\ 14 & 7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 6\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$.

27. Вычислить значение матричного выражения:

а) $(AB)^{15}$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & 6 & 2\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & -5 & -1\\ -1 & -5 & -2\\ -1 & -3 & -1\end{pmatrix}$.

б) $(AB)^{5}$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 8\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 8\\ 9 & 9 & 11\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

28. Вычислить степень матрицы:

$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^{3}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{5}$.

29. Какие матрицы называются перестановочными?

30. Какие виды матриц перестановочны всегда, если их произведение существует?

31. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей:

а) $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

32. Что называется многочленом от матрицы?

33. Вычислить значение многочлена от матрицы:

а) $f(t)=3+2t$; $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; б) $f(t)=3\text{–}2+4t^2$; $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

34. Дать определение обратной матрицы.

35. Чем обратимая матрица отличается от обратной?

36. Перечислить свойства обратимых матриц.

37. Какие преобразования матриц называются элементарными?

38. С помощью элементарных преобразований привести матрицы из примера к треугольному виду.

39. Дать определение приведенной матрицы.

40. Какие из ниже перечисленных матриц являются приведенными?

$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

41. Что такое ранг матрицы?

42. Вычислить ранг матриц из примера 25 пункт а).

43. В чём сходство и отличие операций над матрицами и числами?

2.2. Интегральное исчисление функции одной переменной. Методы интегрирования

В интегральном исчислении изучается понятие интеграла, его свойства и методы вычисления.

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1. Пусть на отрезке $[a;\ b]$ задана функция $f(x)$. Функция $F(x)$ называется *первообразной* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$, если во всех точках этого отрезка $F(x)' = f(x)$.

Теорема 1. Любые две первообразные $F(x)$ и $\Phi(x)$ от данной функции отличаются друг от друга на произвольную постоянную C, т. е. $\Phi(x) = F(x) + C$.

Определение 2. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от этой функции и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, дифференциал $f(x)\,dx$ *подынтегральным выражением*.

Таким образом, по определению $\int f(x)dx = F(x) + C$, $x \in [a;b]$, где $F(x)$ – одна из возможных первообразных от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Теорема 2. Если функция непрерывна на отрезке $[a;b]$, то для нее существует первообразная, а значит, и неопределенный интеграл.

Определение 3. Операция восстановления функций по ее производной, или, что то же самое, нахождение неопределенного интеграла от данной подынтегральной функции, называется *интегрированием* этой функции.

Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию. Поэтому *правильность результата интегрирования проверяется дифференцированием найденной первообразной*.

На основании определения неопределенного интеграла, правил интегрирования и таблицы производных основных элементарных функций можно составить таблицу основных неопределенных интегралов (табл.1).

Таблица 1

Основные неопределенные интегралы

1.$\int u^{\alpha}\, du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$	2. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
3. $\int a^{u}\, du = \frac{a^{u}}{lna} + C$	4. $\int e^{u} du = e^{u} + C$
5.$\int \sin u du \ = -\cos u + C$	6. $\int \cos u du \ = \sin u + C$
7.$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$	8. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{u+a}{u-a} \right\rvert + C$
9. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\rvert + C$	10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
11.$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	12. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -c\operatorname{tg} u + C$
13.$\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left\lvert \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right\rvert + C$	14. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left\lvert \operatorname{tg}(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}) \right\rvert + C$
15.$\int \operatorname{sh} \ u du = \operatorname{ch} \ u + C$	16. $\int \operatorname{ch} \ u du = \operatorname{sh} \ u + C$
17. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -\operatorname{cth} \ u + C$	18. $\int \frac{du}{ch^2 u} = \operatorname{th} \ u + C$

Отметим, что в приведенной таблице буква *u* может обозначать как независимую переменную, так и непрерывно дифференцируемую функцию.

Основные свойства неопределенных интегралов

Свойство 1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\int f(x)dx' = (F(x)+C)' = f(x)$.

Свойство 2. Неопределенный интеграл от производной функции с точностью до произвольной постоянной, т. е. $f(x)$ равен самой функции $\int f(x)dx' = df(x) = f(x) + C$.

Свойство 3. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е. $d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = f(x)dx$.

Свойство 4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Свойство 5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, A=const.

Свойство 6. Если выполняется равенство

$\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax + +b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, где a, b – любые действительные числа, $a \neq 0$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \sin(2x + 1)dx$.

Решение. Используя интеграл 5 из табл. 1 и свойство 6, получим

$$\int \sin(2x+1)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$$

Методы интегрирования

Задача нахождения неопределенных интегралов решается путем сведения их к одному из табличных интегралов (см. табл. 1) или к такому, метод вычисления которого уже известен. Этого можно достичь путем тождественных преобразований подынтегральной функции $f(x)$ или подведением части ее множителей под знак дифференциала, или с помощью удачно выбранной подстановки в подынтегральном выражении, или методом интегрирования по частям, или комбинируя эти методы. Рассмотрим эти методы.

Непосредственное интегрирование

При использовании этого метода достаточно знать таблицу основных интегралов, основные свойства неопределенного интеграла и тождественные преобразования выражений.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int 3\sqrt[5]{x^3}dx$.Проверить дифференцированием полученный результат.

Решение. Согласно свойству 5 выносим за знак интеграла постоянный множитель 3 и преобразуем подынтегральную функцию по формуле $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.

$\int 3\sqrt[5]{x^3}dx = 3\int \sqrt[5]{x^3}dx = 3\int x^{\frac{3}{5}}dx$ (интеграл 1 из табл. 1)

$3\int x^{\frac{3}{5}}dx= 3\frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1}=3\frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}}=3\cdot\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} = \frac{15}{8}\sqrt[5]{x^8}+C$.

Проверка: $(\frac{15}{8}\sqrt[5]{x^8})'=\frac{15}{8}\cdot\frac{8}{5}x^{\frac{3}{5}}=3x^{\frac{3}{5}} = 3\sqrt[5]{x^3} + C$.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int(4^x + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\cos x)dx$.

Решение. Так как интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов от каждого слагаемого (свойство 4), то имеем:

$$\int(4^x + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\cos x)dx = \int 4^x dx + \int\frac{dx}{\sqrt{x}} - 2\int \cos x dx.$$

Каждый из полученных интегралов табличный (см. интегралы 3, 1, 5 из табл. 1). Следовательно:

$\int 4^x dx = \frac{4x}{ln4} + C_1$; $\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} = 2\sqrt{x} + C_2$; $\int \cos x dx = \sin x + C_3$.

Таким образом, $\int(4^x + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\cos x)dx = \frac{4x}{\ln 4} + 2\sqrt{x} - 2\ \sin x + C$.

Проверка: $(\frac{4x}{\ln 4} + 2\sqrt{x} - 2\ \sin x)'$ $=4(\frac{x}{ln4})' + 2(x^{\frac{1}{2}})' - 2(\sin x)' = 4(\frac{x}{ln4})' + +2\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2\cos x = 4\frac{1}{ln4} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\cos x = 4^x + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\cos x + C$.

Примечание. При вычислении интеграла от суммы нескольких функций сумму произвольных постоянных, которая при этом получается, заменяют одной произвольной постоянной.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2+2}{x}dx$.

Решение. Разделив почленно числитель подынтегральной функции на ее знаменатель и используя свойства 4 и 5 и формулы 1 и 2 табл. 1, получаем:

$$\int \frac{x^2+2}{x}dx = \int(x + \frac{2}{x})dx = \int xdx + 2\int\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + 2\ln x + C.$$

Проверка: $\left(\frac{x^2}{2} + 2\ln x\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' + 2(\ln x)' = \frac{1}{2}2x + 2\frac{1}{x} = x + \frac{2}{x} + C$.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Решение. Преобразуем числитель по формуле $(a+b)^2$ $=a^2+2ab+b^2$. Тогда

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1+2\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x}}dx.$$

Разделив почленно числитель подынтегральной функции на ее знаменатель и применив правило деления степеней с одинаковыми степенями с одинаковыми основаниями, получим:

$$\int \frac{(1+2\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x}}dx=\int (x^{\frac{-1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{2}{3}})dx = \int x^{\frac{-1}{3}}dx + 2\int x^{\frac{1}{6}}dx +$$

$$\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+2\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}+\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}=\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+\frac{12\sqrt[6]{x}}{7}+\frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5}+C.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \frac{1dx}{\sin^2 x{\cdot}cos^2 x}$.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ и интегралы 11 и 12 табл. 1, получим $\int \frac{dx}{\sin x^2 x{\cdot}cos^2 x} = \int \frac{sin^2 x+cos^2 x}{\sin x^2 x{\cdot}cos^2 x}dx = \int (\frac{sin^2 x}{sin^2 x{\cdot}cos^2 x}+$ $\frac{cos^2 x}{sin^2 x{\cdot}cos^2 x})dx == \int (\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x})dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x} =$ $\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + C$.

Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

Пусть подынтегральная функция представляет из себя дробь, в числителе которой стоит единица, а в знаменателе квадратный трехчлен или корень квадратный из квадратного трехчлена. Тогда, применяя формулы квадрата суммы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ или разности $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, интеграл сводится к табличным интегралам 1, 2, 7–10.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$.

Решение. Выделим в знаменателе полный квадрат:

$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

Видим, что в выражении $x^2 + 6x$ до полного квадрата не хватает 9, поэтому раскладываем 10=9+1. После чего применяем свойство 6 и интеграл 7 табл. 1, где в качестве u берем $x+3$:

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{dx}{x^2+6x+9+1} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+1}$$
$$= \operatorname{arctg}(x+3) + C.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+15}}$.

Решение. Выделим в знаменателе полный квадрат:

$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16.$

Видим, что в выражении x^2–$8x$ до полного квадрата не хватает 16, поэтому раскладываем 15=16–1. После чего применяем свойство 6 и интеграл 9 табл. 1, где $u = x$–4.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+15}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+16-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-4)^2-1}} = \ln\left|x-4+\sqrt{(x-4)^2-1}\right| + C.$$

Метод подведения под знак дифференциала

Метод подведения под знак дифференциала в неопределенном интеграле заключается в применении следующей цепочки тождеств:

$$\int f\ [U(\mathrm{x})]\ U'(x)dx = \int\ [U(\mathrm{x})]dU(x) = \int fUdU|_{U=U(x)}.$$

Допустим, что интеграл $\int f(U)\ dU$ является табличным или был найден раньше. Тогда, чтобы проинтегрировать произведение $f[U(x)]U\,d(x)$, где $f\,[U(x)]$ – сложная функция с промежуточной переменной $U(x)$, а $U\ d(x)$ – производная функции $U(x)$, следует в полученном выражении для интеграла $\int f(U)dU$ заменить U на $U\,(x)$.

Примечание. Следует учесть, что если $y = f(x)$ – дифференцируемая функция аргумента x, то дифференциал dy равен $f'(x)dx$, т. е. $dy = f'(x)dx$.

Некоторые свойства дифференциала:

а) $dx = d(x+a)$ – под знаком дифференциала можно прибавлять любое число a;

б) $a \cdot dx = d(a \cdot x)$, или $dx = \frac{1}{a}d(ax)$ – постоянный множитель можно вносить (выносить) под знак (из-под знака) дифференциала.

В общем случае преобразование дифференциала осуществляется по формуле $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x)+a)$, где выбор функции x и постоянной a определяется видом подынтегрального выражения.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$.

Решение. Так как $\cos x dx = d(\sin x)$, то можно записать:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = [\cos x dx = d(\sin x)] = \int \sin^2 x d(\sin x) =$$

$$= (\text{интеграл } 1 \text{ табл.} 1) = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int \frac{2xdx}{1+x^2}$.

Решение. Так как $2xdx = d(1+x^2)$, то $\int \frac{2xdx}{1+x^2} =$

$[2xdx = d(1+x^2)] = \; = \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$;

$1+x^2 = U, \int \frac{dU}{U}$ (интеграл 2 табл. 1) $= \ln|1+x^2| + C$.

Пример 11. Найти $\int \sqrt{x^2+5} \cdot 2xdx$.

Решение. Заметим, что $(x^2+5)' = 2x$, поэтому $\int \sqrt{x^2+5} \cdot 2xdx = \; = \int \sqrt{x^2+5} \cdot (x^2+5)'dx$, и можно подвести под знак дифференциала выражение (x^2+5). Тогда используя интеграл 1 из табл. 1, получим:

$$\int \sqrt{x^2+5} \cdot (x^2+5)'dx = \int (x^2+5)^{\frac{1}{2}} d(x^2+5) = \frac{2}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Ответ: $\frac{2}{3}(x^2+5)^{\frac{3}{2}} + C$.

Пример 12. Найти $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{3 - sin^2 x}}$.

Решение. Отметим, что $(3 - \sin^2 x)' = -2\sin x \cos x$ и, следовательно, в подынтегральном выражении для производной $U'(x)$ не хватает множителя – 2. Поэтому, умножая и деля его одновременно на – 2, получаем:

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{3-\sin^2 x}} = \int \frac{-2\sin x \cos x dx}{-2\sqrt{3-\sin^2 x}} = \; -\frac{1}{2}\int \frac{(3-\sin^2 x)' dx}{\sqrt{3-\sin^2 x}} = -0{,}5\int (3 - \sin^2 x)^{\frac{-1}{2}} d(3 - -\sin^2 x),$$

если выражение $3 - \sin^2 x = U$, тогда имеем:

$$-0{,}5\int (U)^{\frac{-1}{2}} dU = -0{,}5 \cdot 2(3 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= -\sqrt{3 - \sin^2 x} + C.$$

Метод замены переменной

Метод подведения под знак дифференциала является частным случаем *метода замены переменной* или метода подстановки. Пусть требуется найти интеграл $\int f\ (x)dx$.

Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении, положив $x = q(u)$, где $q(u)$ – непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию $u = q^{-1}(x)$. Тогда $dx = q^{\cdot}(u)du$, и имеет место равенство:

$$\int f\ (x)dx = \int f[\,q(u)]q^{\cdot}(u)du|_{u=q^{-1}(x)},$$

т.е. вычисление интеграла $\int f\ (x)dx$ сводится к вычислению интеграла

$\int f[\,q(u)]q^{\cdot}(u)du|_{u=q^{-1}(x)}$ и последующей подстановке новой переменной интегрирования. Данная формула называется *формулой замены переменной в* *неопределенном интеграле*. При этом предполагается, что интеграл $\int f[\,q(u)]q(u)du|_{u=q\ -1\ (x)}$ «ближе к табличному», чем исходный интеграл.

Примечание. В некоторых случаях удобнее делать замену переменной не в виде *x= q(u)* , а в виде $u=\varphi x$.

Пример 13. Вычислить интеграл $\int \operatorname{tg} x dx$.

Решение. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \left[\begin{smallmatrix} u=\cos x \\ du=-\sin x dx \end{smallmatrix}\right] =$ $-\int \frac{-\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$

Пример 14. Вычислить интеграл $\int \frac{\arcsin x - 2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Решение. Разделив почленно числитель на знаменатель и применив свойство, запишем:

$$\int \frac{\arcsin x - 2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \int \frac{\arcsin x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{-2x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

К каждому интегралу применим метод замены переменной:

$$\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left|\begin{smallmatrix} u=\arcsin x \\ du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx \end{smallmatrix}\right| = \int u \cdot du = \frac{u^2}{2} + C_1 = \frac{(arc\sin x)^2}{2} + C_1;$$

$$\int \frac{-2xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} u = 1 - x^2 \\ du = -2xdx \end{matrix} \right| = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{\frac{-1}{2}} du =$$

$$= \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C_2 = 2\sqrt{u} + C_2 =$$

$$=2\sqrt{1-x^2} + C_2.$$

В итоге имеем:

$$\int \frac{\arcsin x - 2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{(\arcsin x)^2}{2} + 2\sqrt{1-x^2} + C.$$

(в силу произвольности C_1 и C_2 записана одна общая произвольная постоянная C=C_1+C_2).

Ответ: $0{,}5(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} + C$.

Пример 15. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} dx$.

Решение. Сделаем замену $x = u^2$ (ее цель – освободиться от иррациональности под знаком интеграла). Тогда $dx = 2udu$ и

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} dx = \int \frac{u+1}{u-1} \cdot 2udu = 2 \int \frac{u^2+u}{u-1} du.$$

Получили интеграл от рациональной неправильной дроби. Разделим числитель дроби на знаменатель уголком (выделим целую часть дроби)

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} u^2+u \\ \underline{u^2-u} \\ 2u \\ -\underline{2u+2} \\ 2 \end{array} & \begin{array}{l} u-1 \\ \hline u-2 \end{array} \end{array} \Rightarrow \frac{u^2+u}{u-1} = u - 2 + \frac{2}{u-1}.$$

Следовательно,

$2\int\frac{u^2+u}{u-1}du=2\left[\int\left(u-2+\frac{2}{u-1}\right)du\right]=2\left(\int udu-\right.$
$\left.2\int du+2\int\frac{du}{u-1}\right)=2\left(\frac{u^2}{2}-2u+2\ln|u-1|\right)+C=$
(вернемся к старой переменной x) $=x--4\sqrt{x}+$
$4\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C.$

Ответ: $x-4\sqrt{x}+4\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C.$

Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям принадлежит к числу основных методов интегрирования.

Пусть U и V – две дифференцируемые функции от x. Тогда дифференциал произведения UV вычисляется по следующей формуле:

$$d(UV)=UdV+VdU.$$

Отсюда, интегрируя, получаем: $UV=\int UdV+\int VdU$ или $\int U(x)dV(x)=U(x)\cdot V(x)-\int V(x)\,dU(x).$

Последняя формула называется *формулой интегрирования по частям*.

Применение такой формулы предполагает, что интегралы, стоящие в правой части, ближе к табличным, чем исходные интегралы.

При практическом использовании данной формулы надо, прежде всего, установить, какая функция в подынтегральном выражении принимается равной $U(x)$ и что отнести к $dV(x)$. Затем по установленному выражению $U(x)$ надо дифференцированием найти $dU(x)$, а по известному $dV(x)$ определить интегрированием функцию $V(x)$. Необходимо помнить, что в состав $dV(x)$ должен обязательно входить дифференциал независимой переменной x.

Таблица 2

Частные случаи применения формулы интегрирования почастям *($P_n(x)$* – многочлен n-й степени*)*

Интеграл		$U(x)$	$dV(x)$
1	$\int P_n(x) \cdot e^{kx} dx$	$U = P_n(x)$	$dV = e^{kx} dx$
2	$\int P_n(x) \cdot \sin kx\, dx$	$U = P_n(x)$	$dV = \sin kx\, dx$
3	$\int P_n(x) \cdot \cos kx\, dx$	$U = P_n(x)$	$dV = \cos kx\, dx$
4	$\int P_n(x) \cdot \mathrm{arsin} kx dx$	$U = \arcsin kx$	$dV = P_n(x) dx$
5	$\int P_n(x) \cdot \arccos kx dx$	$U = \arccos kx$	$dV = P_n(x) dx$
6	$\int P_n(x) \cdot \mathrm{arctg} kx dx$	$U = \mathrm{arctg} kx$	$dV = P_n(x) dx$

Интеграл		$U(x)$	$dV(x)$
7	$\int P_n(x)\cdot \mathrm{arcctg} kx dx$	$U=\mathrm{arcctg} kx$	$dV=P_n(x)dx$
8	$\int P_n(x)\cdot \log_a^m kx dx$	$U=\log_a^m kx$	$dV=P_n(x)dx$
9	$\int P_n(x)\cdot \ln^m kx dx$	$U=\ln^m kx$	$dV=P_n(x)dx$

Стоит отметить, что формулу интегрирования по частям можно применять неоднократно. В частности, для интегралов 1–3 (табл. 2) интегрирование по частям проводится ровно столько n раз, сколько составляет старшая степень многочлена $P_n(x)$; для интегралов 8, 9 – m раз, т. е. какова степень логарифма; в интегралах 4–7 интегрирование по частям проводится однократно.

Пример 16. Найти $\int xe^{10x}dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, полагая $U(x)=x, dU=dx, dV(x)=e^{10x}\cdot dx$, $V(x)=\frac{e^{10x}}{10}$. Тогда

$$\int xe^{10x}\cdot dx = x\cdot\frac{e^{10x}}{10} - \int\frac{e^{10x}}{10}\cdot dx = 0{,}1xe^{10x} - 0{,}1\int e^{10x}\cdot dx$$

$$= 0{,}1xe^{10x} - 0{,}1\frac{e^{10x}}{10} = 0{,}1e^{10x}(x-0{,}1)+C.$$

Примечание. При нахождении этого интеграла нецелесообразно брать $U(x)=e^{10x}, dV=xdx$

(что формально можно делать), так как в этом случае получили бы $dU(x) = 10e^{10x} \cdot dx, V(x) = \frac{x^2}{2}$. Тогда по формуле интегрирования по частям

$$\int xe^{10x} \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^{10x} - 5 \int x^2 \cdot e^{10x} \cdot dx.$$

Совершенно очевидно, что интеграл, стоящий в правой части, сложнее исходного. Поэтому выбор $U(x), dV(x)$ не может быть произвольным.

Пример 17. Найти $\int \arcsin(1 + 2x) \cdot dx$.

Решение. Вновь применим формулу интегрирования по частям, полагая $U(x) = \arcsin(1 + 2x)\,, dV(x) = dx$. Тогда $V(x) = x$ и $dU = (\arcsin(1 + 2x))' = \arcsin(1 + 2x)' \cdot (1 + 2x)' = \quad = \frac{1}{\sqrt{1-(1+2x)^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1-(1+2x)^2}}$.

Подставляем в наш интеграл:

$\int \arcsin(1 + 2x) \cdot dx = x \cdot \arcsin(1 + 2x) – \int x \frac{2dx}{\sqrt{1-(1+2x)^2}}$.

Теперь, зная что $d = (1 - (1 + 2x)^2) = -4(1 + 2x)dx$, отсюда $dx = = \frac{1-(1+2x)^2}{-4}$ и $d(1 + 2x) = 2dx$ подставляем в выражение:

$x \cdot \arcsin(1 + 2x) - \int \frac{d(1-(1+2x)^2}{-4 \cdot \sqrt{1-(1+2x)^2}} = x \cdot \arcsin(1 + 2x) + \frac{1}{4} \int \frac{d(1-(1+2x)^2}{\sqrt{1-(1+2x)^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(1+2x)}{\sqrt{1-(1+2x)^2}} =$

$= x \cdot \arcsin(1+2x) + \frac{1}{4}\int \frac{(1+2x)^2 dx}{\sqrt{1-(1+2x)^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{d(1+2x)}{\sqrt{1-(1+2x)^2}} = x$

$\cdot \arcsin(1+2x) +$

$+0{,}5\sqrt{1-(1+2x)^2} + 0{,}5\arcsin(1+2x) + C.$

Пример 18. Найти $\int \sqrt[3]{x} \cdot \ln^2 \cdot xdx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, полагая $U(x) = (\ln^2 x)\,, dV = \sqrt[3]{x}dx$. Интегрирование по частям здесь придется применять уже дважды. Сначала определим, что $dU = \frac{2}{x} \cdot \ln \cdot xdx$ и $V(x) = \int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}}$, т.е.:

$\int x^{\frac{1}{3}} \ln^2 xdx = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x - \frac{3}{2}\int x^{\frac{1}{3}}\ln \cdot xdx.$

Еще раз интегрируем по частям, зная, что $U(x) = \ln x$ и $dU = \frac{dx}{x}$, $dV = x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$ и $V(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$.

$\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4} \cdot \ln x - \frac{3}{4}\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x\right) = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x - \frac{9}{8} \cdot \ln x + \frac{27}{32} \cdot x^{\frac{4}{3}} + C.$

В ряде случаев применение метода интегрирования по частям приводит снова к первоначальному интегралу. При этом получается уравнение, из которого и находится искомый интеграл (*цикличное интегрирование)*.

Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется функция вида $y=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$,

где P_m (x) и Q_n (x) – многочлены степеней m и n соответственно. Если $m < n$, то дробь называется *правильной*, если же $m \geq n$, то дробь называется *неправильной* и следует путем деления числителя $P_m(x)$ на знаменатель Q_n (x) выделить в этой дроби целую часть. После этого дробь можно представить в виде:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=M_{(m-n)}(x)+\frac{R_r(x)}{Q_n(x)},$$

где $M_{m\text{-}n}$ (x) и R_r (x) – многочлены степеней $m–n$ и r соответственно; причем $r< n$, т. е. дробь $\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ уже является правильной.

Пример 19. Представить неправильную дробь $\frac{x^4-2x^2+3x+6}{x^2-4x+7}$ в виде суммы целой части и правильной дроби.

Решение. Делим «уголком» числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{rrrrr|lll}
_x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +3x & +6 & x^2 & -4x & +7 \\ \cline{6-8}
x^4 & -4x^3 & +7x^2 & & & x^2 & +4x &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} \_4x^3 & -5x^2 & +3x & \\ 4x^3 & -16x^2 & +28x & \\ \hline & -21x^2 & +31x & +6 \end{array}$$

Таким образом, исходную дробь можно представить в виде $\frac{x^4-2x^2+3x+6}{x^2-4x+7}=x^2+4x+\frac{-21x^2+31x+6}{x^2-4x+7}$.

Согласно формуле, интегрирование рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена $M_{m\text{-}n}(x)$ и правильной дроби $R_r(x)/Q_n(x)$. Интегрирование многочлена не вызывает затруднений, а для того чтобы проинтегрировать дробь, ее следует разложить в сумму простейших дробей. Это разложение осуществляется следующим образом.

Известно, что всякий многочлен $Q_n(x)$ с действительными коэффициентами на множестве действительных чисел может быть представлен в виде:

$$Q_n(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot\left(x-\alpha_\beta\right)^{k_\beta}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{t_s},$$

где α_1, α_β – действительные корни многочлена $Q_n(x)$ кратностей $k_1,\ldots,k_\beta$ a_n –коэффициент при старшей степени многочлена, а $p^2_\psi - 4q_\psi < 0$ ($\psi=\overline{1,s}$);

$k_1 + ... + k_\beta + 2t_1 + ... + 2t_s = n$; числа $k_1,...,k_\beta, t_1,...,t_s$ – целые неотрицательные. Имеет место тождество:

$$\frac{R_r(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + ... + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + ... + \frac{A_1^{(\beta)}}{x-\alpha_\beta} + \frac{A_2^{(\beta)}}{(x-\alpha_\beta)^2} + ... + \frac{A_{k_\beta}^{(\beta)}}{(x-\alpha_\beta)^{k_\beta}} +$$

$$+ \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2^{(1)}x + N_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + ... + \frac{M_{t_1}^{(1)}x + N_{t_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}} + ... +$$

$$+ \frac{M_1^{(s)}x + N_1^{(s)}}{x^2+p_sx+q_s} + ... + \frac{M_{t_s}^{(s)}x + N_{t_s}^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{t_s}},$$

где $A_1^{(1)},...$ $A_{k1}^{(1)}$ $,...A_1^{(\beta)},...$ $A_{k\beta}^{(\beta)}$, $M_1^{(1)},...N_1^{(1)}$ – действительные коэффициенты, определяемые единственным образом.

Дроби следующих четырех типов:

1) $\frac{A}{x-\alpha}$; 2) $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$; 3) $\frac{M_x+N}{x^2+px+q}$; 4) $\frac{M_x+N}{(x^2+px+q)^k}$. $p^2 - 4q < 0, k=2,3,4$

называют простейшими, или элементарными, а вышеуказанное тождество называется разложением правильной рациональной дроби на сумму простейших.

Таким образом, интегрирование дроби $R_r(x)/Qn\ (x)$ сводится к интегрированию суммы простейших дробей четырех типов. При этом неизвестные коэффициенты $A^{(1)}$,..., $A^{(1)}$,..., $M^{(1)}$,..., $N^{(1)}$, в разложении можно найти методом неопределенных коэффициентов.

***Пример 2*0**. Найти $\int \frac{2x^2-3x+2}{(x-1)\cdot(x-2)^2}\ dx$.

Решение. Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь. В соответствии с формулой разложения исходной дроби на простейшие она имеет следующий вид:

$$\int \frac{2x^2-3x+2}{(x-1)\cdot(x-2)^2}\ dx = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

При этом учитываем, что α=1 и α=2 – действительные корни многочлена $Q_n(x)=(x-1)(x-2)^2$ кратностей $k_1=1$ и $k_2=2$ соответственно. Умножая обе части последнего равенства на $(x-1)(x-2)^2$, получаем

$$2x^2 - 3x + 2 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1),$$

или $2x^2 - 3x + 2 = (A + B)x^2 + (C - 4A - 3B)x + (4A + 2B - C)$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества, записываем систему для нахождения коэффициентов A, B и C:

$$x^2|2 = A + B$$

$$x^1|-3 = C - 4A - 3B$$

$$x^0|2 = 4A + 2B - C$$

решение которой: $A=1$, $B=1$, $C=4$.

Окончательно имеем:

$$\int \frac{2x^2-3x+2}{(x-1)\cdot(x-2)^2}\,dx = \frac{dx}{(x-1)} + \frac{dx}{(x-2)} + 4\frac{dx}{(x-2)^2} = \ln|x-1| + \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} = = \ln|(x-1)\cdot(x-2)| - \frac{4}{x-2} + C.$$

Интегрирование тригонометрических выражений

Разберём особенности интегрирования функций *R*(sin *x,* cos *x*). Запись *R*(sin *x,* cos *x*) означает рациональную функцию синуса и косинуса, т. е. над синусом, косинусом и некоторыми константами производятся только операции сложения, вычитания, умножения и деления.

Интегралы вида приводятся к интегралу от рациональной функции нового аргумента *z* (или рационализируются) подстановкой tg*(x/*2*)=z*, которая называется *универсальной тригонометрической подстановкой*. При этой подстановке $x=2\cdot\mathrm{arctg}\ z$, $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$, $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$ и тогда:

$$\int R(\sin\ x, \cos\ x)dx = \int R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2},$$

где подынтегральная функция в правой части рационально зависит от *z*.

Называется такая подстановка универсальной потому, что она во всех случаях дает возможность проинтегрировать функцию $R(\sin x, \cos x)$. Но есть случаи, когда её использование может привести к значительному усложнению процедуры интегрирования по сравнению с другими подстановками. Укажем три таких подстановки, которые могут быть использованы при вычислении интегралов.

а) если $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\sin x$ на $-\sin x$, т. е. если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция от $\sin x$, то для рационализации используется подстановка $\cos x = z$;

б) если $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$, т. е. если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция от $\cos x$, то для рационализации используется подстановка $\sin x = z$;

в) Если $R(\sin x, \cos x)$ не изменяется при одновременной замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$, то для рационализации используется подстановка $\operatorname{tg} x = z$.

Пример 21. Вычислить интеграл $\int \frac{tg^2 x dx}{2+2cos2x}$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2+\cos 2x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2+2(1-\sin^2 x)} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4-4\sin^2 x}.$$

Числитель и знаменатель последней дроби не изменяются при замене $\sin x$, $\cos x$ соответственно на $-\sin x$,

– cos *x*. Поэтому используем подстановку и учтём, что x=arctg, dx=$\frac{dz}{1+z^2}$, sin x=$\frac{z}{1+z^2}$, cos x= $\frac{1}{1+z^2}$:

$$\int \frac{\text{tg}^2 x dx}{2+2\cos 2x} = \int \frac{z^2 dz}{(4-\frac{4z^2}{1+z^2})(1+z^2)} = \int \frac{z^2 dz}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\int z^2 dz = \frac{1}{4}\cdot\frac{z^3}{3} == \frac{\text{tg}^3 x}{12} + C.$$

Пример 22. Найти $\int \sin^4 x dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функци

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = (0{,}5(1-\cos 2x))^2 0{,}25(1–2\cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= 0{,}25(1–2\cos\ \ 2x + 0{,}5\cdot(1+\cos 4x))$$

$$= 0{,}25(1{,}5–2\cos 2x + 0{,}5\cos 4x) + \text{C}.$$

Интегрирование иррациональных выражений

Если для интеграла $\int f(x)dx$, где подынтегральная функция *f(x)* не является рациональной, можно указать такую подстановку, которая приводит к виду $\int R(t)dt$, где *R(t)* – рациональная функция, то последний интеграл, а значит и интеграл $\int f(x)dx$, выражается в элементарных функциях. Применение такой подстановки для вычисления неопределенного интеграла называется методом рационализации. В частности, интегралы вида

$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}} \ldots\right) dx$, где *R(x,y,z,...)* – рациональная функция своих аргументов; m_1, n_1, m_2, n_2 ... – целые числа, вычисляются с помощью подстановки $x= t^s$, где s – наименьший общий знаменатель дробей m_1/n_1, m_2/n_2. Таким же образом вычисляются интегралы более общего вида:

$$\int R(x, (\frac{cx+d}{px+q})^{\frac{m_1}{n_1}}, (\frac{cx+d}{px+q})^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots)dx.$$

Подынтегральное выражение в данной формуле рационализируется, если сделать подстановку$\frac{cx+d}{px+q} = t^s$

Пример 23. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. Данный интеграл имеет вид $\int R(x, \sqrt{m^2 - n^2})dx$, то применяя подстановку x=2sin t, t=arcsin$\frac{x}{2}$, получаем

$\int \frac{x^2dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{(2\sin t)^2 2\cos t dt}{4\cos^2 t \cdot 2\cos t} = \frac{\sin^2 t dt}{\cos^2 t}$=$\int \left(\frac{1}{cos^2 t} - 1\right) dt$=tg$t$ – t +C=tg arcsin$\frac{x}{2}$ – – arcsin$\frac{x}{2}$=$\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ – arcsin $\frac{x}{2} + C$.

Пример 24. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x^2-36}}{x^4}dx$.

Решение: В данном интеграле мы можем применить подстановку x=$\frac{6}{\cos t}$, получаем dx=$\frac{6 \ \sin t \ \ dt}{\cos^2 \ t}$. Следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-36}}{x^4}dx = \int \frac{36-(\frac{1}{\cos^2 t}-1)}{\frac{1296}{\cos^4 t}} \cdot \frac{6\sin t \quad dt}{\cos^2 t}$$

$$= \frac{1}{36}\int \sin^2 t\cos t \quad dt =$$

$$= \frac{1}{36\sin^2 t d(\sin t)} = \frac{1}{108}\sin^3 t = \frac{1}{108}\sin^3 \arccos\frac{6}{x}$$

$$= \frac{1}{108}(\frac{x^2-36}{x^2})^{\frac{3}{2}} + C.$$

Здесь для преобразования $\sin^3 \arccos\frac{6}{x}$ была использована формула sin t=$\sqrt{1-\cos^2 t}$.

Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Понятие определённого интеграла (интегральная сумма, определение определённого интеграла, интегрируемая функция).
2. В чём заключается суть интегрального исчисления функции одной переменной?
3. Необходимое условие интегрируемости функции на отрезке.
4. Достаточные условия интегрируемости функции на отрезке.
5. Назвать методы интегрирования функции.

6. Вычислить интегралы, ответы проверить дифференцированием:

1	$\int \frac{x-3}{\sqrt{x^3}}dx$	6	$\int \text{tg}^2 x dx$	11	$\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$
2	$\int (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})dx$	7	$\int \frac{dx}{1-5x}$	12	$\int \frac{x^3 dx}{x^6+2}$
3	$\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}dx$	8	$\int \sqrt{4+x}dx$	13	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$
4	$\int \frac{1-\cos 2x}{\cos^2 x}dx$	9	$\int \frac{2x+1}{x^2+x-2}dx$	14	$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$
5	$\int (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2 dx$	10	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4x+1)^2}}$	15	$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}dx}{x}$

7. Вычислить интегралы методом подведения некоторой функции под знак дифференциала:

1	$\int e^{cosx}\sin x dx$	6	$\int \frac{1-2\cos x}{\sin^2 x}dx$
2	$\int \frac{cosx}{\sqrt{1+2sinx}}dx$	7	$\int \frac{dx}{(\arcsin)^3 x \cdot \sqrt{1-\sin^2 x}}$
3	$\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}dx$	8	$\int \sin 3x \sin 5x dx$
4	$\int \frac{dx}{(\arccos)^4 x \cdot \sqrt{1-\cos^2}}$	9	$\int \frac{\sqrt[3]{\text{tg}3x}}{\cos^2 3x}dx$
5	$\int \frac{(\arcsin x)^2+2x}{\sqrt{2-x^2}}dx$	10	$\int \sin^3 x \cos^5 x dx$

8. Вычислить интегралы методом подстановки:

1	$\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}+3}$	6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$	11	$\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$
2	$\int (\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}})dx$	7	$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$	12	$\int \frac{dx}{5-3\cos x}$
3	$\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$	8	$\int \sqrt{4+x}dx$	13	$\int \frac{dx}{4\sin^2 x-5\cos^2 x}$

4	$\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{x}}dx$	9	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$	14	$\int \frac{\sqrt[3]{\text{tg}5xdx}}{\cos^2 5x}$
5	$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$	10	$\int \frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x-1}}$	15	$\int \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^4}$

9.Вычислить интегралы методом интегрирования по частям

1	$\int x\cos x dx$	3	$\int xe^2 dx$	5	$\int e^{2x}\cos 4x dx$
2	$\int x^2 \sin 5x dx$	4	$\int x\ln^3 dx$	6	$\int x2^x dx$

10. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

1	$\int x^2 \ \ln x dx$	4	$\int \sqrt{4+x} dx$	7	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$
2	$\int \frac{\ln x}{x^2} dx$	5	$\int \frac{x}{\sin^2} dx$	8	$\int x^3 e^{-x}\, dx$
3	$\int \text{arctg} x\, dx$	6	$\int e^x \ln(e^x + 2) dx$	9	$\int (x^2-2x+4)\sin 2x$

3. Модуль «Математическая статистика»

3.1. Случайные величины и их основные характеристики

Случайной величиной *называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.*

Случайные величины обозначаются: X, Y, Z,.. Значения, которые они принимают: x, y, z.

По множеству возможных значений различают ***дискретные*** и ***непрерывные случайные величины***.

Дискретными *называются* ***случайные величины****, значениями которых являются только отдельные точки числовой оси, причём, число их может быть как конечно, так и бесконечно.*

Пример: число родившихся бычков среди ста телят за последний месяц – это дискретная случайная величина, которая может принимать значения 1,2,3,..n.

Непрерывными *называются* ***случайные величины****, которые могут принимать все значения из некоторого числового промежутка.*

Пример: количество урожая масличных культур, которое будет получено с полей определённого региона – это непрерывная случайная величина, значения которой принадлежат некоторому промежутку $[a; b]$.

Дискретную случайную величину X можно характеризовать законом распределения.

Закон распределения дискретной случайной величины *– это соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.*

Закон распределения можно задать в табличном и графическом виде, а также аналитически. При задании закона распределения таблично в первую строку таблицы вносятся возможные значения случайной величины, а во вторую – их вероятности. Однако такой способ задания (перечисление всех возможных значений случайной величины и их вероятностей) не подходит для непрерывных случайных величин. Составить перечень их возможных значений невозможно.

Дадим новый способ задания любых типов случайных величин. С этой целью введем ***функцию распределения вероятностей случайной величины***.

Функцией распределения случайной величины *называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение меньшее x, т.е. $F(x)<P(X<x)$.*

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x)$ – есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Иногда вместо термина «функция распределения» используется термин «интегральная функция».

Свойства функции распределения

Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат интервалу [0;1].

Свойство 2. $F(x)$ – неубывающая функция.

Свойство 3. На минус бесконечности функция распределения равна 0, на плюс бесконечности равна 1, т.е. $F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ и $F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Свойство 4. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$, равна приращению функции распределения в этом интервале: $P(a\leq X<b)=F(b)-F(a)$.

Рассмотренные выше свойства позволяют представить, как выглядит график функции распределения непрерывной случайной величины. График расположен в полосе, ограниченной прямыми y=0, y=1 (1-е свойство). При возрастании значения x на интервале $(a; b)$, в котором заключены все возможные значения случайной величины, график растет вверх (2-е свойство). При $-\infty$ ординаты графика равны 0, при $+\infty$ординаты графика равны 1 (3-е свойство).

К числовым характеристикам случайной величины относятся: ***математическое ожидание, дисперсия***.

Математическое ожидание дискретной случайной величины *определяется как сумма произведений всех возможных её значений на их вероятности по формуле:* $M(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, *где* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Математическое ожидание называют также ожидаемым значением случайной величины, средним значением случайной величины.

Дисперсией дискретной случайной переменной *называют величину, которая определяется по формуле:* $D(x)= \sum_{i=1}^{n}(x_i - [M(x)]^2)p_i$. *Дисперсия выступает в качестве характеристики разброса возможных её значений.*

Положительный корень из дисперсии называют ***среднеквадратическим отклонением,*** *или* ***стандартной ошибкой.***

Свойства математического ожидания и дисперсии

Свойство 1. Математическое ожидание и дисперсия константы равны этой константе: $M(C)=C$.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX)=CM(X)$ и за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $M(CX)=C^2M(X)$.

Свойство 3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых: $M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)$.

Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X-Y)=D(X)-D(Y)$.

Свойство 4. Математическое ожидание произведения случайных величин: $M(X_1X_2)=M(X_1)\cdot M(X_2)+\mathrm{cov}(X,Y)$, где $\mathrm{cov}(X,Y)$– ковариация случайных величин X и Y.

Для независимых случайных величин: математическое ожидание их произведения равно произведению математических ожиданий сомножителей: $M(X_1X_2\cdot\ldots\cdot X_n)=M(X_1)\cdot M(X_2)\cdot\ldots\cdot M(X_n)$.

Дисперсия случайной величины вычисляется по формуле:

$D(X)=M(X^2)-M^2(X)$.

Случайную величину X называют ***непрерывной****, если ее функция распределения* $F(X)=P(X<x)$ *непрерывна и*

имеет производную. Функция распределения непрерывной случайной величины применяется для вычисления вероятностей попадания случайной величины в заданный промежуток: $P(\alpha<X<\beta)=F(\beta) - F(\alpha)$, причем для непрерывной случайной величины не имеет значения, включаются в этот промежуток его границы или нет: $P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha \le X \le \beta)$.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины *X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством:*

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Дисперсия непрерывной случайной величины *X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством:*

$$D(x)=\int_{-m}^{m}\left(x- M(x)\right)^2 f(x)dx$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии, сформулированные для дискретных случайных величин, сохраняются и для непрерывных случайных величин.

Плотностью распределения *непрерывной случайной величины называется функция f(x)=F'(x), производная от функции распределения.*

Свойства плотности распределения

Свойство 1. Плотность распределения случайной величины неотрицательна *($f(x) \geq 0$)* при всех значениях *X*.

Свойство 2. Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ =1. Геометрический смысл условия нормировки: площадь под кривой плотности распределения равна единице.

Свойство 3. Вероятность попадания случайной величины *X* на промежуток от α до β может быть вычислена по формуле $P(\alpha<X<\beta)= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Геометрически вероятность попадания непрерывной случайной величины *X* в промежуток (α, β) равна площади криволинейной трапеции под кривой плотности распределения, опирающейся в этот промежуток.

Свойство 4. Функция распределения выражается через плотность следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Значение плотности распределения в точке *x* не равно вероятности принять это значение, для непрерывной случайной величины речь может идти только о вероятности попадания в заданный интервал. Пусть $[x, x+\Delta x)$ – интервал произвольно малой длины $\Delta x > 0$. Вероятность попадания случайной величины в этот интервал приближенно равна произведению значения плотности распределения в точке *x* на длину этого интервала: *f(x)Δx*, т.е. вероятность пропорциональна длине интервала, причем коэффициент пропорциональности равен значению плотности распределения в точке *X* (рис. 1).

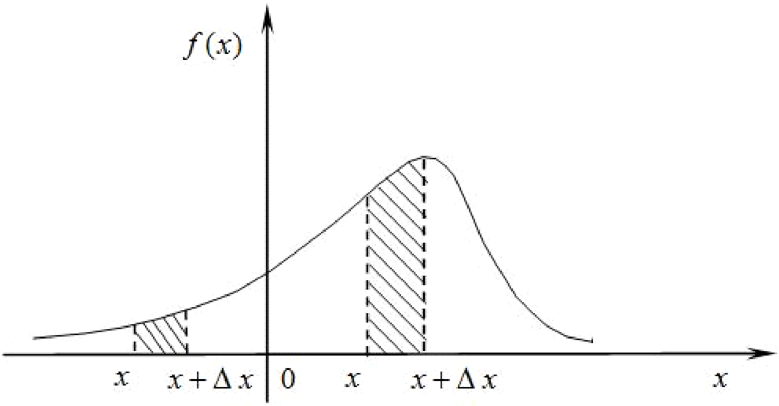


Рис. 1 – Вероятность попадания случайной величины на интервал длины Δx

Пример 1. Случайная величина задана функцией распределения *F(x):*

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при} \;\; x \leq 0 \\ \frac{x}{4}, \text{при} \;\; 0 < x \leq 4 \\ 1, \text{при} \;\; x > 4 \end{cases}.$$

Необходимо рассчитать *M(x)*. *D(x)*.

Решение. Исходя из формулы математического ожидания *M(x):*

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Сначала нужно найти *f(x)*, которая представляет собой производную от *F(x)*: $f(x)=F(x)'=(\frac{x}{4})' = \frac{1}{4}$.

Далее подставляем в формулу математического ожидания:

$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^4 x\frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}\int_0^4 xdx = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}|_0^4 = \frac{1}{8}\cdot 4^2 - \frac{1}{8}\cdot 0 = 2.$

Дисперсия вычисляется по формуле:

$D(x)=\int_a^b x^2\cdot f(x)dx - M(x)^2 = \int_0^4 x^2\cdot\frac{1}{4}dx - 2^2 = \frac{1}{4}\cdot \frac{x^3}{3}|_0^4 - 2^2 = \frac{1}{12}\cdot 4^3 - \frac{1}{12}\cdot 0 - 2^2 = \frac{4}{3}.$

Пример 2. Найти математическое ожидание для величины *X*, распределённой непрерывно с плотностью $f(x)=12(x^2-x^3)$ при $x\in(0,1)$ и $f(x)=0$ в остальных точках. Необходимо определить математическое ожидание.

Решение. Подставляем в формулу математического ожидания условие плотности вероятности и вычисляем значение интеграла:

M(x)= $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot x dx = \int_0^1 12(x^2 - x^3) x dx =$ $\int_0^1 12(x^3 - x^4)dx = 12\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \quad = 3\cdot 1^4 - \frac{12}{5}\cdot 1 \ - 0 =$ $\frac{3}{5} = 0{,}6.$

Пример 3. Дана функция распределения случайной величины *X*:

$$F(x) = \begin{Bmatrix} 0, \text{при} \quad x \le 0 \\ 1 - \frac{1}{(x+1)^2}, \text{при} \quad x \ge 0 \end{Bmatrix}.$$

Необходимо определить *M(x)* и *P(X*>1).

Решение. Найдём функцию плотности распределения:

$$f(x) = F'(x) = \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right)' = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_0^{+\infty} x\frac{2}{(x+1)^3}dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(x+1)^3}.$$

Сначала найдём неопределённый интеграл $2\int\frac{xdx}{(x+1)^3}$, для этого произведём замену *x+1=t*, отсюда *x=t–1*, и *dx=dt*. Подставляем в неопределённый интеграл:

$$2\int\frac{(t-1)dt}{(t)^3} = 2\int\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right)dt = 2\left(\int\frac{1}{t^2} - \int\frac{1}{t^3}\right) = 2\left(-\frac{1}{t} - \left(-\frac{1}{2t^2}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{x+1} + +\frac{1}{2(x+1)^2}\right).$$

Таким образом:

$$M(x)=2\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(x+1)^3}=2\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}\right)\Big|_0^b=2\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1^{\to 0}}{b+1}+\frac{1^{\to 0}}{2(b+1)^2}+\frac{1}{0+1}-\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{-1}{0+1}+\frac{1}{2(0+1)^2}-1-\frac{1}{2}\right)=1.$$

$$P(X>1)=F(+\infty)-F(1)=1-\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=1-1+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Т.е. вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала составляет $\frac{1}{4}=0{,}25$.

Пример 4. Функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{при } \ x\le 0 \\ ax^2, \text{при } \ 0<x\le 1 \\ 1, \text{при } \ x>1 \end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент a;

б) плотность вероятности $f(x)$;

в) вероятность того, что случайная величина X в результате опыта примет значение между 0,25 и 0,5;

г) числовые характеристики случайной величины.

Решение.

а) значение коэффициента a определим, учитывая, что функция распределения непрерывная:

$F(1-0)=F(1+0)=F(1)$.

$\lim\limits_{x\to 1-0} F(x)= \lim\limits_{x\to 1-0} ax^2 = a$, $\lim\limits_{x\to 1+0} F(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} 1 = 1.$

Приравнивая, получаем $a = 1$;

б) плотность вероятности $f(x)=F'(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} 2x, \text{при } 0 < x \le 1; \\ 0, \text{при } x \le 0 \text{ или } x > 1 \end{cases}.$$

в) вероятность попадания на интервал:

$P\ (0{,}25<X<0{,}5)=F(0{,}5)-F(0{,}25)=0{,}5^2-0{,}25^2=0{,}25-$

$-0{,}0625=0{,}1875$;

г) числовые характеристики:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot x dx = \int_0^1 x2xdx = \left(\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$D(x)=\int_a^b x^2\cdot f(x)dx - M(x)^2 = \int_0^1 x^2 2xdx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$\frac{x^4}{2}\Big|_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9}\Big| = \frac{1}{18}.$$

Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Дать определение случайной величины.

2. Виды случайных величин.

3. Числовые характеристики случайных величин.

4. Свойства математического ожидания и дисперсии случайной величины.

5. Функция распределения случайной величины: определение, свойства.

6. Какую случайную величину называют непрерывной?

7. Перечислите основные характеристики непрерывной случайной величины.

8. Плотность распределения: определение, свойства.

9. Дискретная случайная величина X имеет распределение вероятностей, заданное таблицей:

x_i	10	12	15	17	21
p_i	0,2	0,2	0,4	0,1	a

Требуется:

а) найти число a;

б) построить многоугольник распределения;

в) найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график;

г) вычислить вероятность попадания случайной величины X на промежутки [–1,10), [11;15], [12;21].

д) найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

10. Рабочий обслуживает 3 станка механической обвалки, вероятности выхода из строя каждого из которых в течение часа соответственно равны 0,3; 0,12; 0,1. Составить закон распределения числа станков, не требующих ремонта в течение часа. Найти $M(X)$, $D(X)$.

11. Найти $M(X)$, $D(X)$, определить $F(x)$ и построить её график, если:

x_i	2	12	32	47	60
p_i	0,1	0,1	0,5	0,2	?

3.2. Законы распределения случайных величин

Биномиальное распределение вероятностей

Биномиальным *называют распределение количества «успехов» в последовательности из n независимых случайных экспериментов, таких, что вероятность «успеха» в каждом из них постоянна и равна p.* Иными словами, пусть происходит n независимых испытаний, в каждом из которых событие может появиться с одной и той же вероятностью p. Тогда случайная величина X –

количество испытаний, в которых появилось событие, имеет биномиальное распределение вероятностей. Она может принимать целые значения от 0 (событие не произошло ни разу) до n (событие произошло во всех испытаниях).

Формула для вычисления соответствующих вероятностей – ***формула Бернулли*** для схемы повторных независимых испытаний:

$$P(X=k)=C^k_n \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},\ k=0,\ 1,\ 2,...,n.$$

Для биномиального распределения известны готовые формулы для математического ожидания и дисперсии:

$$M(X)=np,\ D(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}.$$

Задача. Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0,9. В контрольной партии 3 прибора. Случайная величина X – число приборов, удовлетворяющих требованиям качества.

Решение. Случайная величина X имеет биномиальное распределение. Найдем закон распределения случайной величины X, используя формулу Бернулли:

$$P(X=k)=C^k_n \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},\ k=0,\ 1,\ 2,...,n.$$

В данной задаче: n=3 – всего приборов в контрольной партии;

X=(0, 1, 2, 3) – вероятное количество приборов, удовлетворяющих требованиям качества; $p^x{}_n$ – вероятность того, что из n приборов ровно x будут удовлетворять требованиям качества.

По условию p=0,9 – вероятность того, что прибор удовлетворяет требованиям качества, тогда $q=1-\ p=1-\ 0{,}9\ =0{,}1$ вероятность то, что прибор не удовлетворяет условиям качества.

При $x=0$: $=\cdot(0{,}9)^0\cdot(0{,}1)^3\cdot 0{,}1)^3 = 0{,}001$.

При $x=1$: $= (0{,}9)^1\cdot(0{,}1)^2\cdot 3\cdot\ 0{,}9\cdot(0{,}1)^2 = 0{,}027$.

При $x=2$: $= (0{,}9)^2\ (0{,}1)^1\cdot 3\cdot 0{,}81\cdot 0{,}1=0{,}243$.

При $x=3$: $=(0{,}9)^3\cdot(0{,}1)^0\cdot(0{,}9)^3=0{,}729$.

Таким образом, искомый закон распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

Проверка: 0,001 + 0,027 + 0,243 + 0,729 = 1.

Составим функцию распределения:

$$F(x) = \left\{\begin{matrix} 0,\text{при}\ \ x \le 0 \\ 0{,}001,\text{при}\ \ 0 < x \le 1 \\ 0{,}0028,\text{при}\ \ 1 < x \le 2 \\ 0{,}271,\text{при}\ \ 2 < x \le 3 \\ 1,\text{при}\ \ x > 3 \end{matrix}\right\}.$$

Построим график функции распределения (рис.2).

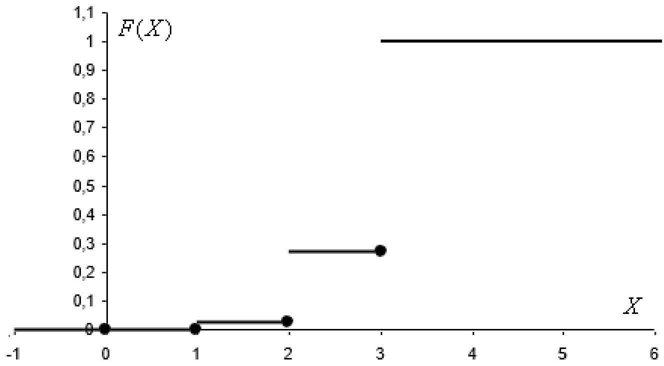


Рис. 2 – График функции распределения

Вычислим математическое ожидание *M(x)*, дисперсию *D(x)*, среднеквадратическое отклонение $Q(x)$:

$M(x)=np=3\cdot 0{,}9=2{,}7$.

$D(x)=npq=3\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}27$.

$Q(x)= Q(x)=\sqrt{D} = \sqrt{0{,}27} \approx 0{,}52$.

Распределения, близкие к геометрическому

Пусть происходит серия независимых испытаний, в каждом из которых событие может появиться с одной и той же вероятностью *p*. Тогда случайная величина *X* – количество испытаний до первого появления события – имеет геометрическое распределение вероятностей.

Она может принимать всевозможные целые значения от 0 (событие произошло в первом испытании) и больше (счетное число значений). Формула для вычисления соответствующих вероятностей легко выводится:

$$P(X=k)=q^k \cdot p,\ k=0,1,2,...,n,...$$

Для геометрического распределения известны готовые формулы для математического ожидания и дисперсии:

$$M(X)=\frac{q}{p},\ D(X)=\frac{q}{p^2}.$$

Задача. Вероятность изготовления нестандартного изделия при налаженном технологическом процессе постоянна и равна 0,1. Для проверки качества изготовляемых изделий отдел технического контроля берет из партии не более 4 изделий. При обнаружении нестандартного изделия всю партию задерживают. Составить закон распределения числа изделий, проверяемых из каждой партии. Найти математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение. Составим закон распределения случайной величины X – количества проверенных изделий. По условию:

q=0,1 – вероятность того, что изделие будет нестандартным. Тогда:

p=1–q=1–0,1=0,9 – вероятность того, что изделие будет стандартным.

Найдем закон распределения случайной величины X:

1) x=1 $p_1 = q$ =0,1.

2) x=2 $p_2 = pq$= 0,9·0,1=0,09.

3) x=3 $p_3 = ppq$=0,9·0,9·0,1=0,081.

4) $x=4$. Соответствующее событие состоит в двух несовместных исходах: четвертое проверяемое изделие будет либо стандартным, либо нет. Проверка в любом случае прекращается.

$p_4 = pppq + pppp = (0,9)^3 \cdot 0,1 \cdot (0,9)^4 = (0,9)^3 \cdot (0,1+0,9) = (0,9)^3 = 0,729$

Заполним расчетную таблицу. Искомый закон распределения случайной величины X сведен в верхние две строки таблицы:

x_i	1	2	3	4	$\sum$
p_i	0,1	0,09	0,081	0,729	1
$x_i\, p_i$	0,1	0,18	0,243	2,916	3,439
$x^2\, p_i$	0,1	0,36	0,729	11,664	12,853

Вычислим математическое ожидание: $M(X)=x_i\, p_i=3,439$

Вычислим дисперсию:

$D(x)= \sum x_i^2 p_i - (M(x))^2 = 12,853 - 3,439^2 = 12,853 -$

$- 11{,}826 \approx 1{,}026$.

Вычислим среднеквадратическое отклонение $Q(x) = \sqrt{D} = \sqrt{1{,}026} \approx 1{,}01$.

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона – это частный случай биномиального распределения (при $n >> 0$ и при $p \to 0$ (редкие события)).

Из математики известна формула, позволяющая примерно подсчитать значение любого члена биномиального распределения:

$$P_m = C_n^m \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m} \cong \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!},$$

где $a = n \cdot p$ – параметр Пуассона (математическое ожидание), а дисперсия равна математическому ожиданию. Приведем математические выкладки, поясняющие этот переход. Биномиальный закон распределения

$$P_m = C_n{}^m \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$

может быть описан, если положить $p = a/n$, в виде

$$P_m = C_n^m \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-m},$$

или

$$P_m=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}\cdot$$

$$\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n}\cdot\frac{a^m}{m!}.$$

Так как p очень мало, то следует принимать во внимание только числа m, малые по сравнению с n. Произведение $\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$ весьма близко к единице. Это же относится к величине $\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}$, которая очень близка к e^{-a}. Отсюда получаем формулу:

$P_m= \; C_n^m\cdot(p)^m\cdot(1-p)^{n-m}=\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}$ $\quad e=$ число Эйлера (2,71…).

$$P_m=P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\text{ где } \lambda>0,\ m=0,1,2.$$

Для производящей функции $\varphi(z)$ величины $\varsigma\approx\Pi(\lambda)$ имеем:

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot z^n=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^n}{n!}=$$
$$=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda z}=e^{-\lambda(1-z)}.$$

Задача. Среди семян ржи 0,04% сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить 5 семян сорняков?

Решение. Используем формулу Пуассона P_m= $P_m=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$.

В данном случае $\lambda=np$=5000·(0,01·0,04)=2 – среднее количество сорных семян, m=5 – искомое количество сорных семян.

Таким образом, $P_5 \approx \frac{5^2}{5!} \cdot e^{-2} \approx 0{,}0361$ – вероятность того, что среди 5000 семян ржи будет сорняков ровно 5 семян.

Закон Пуассона распределения вероятностей случайной величины в Excel

Функция ПУАССОН.РАСП возвращает два варианта значений (в зависимости от значения, переданного в качестве третьего аргумента):

– интегральное распределение Пуассона – числовое значение вероятности того, что известное количество случайных событий принадлежит диапазону 0;[x] (т.е. от 0 до x включительно);

– функция весовых коэффициентов – числовое значение вероятности того, что количество произошедших событий точно равно числу x.

Задача. Отдел технического контроля определил, что среднее число не соблюденных допусков в размерах производимых деталей составляет 5. Определить вероятности следующих событий обеими рассматриваемыми функциями (для сравнения результатов вычислений): 1) вероятность наличия 2 и менее погрешностей в случайно отобранной детали: 2) вероятность наличия ровно 2 погрешностей в случайно выбранной детали.

Решение. Оформим в Excel данные и для расчёта вероятности наличия 2 и менее дефектов будем использовать функцию ПУАССОН.РАСП., где задаём аргументы, показанные на рис. 3.

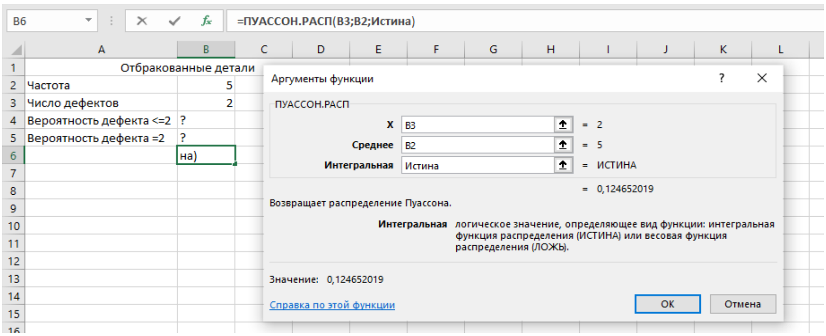


Рис. 3 – Аргументы функции ПУАССОН.РАСП

Для нахождения вероятности выбора детали с наличием ровно 2 дефектов используем ту же функцию, только в опции Интегральная указываем *Ложь*. Полученный результат в итоге приведен на рис. 4.

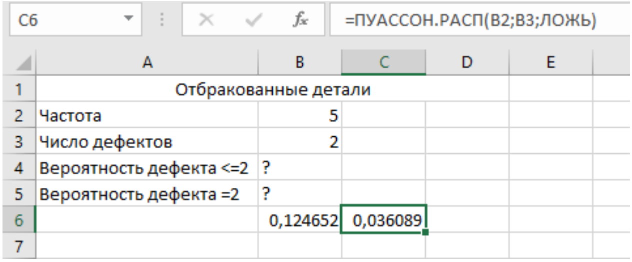


Рис. 4 – Результаты вычислений

Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Охарактеризовать биномиальное распределение.

2. Формула Бернулли.

3. Формулы математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения для биномиального распределения.

4. Распределения, близкие к геометрическому: формула для определения.

5. Распределение Пуассона как частный случай биномиального распределения.

6. Дискретная случайная величина X имеет распределение вероятностей, заданное таблицей:

x_i	9	11	14	16	20
p_i	0,3	0,3	0,5	0,2	a

Требуется:

а) найти число a;

б) построить многоугольник распределения;

в) найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график;

г) вычислить вероятность попадания случайной величины X на интервал [–0,7; 4).

7. Вероятность безотказной работы в течение гарантийного срока для навигаторов первого типа равна 0,9, второго типа – 0,7, третьего типа – 0,8. Случайная величина X – число навигаторов, проработавших гарантийный срок, среди трех навигаторов разных типов. Определить искомый закон распределения, составить функцию распределения. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

8. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	x_i	–4	–2	x
	p_i	0,3	0,5	p

Известно, что $M(X) = -1{,}8$. Найти: p, x $D(X)$ $P(-3 \leq X < x)$.

9. Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0,8. В контрольной партии

3 прибора. Случайная величина X – число приборов, удовлетворяющих требованиям качества. Определить закон распределения случайной величины.

10. Рассматривается почвенный термометр, состоящий из двух независимо работающих энергоблоков A и B, каждый из которых состоит из нескольких элементов: p_1=0,3; p_2=0,2; p_3=0,1; p_4=0,1; p_5=0,2; p_6=0,2; p_7=0,3. При отказе блока он подлежит полной замене, причём стоимость замены блока A составляет C_1=5, блока B – C_2=7 единиц стоимости. Предполагается, что за период времени сменный блок не выйдет ещё раз из строя. Необходимо определить закон распределения случайной величины – стоимости восстановления прибора за период T. Найти среднюю цену замены блока, дисперсию и стандартное отклонение. Построить полигон и функцию распределения.

3.3. Выборочный метод математической статистики

Выборочное наблюдение *– это вид несплошного наблюдения, при котором обследуется не вся* *совокупность, а лишь часть её, отобранная по определенным правилам выборки и обеспечивающая получение данных, характеризующих всю совокупность в целом.*

Задача выборочного наблюдения: по обследуемой части – выборочной совокупности – дать характеристику всей совокупности (генеральной совокупности), при условии соблюдении всех правил и принципов проведения статистического наблюдения.

Числовые характеристики генеральной совокупности называют ***параметрами генеральной совокупности****. Оценка параметра – это числовая характеристика, полученная на основе выборки.*

Организационными вопросами выборочного наблюдения являются: 1) обоснование границ генеральной совокупности; 2) единицы отбора; 3) единицы наблюдения; 4) способы отбора.

Основные характеристики параметров генеральной совокупности и оценок выборочной совокупности представлены в табл. 3.

Таблица 3

Основные характеристики параметров генеральной совокупности и оценок выборочной совокупности

Характеристики	Генеральная совокупность	Выборочная совокупность
Объем совокупности	N	n
Численность единиц, обладающих обследуемым качеством	M	m
Доля единиц, обладающих обследуемым качеством, выборочная доля	$P=\frac{M}{N}$	$w=\frac{n}{m}$
Среднее значение признака	$\bar{x}$	$\tilde{x}$
Дисперсия количественного признака	$\sigma^2_{\text{ген}}$	$\sigma^2_{\text{выб}}$
Дисперсия альтернативного признака	σ^2_p	σ^2_w
Число серий	$R(S)$	$R(s)$

Виды выборки и способы отбора

Различают следующие основные виды выборки (и их комбинации):

1. Случайная.

2. Механическая.

3. Типическая (может быть одноступенчатая и

многоступенчатая).

4. Серийная – гнездовая выборка; квотная выборка.

Случайный отбор

Под случайным отбором понимают наиболее распространенный способ отбора в случайной выборке, так называемый метод жеребьёвки, при котором на каждую единицу совокупности заготовляется жетон или билет с порядковым номером. Затем в случайном порядке отбирается необходимое количество единиц совокупности. При этих условиях каждая их них имеет одинаковую вероятность попасть в выборку.

Механический отбор

Вся совокупность разбивается на равные по объему группы по случайному признаку. Затем из каждой группы, как правило, берется одна единица. Все единицы изучаемой совокупности предварительно располагаются в определенном порядке - например, по алфавиту, местоположению и т.п., а потом, в зависимости от объёма выборки, механически, через определенный интервал, отбирается необходимое количество единиц.

Типический (стратифицированный, расслоенный) отбор

Изучаемая совокупность разбивается по

существенному, типическому признаку на качественно однородные, однотипные группы. Затем из каждой группы случайным способом отбирается количество единиц, пропорциональное удельному весу группы во всей совокупности.

Типический отбор дает более точные результаты, чем случайный или механический, потому что при нем в выборку в такой же пропорции, как и в генеральной совокупности, попадают представители всех типических групп.

Серийный (гнездовой) отбор

Отбору подлежат не отдельные единицы совокупности, а целые группы (серии, гнёзда), отобранные случайным или механическим способом. В каждой такой группе, серии проводится сплошное наблюдение, а результаты переносятся на всю совокупность.

Точность выборки зависит от схемы отбора. Выборка может быть проведена по схеме повторного и бесповторного отбора.

Задача. Имеются данные о массе клубня турнепса (г): 132, 132, 133, 134, 101, 134, 135, 105, 109, 138, 138, 110, 111, 140, 115, 125, 127, 115, 116, 127, 127, 116, 117, 127, 127, 117, 128, 117, 118, 130, 119, 131, 143, 124, 124, 144, 146, 124, 125, 150, 124, 158, 125, 121, 122, 121.

Необходимо:

1. Сгруппировать данные при большом числе исходных данных.

2. Изобразить графически значения вариационного ряда.

3. Рассчитать статистические показатели (характеристики) данных выборки.

4. Построить гистограмму и кривую вариационного ряда.

5. На основании анализа графического изображения сделать вывод о соответствии эмпирического ряда кривой нормального распределения.

Решение. Порядок группировки: при составлении группировок на основе количественных признаков определяют количество групп и интервалы группировки. Для определения количества групп необходимо придерживаться двух важных условий построения группировок: 1) выделенные группы должны отличаться качественной однородностью; 2) количество единиц в каждой группе должно быть достаточно большим, что отвечает требованию закона больших чисел. В массовой совокупности оптимальное количество групп с равными интервалами приблизительно можно определить по формуле американского учёного Стерджесса: m=1+3,322 lg n, где m – количество групп; n – объём совокупности. Т.е. для нашего случая m=1+3,322lg46≈7.

Классовый интервал рассчитывается: $i=\frac{x_{max}-x_{min}}{m}=\frac{158-101}{7}=8$.

Необходимо установить для каждой группы нижние и верхние границы.

Разобьем всё множество результатов измерения массы на 7 интервалов вида: [101, 109), [109, 117), [117, 125), [125, 133), [133, 141), [141, 149), [149, 158]. Для каждого интервала отмечаем середину и частоту, т.е. число наблюдений, попавших в интервал. Сумма всех частот по интервалам равна объему выборки. Кроме того, найдем и относительные частоты в интервалах, которые получаются путем деления частоты в интервале на сумму всех частот, которая в рассматриваемом примере равна 46. Относительная частота в интервале даёт процент попадания в интервал результатов измерения из их общего числа, в итоге получаем следующую таблицу:

Интервал	Середина интервала	Частота в интервале	Относительная частота в интервале
[101,109)	105	2	0,0435
[109, 117)	113	7	0,152
[117, 125)	121	12	0,261
[125, 133)	129	13	0,283
[133, 141)	137	7	0,152
[141, 149)	145	3	0,065
[149, 158]	153	2	0,0435

Таблица, в которой приведены все интервалы с соответствующими частотами по интервалам для заданной выборки наблюдений, называется *таблицей частот интервального вариационного ряда.*

Распределения частот и относительных частот по интервалам можно представить не только в виде таблиц, но и графически. Графическое изображение данных интервального вариационного ряда строят в виде ***гистограммы частот,*** или ***полигона частот.***

Гистограмма частот изображается следующим образом: над каждым интервалом строится прямоугольник, основанием которого служит данный интервал, а высотой – частота в данном интервале. Как правило, для удобства рассмотрения единицы масштаба по оси абсцисс и по оси ординат выбираются разные. Кроме того, и начала отсчета по разным осям тоже могут не совпадать. Гистограмма частот для рассматриваемого примера показана на рис. 5.

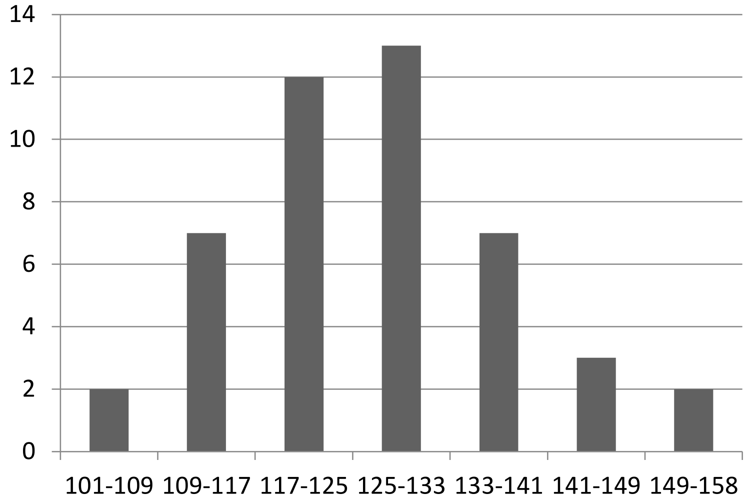


Рис. 5 – Гистограмма распределения

Если по оси ординат откладывать не частоты в интервалах, а относительные частоты в интервалах, то подобным образом можно построить ***гистограмму относительных частот***.

Полигон частот для интервального вариационного ряда изображается так: в середине каждого интервала строится ордината, равная частоте на этом интервале, и концы ординат соединяются. Полигон частот для рассматриваемого примера приведён на рис. 6.

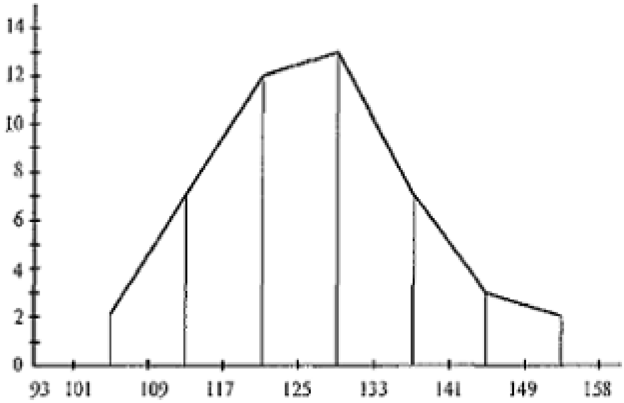


Рис. 6 – Полигон распределения

Если же строить в середине каждого интервала ординату, равную относительной частоте в этом интервале, и соединить концы ординат, то получим полигон относительных частот.

Полигоны частот и относительных частот можно строить и для непрерывного и для дискретного вариационного ряда. Однако для дискретного вариационного ряда необходимо ввести ***понятие выборочной функции распределения*** $F_n(x)$.

Пусть таблица дискретного вариационного ряда имеет вид:

x_1	x_2	…	x_k
n_1	n_2	…	n_k

где $x_1<x_2<\ldots<x_k$, $1 \le k \le n$, n_1 – частота x_1, n_2> – частота

$x_2, \dots, n_k$> – частота x_k, причем $n_1+n_2+\dots+n_k=n$.

Выборочной функцией распределения $F_n(x)$> *называется ступенчатая функция следующего вида:*

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le x_1 \\ \frac{n_1}{n}, x_1 < x \le x_2 \\ \frac{n_1+n_2}{n}, x_2 < x \le x_3 \\ \frac{n_{1+n_2+n_3}}{n}, x_3 < x \le x_4 \\ \dots\dots \\ \frac{n_{1+n_2+\dots+n_k}}{n}, x_{k-1} < x \le x_k \\ 1,\ x_k > x_к \end{cases}.$$

Для нашего примера $F(x)=\begin{cases} 0, x \le 105 \\ \frac{2}{46}, 105 < x \le 113 \\ \frac{9}{46}, 113 < x \le 121 \\ \frac{21}{46}, 121 < x \le 129 \\ \frac{34}{46}, 129 < x \le 137 \\ \frac{41}{46}, 137 < x \le 145 \\ \frac{44}{46}, 145 < x \le 153 \\ 1,\ 153 > x_к \end{cases}.$

Выборочная функция $F_n(x)$ является постоянной на каждом интервале $(x_p,\ x_{p+1})$, а в каждой точке x_p увеличивается на величину n_p/n, $p=1,2,\dots, k$-1. Кроме того, $F_n(x)$ – неубывающая функция, $0 \le F_n(x) \le 1$, $F_n(-\infty)=0$, $F_n(+\infty)=1$.

Таким образом, $F_n(x)$ обладает теми же свойствами, что и функция распределения $F(x)$ случайной величины.

Наряду с гистограммой для наглядного представления распределения применяются различные линии, например, ***кумулята*** и ***огива.***

Кумулята представляет собой ломанную кривую, строящуюся на основе прямоугольной системы координат, где по оси абсцисс откладываются значения признака, а по оси ординат – накопленные частоты, т.е. количество элементов совокупности, имеющих данное значение признака. Кумулятивная кривая характеризует распределение признака как «не меньше чем» и как «больше чем», в последнем случае такая кривая называется ***огивой***.

График $F_n(x)$ для рассмотренного выше интервального вариационного ряда показан на рис. 7. Единицы масштаба по осям взяты разные.

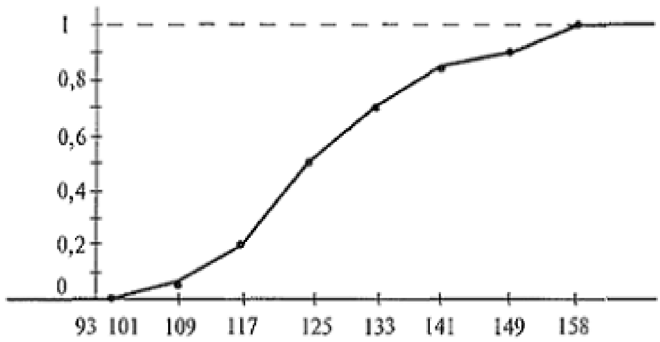


Рис.7 – Кумулята

Построением таблиц распределения частот и относительных таблиц частот вариационного ряда и графическим изображением данных этих таблиц завершается первоначальная обработка наблюдений случайной выборки.

К выборочным характеристикам интервального ряда относятся:

Выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i \omega_i.$$

Выборочная дисперсия:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 m_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \omega_i.$$

Выборочное среднеквадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{s^2}$$

Примечание: в формулах x_i – середина интервала i.

Определим эти выборочные характеристики для данных нашей задачи:

$$\bar{x} = \frac{105 \cdot 2 + 113 \cdot 7 + 121 \cdot 12 + 129 \cdot 13 + 137 \cdot 7 + 145 \cdot 3 + 153 \cdot 2}{46} = 126{,}74 \approx\approx 127.$$

$$s^2 = \frac{(105-127)^2 \cdot 2 + (113-127)^2 \cdot 7 + (121-127)^2 \cdot 12 + \cdots + (153-127)^2 \cdot 2}{46} =$$

$$= 127{,}13.$$

$$\sigma = \sqrt{S^2} = \sqrt{127{,}13} = 11{,}27.$$

Для определения доверительного интервала с надежностью 95% для оценки генеральной средней воспользуемся формулой

$$\bar{X} - t_{\alpha,n-1} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha,n-1} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $t_{\alpha,n-1}$ – критическое значение t-статистики (распределения Стьюдента, прил. 1) с уровнем значимости $\propto$, числом степеней свободы n–1, которое определяется по специальным статистическим таблицам либо с помощью MS Excel (вставка функции, категория Статистические→ СТЬЮДРАСПОБР); $\propto$ – уровень значимости, в нашем случае надежность 95% соответствует уровню значимости $\propto$=0,05.

В нашем случае число степеней свободы n–1=46–1=45 (в прил.1 возьмём приближённое к этому числу 40) и

$\propto$=0,05, на пересечении этих данных находится число t=2,0211.

Подставляем в формулу 127– 2,0211<<127+2,0211,

127–3,36< <127+3,36 или 123,64< <130,36.

Таким образом, по результатам проведённого исследования массы турнепса был построен интервальный ряд распределения, определены выборочные характеристики, которые показывают, что средняя масса клубня турнепса составляет 127 г, масса отдельных клубней колеблется в пределах 127±11,27 г. Наибольшее число клубней имеют вес в интервале 125-133 г. Доверительный интервал с надёжностью 95% для выборочной средней составляет 123,64<   <130,36.

Выборочная функция распределения представлена видом

$$F(x)=\left\{\begin{matrix} 0, x \le 105 \\ \frac{2}{46}, 105 < x \le 113 \\ \frac{9}{46}, 113 < x \le 121 \\ \frac{21}{46}, 121 < x \le 129 \\ \frac{34}{46}, 129 < x \le 137 \\ \frac{41}{46}, 137 < x \le 145 \\ \frac{44}{46}, 145 < x \le 153 \\ 1,\ 153 > x_k \end{matrix}\right\}.$$

Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Что представляет собой выборочное наблюдение?
2. Какие характеристики относят к параметрам генеральной и выборочной совокупности?
3. Описать виды отбора в выборочную совокупность.
4. Какие типы графических представлений используют для распределения дискретных и вариационных данных?
5. Параметры распределения непрерывной и дискретной случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение
6. По результатам проведенного эксперимента (в номерах задач 1-12 результаты обследования по массе (кг) 20 кроликов, номера задач 13-24 – результаты обследования 20 телят холмогорских помесей по их живой массе при рождении (кг)) требуется для признака X:

а) построить интервальный вариационный ряд и гистограмму относительных частот;

б) перейти к дискретному ряду и построить полигон частот;

в) вычислить основные выборочные характеристики;

г) с надежностью 95% указать доверительный интервал для оценки генеральной средне

Номер наблюдения	Номер задачи											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3,1	5,5	3,2	6,0	5,3	7,9	10,1	3,7	4,6	4,8	5,0	9,2
2	4,2	5,9	3,8	4,5	4,9	5,2	8,9	4,2	5,3	5,4	4,9	9,8
3	5,0	7,5	4,1	4,7	4,2	4,9	9,3	5,3	5,7	4,9	7,0	10,2
4	4,6	5,4	4,3	5,7	3,9	4,7	8,7	5,9	4,1	3,8	7,2	10
5	6,4	3,4	4,3	5,2	5,8	4,1	5,6	4,9	3,6	5,5	6,8	9,7
6	5,3	5,2	5,6	3,8	6,0	3,9	6,3	4,3	3,2	5,2	6,2	8,0
7	3,8	4,3	6,0	4,3	4,7	5,6	7,2	5,6	3,0	6,4	6,1	6,8
8	5,1	4,7	5,7	4,3	4,1	5,8	7,0	7,1	4,1	6,7	5,9	6,9
9	4,9	5,8	4,5	5,1	3,6	5,7	8,1	6,6	4,9	5,8	5,5	7,2
10	5,4	6,8	5,0	5,7	5,1	4,3	8,5	4,9	5,1	5,4	5,6	7,3
11	5,9	4,0	6,7	6,3	5,0	4,4	8,6	5,3	6,0	4,7	5,0	7,4
12	6,5	5,7	5,3	4,8	4,5	4,8	8,9	5,8	5,7	3,3	3,5	7,5
13	5,5	4,5	5,4	5,6	4,4	4,9	9,3	4,9	5,9	5,1	4,9	8,1
14	5,7	5,3	4,7	6,4	5,2	4,3	9,4	4,8	5,5	4,6	4,8	8,0
15	4,7	6,3	4,3	7,2	6,0	5,4	9,0	5,6	6,2	5,8	6,0	8,2
16	5,6	5,2	5,9	5,0	6,1	5,1	8,1	5,8	3,3	6,0	5,0	8,3
17	5,8	4,1	6,5	5,3	3,5	6,9	9,6	4,6	3,4	7,1	5,1	7,8
18	7,3	5,1	7,1	5,1	3,7	8,0	7,6	5,3	3,4	5,2	3,6	7,6
19	4,7	5,0	3,4	4,2	4,3	7,3	7,4	5,0	3,2	5,5	3,5	6,5
20	5,5	6,2	4,6	3,7	4,1	7,1	7,2	6,0	3,0	4,7	5,0	5,9

Продолжение таблицы

Номер наблюдения	Номер задачи												
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	27	34	43	31	39	35	36	28	30	40	26	29	32
2	32	39	26	30	30	30	36	29	38	41	35	31	29
3	31	28	35	29	30	29	28	28	36	36	45	36	41
4	32	26	45	27	36	22	31	25	31	31	26	30	36
5	28	40	26	26	38	23	30	23	30	26	35	31	31
6	37	35	35	34	24	24	32	21	32	29	32	32	30
7	35	31	32	36	32	21	24	20	29	27	32	30	29
8	26	30	32	29	30	23	38	20	28	30	35	28	41
9	28	32	35	27	31	25	36	19	26	35	35	29	30
10	32	29	35	30	28	30	30	31	25	36	28	24	29
11	39	28	28	31	36	28	30	19	30	38	32	26	33
12	34	29	32	32	36	24	39	22	32	28	36	25	35
13	30	29	36	36	26	29	32	20	32	35	32	38	34
14	37	36	32	25	27	26	27	25	35	38	36	30	37
15	26	35	36	26	35	28	36	24	36	24	37	36	38
16	27	34	37	24	37	27	32	26	30	20	33	34	39
17	40	40	33	30	28	32	34	28	34	21	28	32	40
18	35	41	28	29	31	33	26	29	35	36	31	30	29
19	37	28	31	27	27	35	23	30	29	39	36	29	36
20	28	26	32	27	37	24	28	31	30	40	33	25	37

3.4. Выборочные распределения и их характеристики

Основной целью анализа данных являются статистические выводы, т.е. применение выборочных показателей для оценки параметров генеральной совокупности. Статистические выводы относятся к генеральным совокупностям, а не к выборкам из них.

На практике из генеральной совокупности извлекается выборка заранее установленного объема. Элементы, принадлежащие данной выборке, выбираются случайным образом. Распределения выборочных параметров называют выборочными.

Выборочное распределение средних значений

Арифметическое среднее называется **несмещенным**, поскольку среднее значение всех выборочных средних (при заданном объеме выборки n) равно математическому ожиданию генеральной совокупности.

Задача. Генеральная совокупность токарей на предприятии состоит из четырех сотрудников. Каждый из них за один и тот же период времени на токарных станках изготавливал детали. Количество бракованных деталей, сделанных каждым токарем: $X_1=3$, $X_2=2$, $X_3=1$, $X_4=4$. Необходимо построить выборочное распределение и определить все его выборочные показатели.

Решение. На рис. 8 построено распределение бракованных деталей.

Математическим ожиданием генеральной совокупности называется сумма всех значений совокупности, деленная на ее объем: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$,

где μ – математическое ожидание генеральной совокупности; N – объем генеральной совокупности; X_i – i-й элемент генеральной совокупности.

Стандартным отклонением генеральной совокупности называется корень квадратный из ее дисперсии. Таким образом, в нашем примере:

$\mu = \frac{3+2+1+4}{4} =$ 2,5 бракованных детали.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(3-2{,}5)^2 + (2-2{,}5)^2 + (1-2{,}5)^2 + (4-2{,}5)^2}{4}} =$$

$$= 1{,}12 \text{ бракованных детали.}$$

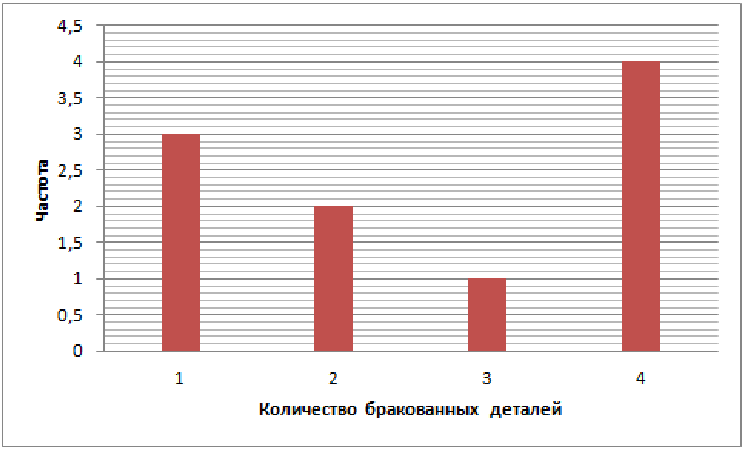


Рис. 8 – Количество бракованных деталей, сделанных четырьмя токарями

Если из этой генеральной совокупности необходимо извлечь с возвращением выборку, состоящую из двух токарей, возникает 16 вариантов выбора: $N^m = 4^2 = 16$. Эти варианты приведены в табл. 4. Если усреднить все 16 средних значений, мы получим величину $\mu_{\bar{x}}$, равную математическому ожиданию генеральной совокупности μ, т.е. числу 2,5.

Итак, среднее значение всех выборочных средних $\mu_{\bar{x}}$ равно математическому ожиданию генеральной совокупности. Следовательно, хотя нам неизвестно, насколько хорошо конкретное выборочное среднее аппроксимирует математическое ожидание генеральной совокупности, среднее значение всех выборочных средних совпадает с математическим ожиданием генеральной совокупности.

Таблица 4

Все возможные варианты выбора двух токарей из четырех

Выборка	Токари	Количество брака	Среднее значение	Выборка	Токари	Количество брака	Среднее значение
1	X_1, X_1	3,3	3,0	9	X_3, X_1	1,3	2,0
2	X_1, X_2	3,2	2,5	10	X_3, X_2	1,2	1,5
3	X_1, X_3	3,1	2,0	11	X_3, X_3	1,1	1,0
4	X_1, X_4	3,4	3,5	12	X_3, X_4	1,4	2,5
5	X_2, X_1	2,3	2,5	13	X_4, X_1	4,3	3,5
6	X_2, X_2	2,2	2,0	14	X_4,X_2	4,2	3,0
7	X_2, X_3	2,1	1,5	15	X_4, X_3	4,1	2,5
8	X_2, X_4	2,4	3,0	16	X_4, X_4	4,4	4,0

Стандартная ошибка среднего. Колебание выборочных средних вокруг математического ожидания генеральной совокупности меньше, чем колебание исходных данных. Этот факт непосредственно следует из закона больших чисел. Исходная генеральная совокупность может содержать числа, которые являются как очень большими, так и очень маленькими. Однако если экстремальное значение попадет в выборку, ее влияние на среднее значение будет ослаблено, поскольку оно будет просуммировано со всеми остальными элементами выборки. При увеличении объема выборки влияние экстремальных значений ослабевает, поскольку в усреднении принимает участие все большее количество элементов.

Диапазон изменения выборочных средних описывается их стандартным отклонением. Эта величина называется стандартной ошибкой среднего и обозначается как $\sigma_{\bar{x}}$. Стандартная ошибка среднего равна стандартному отклонению генеральной совокупности σ, деленному на квадратный корень из объема выборки n: $\mu_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Следовательно, при возрастании объема выборки n стандартная ошибка среднего уменьшается со скоростью, пропорциональной квадратному корню из n. Эту формулу можно применять для аппроксимации стандартной ошибки среднего, если выборки извлекаются из генеральной совокупности без возвращения при условии, что каждая выборка содержит не более 5% элементов всей генеральной совокупности. Проиллюстрируем это свойство следующим примером.

Пример. Если из нескольких тысяч коробок случайным образом извлекается без возвращения выборка из 25 коробок, в нее попадет не более 5% элементов всей генеральной совокупности. Вычислить стандартную ошибку среднего, если стандартное отклонение веса коробки равно 15 г.

Решение. Подставим в формулу значения n=25 и σ=15, получаем стандартную ошибку среднего:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = 3.$$

Следует обратить внимание, что изменчивость выборочных средних намного меньше, чем изменчивость исходных данных (т.е. $\sigma_{\bar{x}}$=3 намного меньше, чем σ=15).

Выборки из нормально распределенных генеральных совокупностей. Введя понятие выборочных распределений и дав определение стандартной ошибки среднего, мы можем ответить на вопрос, как распределены выборочные средние $\bar{X}$. Если выборки извлекаются с возвращением из нормально распределенной генеральной совокупности, математическое ожидание которого равно μ, а стандартное отклонение – σ, то выборочное распределение средних также является нормальным при любом объеме выборок n, причем $\mu_{\bar{x}}$=μ, а стандартная ошибка – $\sigma_{\bar{x}}$.

Стоит обратить внимание на то, что при увеличении объема выборок выборочное распределение средних остается нормальным. Однако увеличение объема выборки приводит к уменьшению стандартной ошибки среднего, поэтому чем больше становится выборка, тем ближе выборочные средние к математическому ожиданию генеральной совокупности.

Выборочное распределение средних значений в Excel

Задача. Упаковочная машина, заполняющая 368-граммовые коробки, настроена так, что количество удобрений, засыпанных в эти коробки, распределено нормально, причем среднее значение распределения равно 368 г. Измерения показали, что стандартное отклонение массы коробок равно 15 г. Допустим, что из многих тысяч коробок, заполненных за день, наугад выбираются 25 коробок и вычисляется их средняя масса. Следует ли ожидать, что выборочная средняя масса окажется равной 368 г., и какой она будет на самом деле?

Решение. Выборка является миниатюрной моделью генеральной совокупности, поэтому если исходная генеральная совокупность распределена нормально, выборка из нее должна быть приближенно нормальной. Следовательно, если математическое ожидание генеральной совокупности равно 368 г, выборочное среднее также должно быть близким к 368 г. Как вычислить вероятность того, что выборочное среднее, полученное для выборки объемом n=25, окажется меньше 365 г. Из свойств нормального распределения следует, что площадь, отсекаемая каждым значением случайной величины X от фигуры, ограниченной гауссовой кривой, можно вычислить, преобразовав стандартизованную нормальную случайную величину Z: $Z = (X - \mu)/\sigma$

Для расчетов в Excel преобразование не требуется. Просто нужно воспользоваться функцией =НОРМ.РАСП() (рис. 9).

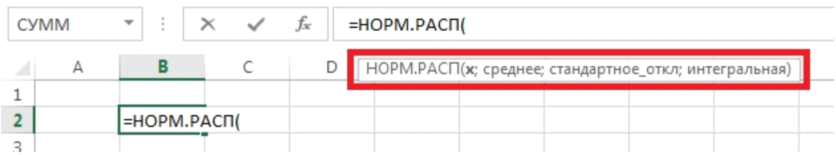


Рис. 9 – Нормальная функция распределения при параметрах: x – нормальная случайная величина; μ – среднее; σ – стандартное отклонение, интегральная

ИСТИНА

Подставляя в приведенную выше формулу величину $\bar{X}$ вместо X, величину $\mu_{\bar{x}}$ вместо μ и величину $\sigma_{\bar{x}}$ вместо σ, получаем: $Z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Необходимо заметить, что благодаря несмещенности величина всегда равна μ. Таким образом, значение величины Z, соответствующее вероятности того, что выборочное среднее, полученное для выборки объемом n=25, окажется меньше 365 г, равна:

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}=\frac{365-368}{\frac{15}{\sqrt{25}}}=\frac{-3}{3}=-1.$$

вероятность, соответствующая значению $Z=-1$,
равна $P(Z=-1)=0{,}1587$.

Следовательно, выборочное среднее 15,87% всех возможных выборок, имеющих объем n = 25, не превосходит 365 г. Это не значит, что масса 15,87% элементов выборок не превосходит 365 г. Долю таких элементов можно вычислить по следующей формуле:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{365-368}{15}=\frac{-3}{15}=-0{,}2.$$

Вероятность, соответствующая значению $Z=-0{,}2$, равна $P(Z=-0{,}2)=0{,}4207$.

Следовательно, в каждой выборке, имеющей объем n=25, масса 42,07% коробок не превосходит 365 г. Это можно объяснить тем, что каждая выборка состоит из 25 разных значений, одни из которых велики, а другие – малы. Процедура усреднения ослабляет влияние отдельных элементов, особенно при увеличении объема выборки. Таким образом, вероятность того, что выборочное среднее, вычисленное по выборке, состоящей из 25 коробок, будет значительно отличаться от математического ожидания генеральной совокупности, меньше вероятности, что масса отдельных элементов значительно отличается от этого значения.

Выборки из генеральных совокупностей, распределения которых отличаются от нормального.

Во многих ситуациях распределение генеральной совокупности либо неизвестно, либо заведомо отличается от нормального. Таким образом, следует рассмотреть выборочное распределение средних для генеральной совокупности, распределение которой отличается от нормального. Этот анализ приводит нас к основной теореме статистики, которая утверждает, что при достаточно большом объеме выборок выборочное распределение средних можно аппроксимировать нормальным распределением. Это свойство не зависит от вида распределения генеральной совокупности.

Какой объем выборок следует считать достаточным? Как правило, для подавляющего большинства генеральных совокупностей выборочное распределение средних становится приближенно нормальным при n=30. Однако, если известно, что распределение генеральной совокупности является колоколообразным, эту теорему можно применять и для меньшего объема выборок. Если же распределение генеральной совокупности обладает сильной асимметрией или имеет несколько модальных значений, объем выборок следует увеличить.

Применение центральной предельной теоремы к различным генеральным совокупностям проиллюстрировано на рис. 10.

Панель А: выборочное распределение средних, построенное для генеральной совокупности, имеющей нормальное распределение. Если генеральная совокупность является нормально распределенной, выборочное распределение средних также является нормальным, независимо от объема выборок. При увеличении объема выборок изменчивость выборочных средних уменьшается.

Панель Б: выборочное распределение средних, построенное для генеральной совокупности, имеющей равномерное распределение. При *n*=5 выборочное распределение средних является приближенно нормальным. При *n*=30 выборочное распределение средних становится практически нормальным.

Панель В: выборочное распределение средних, построенное для генеральной совокупности, имеющей экспоненциальное распределение. Это распределение имеет ярко выраженную положительную асимметрию. При *n*=2 асимметрия выборочного распределения средних сохраняется, но выражена слабее. При *n*=5 выборочное распределение средних становится почти симметричным со слабой положительной асимметрией. При *n*=30 выборочное распределение средних становится приближенно нормальным. В любом случае среднее значение выборочных средних всегда совпадает с математическим ожиданием генеральной совокупности, а его изменчивость при увеличении объема выборок уменьшается.

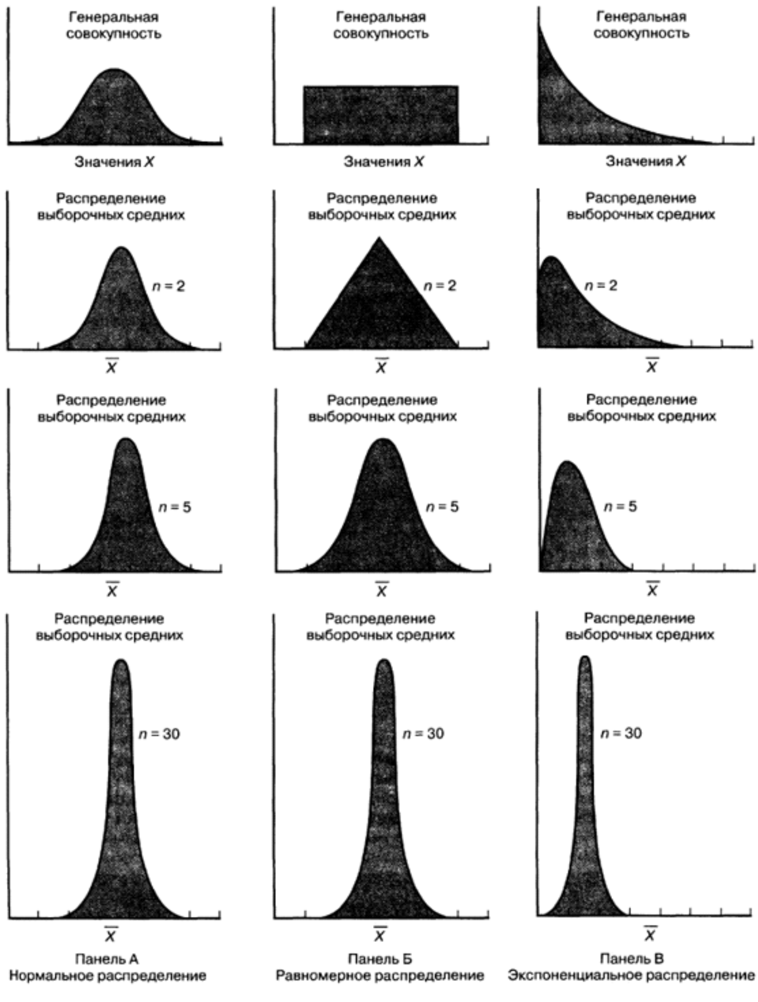


Рис. 10 – Выборочное распределение средних для разных генеральных совокупностей при объемах выборок $n = 2$, 5 и 30

Свойства выборочного распределения средних

Свойство 1. Если объем выборок превышает 30, выборочное распределение средних для большинства генеральных совокупностей является приближенно нормальным.

Свойство 2. Если генеральная совокупность распределена симметрично, выборочное распределение средних становится приближенно нормальным уже при n=15.

Свойство 3. Если генеральная совокупность является нормально распределенной, выборочное распределение средних является нормальным при любом объеме выборок.

Выборочное распределение долей

При анализе категорийных данных, принимающих одно из двух значений, например, бычок или тёлочка, белое/чёрное и т.д., результаты часто обозначают единицами (да) и нулями (нет). Среднее значение, вычисленное по выборке, состоящей из n таких элементов, равно количеству единиц, деленному на n. Например, из пяти респондентов три человека предпочитают торговую марку А, а двое – торговую марку Б. Следовательно, выборка состоит из трех единиц и двух нулей. Суммируя элементы выборки и деля сумму на пять, получаем, что доля поклонников торговой марки А в данной выборке равна 0,6. Таким образом, для категорийных данных выборочное среднее нулей и единиц представляет собой выборочную долю p_S некоторой характеристики, которой обладают элементы выборки.

Выборочная доля признака: p_S *=X/n =количество объектов, имеющих указанную характеристику / размер выборки.*

Выборочная доля признака p_S имеет особое свойство: она принимает значения от 0 до 1. Если все элементы выборки обладают одинаковыми характеристиками, то каждому из них присваивается единица, а выборочная доля признака также становится равной единице. Если только половина элементов выборки обладает интересующим нас свойством, им приписываются единицы, а остальные обозначаются нулями. В этом случае выборочная доля признака p_S равна 0,5. Если ни один элемент выборки не обладает интересующим нас свойством, им приписываются нули. В этом случае выборочная доля признака p_S равна нулю.

В то время как выборочное среднее является несмещенной оценкой математического ожидания генеральной совокупности статистика p_S является несмещенной оценкой доли признака p в генеральной совокупности. По аналогии с распределением выборочных средних можно ввести стандартную ошибку доли признака: $\sigma_{p_s} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Если выборка извлекается из конечной генеральной совокупности без возвращения, выборочное распределение доли признака подчиняется биномиальному закону. Однако если значения np и $n(1-p)$ больше 4, это распределение можно аппроксимировать нормальным. При статистическом анализе долей признака объем выборки играет очень важную роль. Следовательно, во многих ситуациях для оценки выборочного распределения доли признака можно использовать нормальное распределение. Таким образом, в формуле величину $\bar{X}$ можно заменить величиной p_S, величину μ – величиной p, а величину $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ – величиной $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Разность между выборочной долей признака и долей признака в генеральной совокупности: $Z = \frac{p_s - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$.

Задача. Предположим, что в одном селе 40% всех жителей выращивают несколько сортов картофеля.

Обоснуйте что, если создать выборку из 200 жителей, то можно вычислить вероятность того, что выборочная доля жителей, занимающихся возделыванием картофеля несколько сортов, не превосходит 0,3.

Решение. Поскольку n_p=200·0,4=80>5 и $n(1–p)$=200·0,6=120>5, выборочное распределение доли жителей практически совпадает с нормальным. Применим только что полученную формулу:

$$Z=\frac{p_S-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}=\frac{0{,}30-0{,}40}{\sqrt{\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{200}}}=\frac{-0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}24}{200}}}=\frac{-0{,}10}{0{,}0346}= –2{,}89.$$

Значению Z = –2,89 соответствует $p(Z)$ = 0,0019. Следовательно, вероятность того, что доля жителей, выращивающих несколько сортов картофеля, не превосходит 0,3, равна 0,19%, т.е. крайне мала.

Точечная оценка параметров распределения

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – выборка объема n из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$.

Числовые характеристики этой выборки называются выборочными (эмпирическими) числовыми характеристиками.

Отметим, что выборочные числовые характеристики являются характеристиками данной выборки, но не являются характеристиками распределения генеральной совокупности. Однако эти характеристики можно использовать для оценок параметров генеральной совокупности.

Точечной *называют статистическую оценку, которая определяется одним числом. Точечная оценка характеризуется свойствами: несмещенность, состоятельность и эффективность.*

Несмещенной *называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.*

Точечная оценка называется ***состоятельной***, если при неограниченном увеличении объема выборки (*n* ¥) она сходится по вероятности к истинному значению параметра, т.е. стремится к истинному значению оцениваемого параметра генеральной совокупности.

Эффективной *называют точечную оценку, которая (при заданном объеме выборки n) имеет наименьшую возможную дисперсию, т.е. гарантирует наименьшее отклонение выборочной оценки от такой же оценки генеральной совокупности:* $n=\sum_{i=1}^{k} n_k$.

В математической статистике показывается, что состоятельной, несмещенной оценкой генерального среднего значения является выборочное среднее: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \cdot x_i}{n}$, где x_i – варианта выборки, n_i – частота варианты x_i, n – объем выборки.

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии *служит исправленная выборочная дисперсия:* $S^2 = \frac{n}{n-1}$; $S^2_{\text{выб}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$.

Более удобна формула $S^{=2}_{\text{исправ}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i {x_i}^2 - (\sum_{i=1}^{k} n_i x_i)^2 / n}{n-1}$.

Оценка S^2 для генеральной дисперсии является также и состоятельной, но не является эффективной. Однако в случае нормального распределения она является «асимптотически эффективной», т.е. при увеличении n отношение ее дисперсии к минимально возможной неограниченно приближается к единице.

Итак, если дана выборка из распределения $F(x)$ случайной величины X с неизвестным математическим ожиданием M и дисперсией S^2, то для вычисления значений этих параметров мы имеем право пользоваться следующими приближенными формулами:

$$M \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i\,; \quad \sigma^2 \approx S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2.$$

Точечные оценки имеют тот недостаток, что при малом объеме выборки могут значительно отличаться от оцениваемых параметров. Поэтому, чтобы получить представление о близости между параметром и его оценкой, в математической статистике вводятся так называемые интервальные оценки.

Доверительный интервал

Если при статистической обработке результатов требуется найти не только точечную оценку неизвестного параметра θ, но и охарактеризовать точность этой оценки, то находится доверительный интервал.

Доверительный интервал *– это интервал, в котором с заранее заданной доверительной вероятностью находится неизвестный параметр генеральной совокупности.*

Доверительная вероятность *– это вероятность, с которой неизвестный параметр генеральной совокупности принадлежит доверительному интервалу.*

Длина доверительного интервала характеризует точность интервального оценивания и зависит от объема выборки и доверительной вероятности. При увеличении объема выборки длина доверительного интервала уменьшается (точность увеличивается), а при стремлении доверительной вероятности к 1 длина доверительного интервала увеличивается (точность уменьшается) Наряду с доверительной вероятностью p часто на практике используют уровень значимости α = 1–p.

Обычно принимают p=0,95 или (реже) 0,99. Эти вероятности признаны достаточными для уверенного суждения о генеральных параметрах на основании известных выборочных показателей.

Доверительный интервал для математического ожидания имеет вид:

$$\bar{x} - \frac{St_{l-\alpha/_2}(n-1)}{\sqrt{n}};\bar{x} + \frac{St_{l-\alpha/_2}(n-1)}{\sqrt{n}},$$

где S – среднеквадратичное отклонение, t_l – критическое значение распределения Стьюдента.

Доверительный интервал для дисперсии имеет вид:

$$\sigma^2 \epsilon \left(\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{l-\alpha/_2}(n-1)};\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/_2}(n-1)}\right),$$

где (n) – обратное распределение Хи-квадрат.

Задача. Дана выборка 5, 6, 8, 2, 3, 1, 1, 4. Записать данные в виде вариационного ряда. Определить оценки среднего, дисперсии, и стандартного отклонения, а также построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии на уровне значимости α =0,05.

Решение. Представим данные в виде вариационного ряда: 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. Так как n=8, то выборочное среднее и исправленная выборочная дисперсия равны:

$\bar{x} = \frac{1}{8}(1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8) =$3,75.

$S^2 = \frac{1}{8-1}(1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 8^2 - 8 * 3{,}75^2) \approx$6,214.

Стандартное отклонение: S=$\sqrt{S^2}$ =2,493.

По таблицам из прил.1, 3 находим:

$t_{0.975}(7)$=2,365; $\chi^2_{0,05}(7)$=1,69,

Получаем доверительный интервал для математического ожидания:

$3{,}75 - \frac{2{,}493 \cdot 2{,}365}{\sqrt{8}}; \leq M \leq 3{,}75 + \frac{2{,}493 \cdot 2{,}365}{\sqrt{8}}$; или 1,665$\leq M \leq$5,835.

Доверительный интервал для дисперсии:

$\frac{7 \cdot 6{,}214}{16} \leq S^2 \leq \frac{7 \cdot 6{,}214}{2{,}365}$; или 2,719$\leq S^2 \leq$ 18,39.

Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Понятие несмещённого арифметического среднего.

2. Как определяется стандартная ошибка среднего?

3. Охарактеризовать зависимость стандартной

ошибки среднего от объёма выборки.

4. Охарактеризовать применение центральной предельной теоремы к различным генеральным совокупностям.

5. Выборочная доля признака: формула, пределы значений.

6. Статистическая оценка: точечная, несмещённая, эффективная.

7. Как определяется несмещённая оценка генеральной дисперсии.

8. Дать определение доверительного интервала и доверительной вероятности.

9. Упаковочная машина, заполняющая 200-граммовые тубусы, настроена так, что количество семян, засыпанных в тубусы, распределено нормально, причем среднее значение распределения равно 200 г. Измерения показали, что стандартное отклонение массы тубусов равно 8 г. Допустим, что из многих тысяч тубусов, заполненных за день, наугад выбираются 30 тубусов и вычисляется их средняя масса. Следует ли ожидать, что выборочный средняя масса окажется равной 200 г., и какой она будет на самом деле?

10. В результате 10 независимых измерений

некоторой величины X, выполненных с одинаковой точностью, полученные опытные данные, которые представлены в следующем виде:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
7,8	6,2	6,4	5,7	7,5	6,5	6,7	5,9	5,8	5,2

Предполагая, что результаты измерений подчинены нормальному закону распределения вероятностей, оценить истинное значение величины X при помощи доверительного интервала, покрывающего это значение с доверительной вероятностью 0,95.

3.5. Проверка статистических гипотез

Статистическая гипотеза *– это утверждение о виде неизвестного распределения или параметрах известного распределения. Статистические гипотезы проверяются по результатам выборки статистическими методами в ходе эксперимента (эмпирическим путем) с помощью статистических критериев.*

В тех случаях, когда известен закон, но неизвестны значения его параметров (дисперсия или математическое ожидание) в конкретной ситуации, статистическую гипотезу называют ***параметрической***.

Например, предположения об ожидаемом среднем урожае по зерновым культурам или разбросе урожайности являются параметрическими гипотезами.

Когда закон распределения генеральной совокупности не известен, но есть основания предположить, каков его конкретный вид, выдвигаемые гипотезы о виде его распределения называются ***непараметрическими.***

Например, можно выдвинуть гипотезу, что число ежедневных удоев молока в хозяйстве или валовая прибыль К(Ф)Х подчинены нормальному закону распределения.

По содержанию статистические гипотезы можно классифицировать следующим образом:

- Гипотезы о типе вероятностного закона распределения случайной величины, характеризующего явление или процесс.
- Гипотезы об однородности двух или более обрабатываемых выборок. Изучаемое свойство исследуется с помощью двух или более генеральных совокупностей. Гипотеза в этом случае может заключаться в следующем: исследуемые выборочные характеристики различаются между собой статистически значимо или нет.
- Гипотезы о свойствах числовых значений параметров исследуемой генеральной совокупности. Больше ли значения параметров некоторого заданного

номинала или меньше и т.д.

- Гипотезы о вероятностной зависимости двух или более признаков, характеризующих различные свойства рассматриваемого явления или процесса. При этом определяется характер данной зависимости.

Гипотезы бывают ***простые*** *(содержащие одно предположение) и* ***сложные*** *(содержащие несколько предположений).*

Выдвинутую гипотезу называют ***основной*** *или* ***нулевой*** *и обозначают* H_0.

Противоречащую ей гипотезу называют ***альтернативной*** *или* ***конкурирующей*** *и обозначают* H_1.

Различают три вида критериев:

1. ***Параметрические критерии*** – критерии значимости, которые служат для проверки гипотез о параметрах распределения генеральной совокупности при известном виде распределения.

2. ***Критерии согласия*** – позволяют проверить гипотезы о соответствии распределений генеральной совокупности известной теоретической модели.

3. ***Непараметрические критерии*** – используются в гипотезах, когда не требуется знаний о конкретном виде распределения.

Проверка параметрических гипотез проводится на основе критериев значимости, а непараметрических – критериев согласия.

Задача проверки статистических гипотез сводится к исследованию генеральной совокупности по выборке. Множество возможных значений элементов выборки может быть разделено на два непересекающихся подмножества – критическую область и область принятия гипотезы.

Область принятия гипотезы, или область допустимых значений *$I_{доп}$, – совокупность значений критерия, при которых эту гипотезу принимают.*

Критическая областью *$I_{кр}$ – множество значений критерия, при котором гипотезу отвергают.*

Наблюдаемое значение критерия (статистика) *$K_{набл}$ – такое значение критерия, которое находится по данным выборки.*

***Границы критической области**, отделяющие ее от области принятия гипотезы, называют критическими точками и обозначают $K_{кр}$.*

Для определения критической области задается уровень значимости – некая малая вероятность попадания критерия в критическую область.

***Уровень значимости** – вероятность принятия конкурирующей гипотезы, тогда как справедлива основная.*

С помощью уровня значимости определяются границы критической области.

Основной принцип проверки статистических гипотез состоит в следующем: если наблюдаемое значение статистики критерия попадает (не попадает) в критическую область, то гипотеза H_0 отвергается (принимается), а гипотеза H_1 принимается (отвергается) в качестве одного из возможных решений с формулировкой «гипотеза H_0 противоречит (не противоречит) выборочным данным на уровне значимости».

В зависимости от содержания альтернативной гипотезы осуществляется выбор критической области: левосторонней, правосторонней, двусторонней. Если смысл исследования заключается в доказательстве конкретного изменения наблюдаемого параметра (его уменьшения или увеличения), то говорят об односторонней критической области. Если смысл исследования – выявить различия в изучаемых параметрах, но характер их отклонения от контрольных (или теоретических) не известен, то говорят о двусторонней критической области.

Однако, принятие той или иной гипотезы не дает оснований утверждать, что она верна. Результат проверки статистической гипотезы лишь устанавливают на определенном уровне значимости ее соответствие (несоответствие) результатам эксперимента.

При проверке статистических гипотез возможны следующие ошибки:

ошибка первого рода *– отвергнута правильная H_0, а принята неправильная гипотеза H_1;*

ошибка второго рода *– отвергнута правильная альтернативная гипотеза H_1 и принята неправильная нулевая гипотеза H_0.*

Заметим, что уровень значимости есть вероятность ошибки первого рода. *Ошибка первого рода называется* ***риском ошибочного отклонения***. Обычно она задаётся некоторыми конкретными значениями: 0,05; 0,01; 0,005; 0,001. Ошибки второго рода называются ***риском ошибочного принятия***, а вероятность ее допустить обозначается (вероятность того, что принята гипотеза H_0, когда на самом деле справедлива альтернативная гипотеза H_1).

Необходимо знать, что с уменьшением ошибок первого рода одновременно увеличиваются ошибки второго рода и наоборот. Поэтому, на практике пытаются подбирать значения параметров и опытным путем в целях минимизации суммарного эффекта от возможных ошибок.

Этапы проверки статистических гипотез

1. Формулировка основной гипотезы H_0 и конкурирующей гипотезы H_1.

2. Задание уровня значимости α, на котором в дальнейшем и будет сделан вывод о справедливости гипотезы.

3. Расчёт статистики φ-критерия такой, что: её величина зависит от исходной выборки $X=(X_1, X_2, \ldots X_n)$, $\phi=\phi(X_1, X_2, \ldots X_n)$; по её значению можно делать выводы об истинности гипотезы H_0; статистика φ, как функция случайной величины X, также является случайной величиной и подчиняется какому-то закону распределения.

4. Построение критической области. Из области значений ϕ выделяется подмножество таких значений, по которым можно судить о существенных расхождениях с предположением. Его размер выбирается таким образом, чтобы выполнялось равенство P=α. Это множество и называется критической областью.

5. Вывод об истинности гипотезы. Наблюдаемые значения выборки подставляются в статистику φ и по попаданию (или непопаданию) в критическую область выносится решение об отвержении (или принятии) выдвинутой гипотезы H_0.

Для каждой задачи соответствует определённый критерий (табл. 5).

Таблица 5

Применение критериев при проверке статистических гипотез

Задача	Содержание задачи	Методы
Доказать различие двух средних арифметических для одного признака	Отличаются доминирующие факторы, формирующие выборки	Критерий Стьюдента
Доказать различие нескольких пар средних арифметических	Отличаются доминирующие факторы	Метод попарных сравнений Шеффе (однофакторный дисперсионный анализ)
Доказать различие двух стандартных отклонений	Отличаются случайные факторы, участвующие в формировании выборки	Критерий Стьюдента
Доказать различие двух дисперсий	Отличаются случайные факторы	Критерий Фишера
Доказать различие двух коэффициентов вариации	Отличаются случайные факторы	Критерий Стьюдента
Доказать различие между эмпирическим и теоретическим частотными распределениями	Поведение случайной величины соответствует какому-либо закону распределения	Критерий Пирсона
Доказать различие двух эмпирических частотных распределений	Отличаются в целом любые факторы	Критерий Пирсона
Доказать различие двух выборок в целом	Отличаются в целом любые факторы	Непараметрические критерии Уилкоксона, Уайта, Розенбаума

Задача. Производительность двух моторных заводов, выпускающих дизельные двигатели, характеризуется следующими данными:

1-й завод	72	84	69	74	82	67	75	86	68	61
2-й завод	55	65	73	66	58	71	77	68	68	59

Можно ли считать одинаковыми производительности дизельных двигателей на обоих заводах при уровне значимости α=0,05?

Решение. Найдем выборочные числовые характеристики данных независимых выборок (1-й завод – выборка X, 2-й завод – выборка Y).

$\bar{X}$ =74, D_x=59,2; $\bar{Y} = 66$, D_x=43,8.

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{D_x}{n}+\frac{D_y}{n}}}=\frac{74-66}{\sqrt{\frac{59.2}{10}+\frac{43,8}{10}}}=2,5.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) \neq M(Y)$, поэтому критическая область − двусторонняя.

Найдем критическую точку: $\Phi(Z)= \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0,05}{2}$ =0,475.

По таблице функции Лапласа (прил. 2) находим $Z_{кр} \approx 2$.

Так как $|Z_{эмп}|$=2,5>2=$Z_{кр}$, то нулевая гипотеза об одинаковости производительности двух заводов отклоняется.

Задача. Сравнить среднее двух независимых выборок

X и Y методом Стьюдента при уровне значимости α=0,05. Сформулировать выводы.

выборка Y

14,2	13,8	15,9	14,6	18,1	18,1	16,8	12,2
11,7	10,6	16,9	15,7	11,7	12,6	15,2	12,4
12,4	12,2	16,7	15,8	11,3	17,2	12,3	13,5
12,1	14,7	13,8	14,7	12,2	12,6	12,4	15,5
10,2	9,7	10,6					

выборка X

10,5	10,9	10,5	11,4	11,9	10,7	10,9	11,5
12,8	11,2	12,3	12,7	11,6	12,8	14,9	14,3
7,7	10,3	9,7	11,2	5,7	11,2	11,8	

Решение. Оценим параметры распределения:

Среднее значение вариационного ряда распределения: $\bar{X}$ =11,23; $\bar{Y}$ =13,72.

Дисперсию оценим по формуле:

$D_x = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2 f_i}{\sum f_i} = 3{,}63$ и, соответственно $\sigma_x = 1{,}90$;

$D_y = \frac{\sum(y_i - \overline{y})^2 * f_i}{\sum f_i} = 5{,}34$ и, соответственно $\sigma_y = 2{,}31$.

Далее определим значение критерия Стьюдента по формуле

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2}} = \frac{11{,}23 - 13{,}72}{\sqrt{3{,}63 + 5{,}34}} = \frac{-2{,}49}{2{,}99} = -0{,}83.$$

Определяем число степеней свободы по формуле:

$f=(n_1+n_2)-2=(23+35)-2=56$

Сравним полученное по модулю значение t-критерия Стьюдента $|-0{,}83|=0{,}83$ с критическим при $p=0{,}05$ значением (прил. 1): 2,003. Так как рассчитанное значение критерия меньше критического, делаем вывод о том, что наблюдаемые различия средних значений двух выборок статистически не значимы (уровень значимости $p<0{,}05$).

Задача. Проверить гипотезу о соответствии закону нормального распределения вариационного ряда:

Группы К(Ф)Х по величине чистой прибыли (усл.ед.)	1,6-1,8	1,8-2,0	2,0-2,2	2,2-2,4	2,4-2,6
Число К(Ф)Х	10	12	17	5	2

Решение. Оценим параметры распределения. Среднее значение интервального ряда распределения:

$$\bar{X}=\frac{\sum \bar{x}_i f_i}{\sum f_i}=\frac{1{,}7\cdot10+1{,}9\cdot12+2{,}1\cdot17+2{,}3\cdot5+2{,}5\cdot2}{46}=2.$$

Дисперсию по формуле:

$$D=\frac{\sum(\overline{x_i}-\overline{x})^2\cdot f_i}{\sum f_i}=\frac{(1{,}7-2)^2\cdot10+(1{,}9-2)^2\cdot12+(2{,}1-2)^2\cdot17+(2{,}3-2)^2\cdot5+(2{,}5-2)^2\cdot2}{46}=\quad 0{,}0468;$$

соответственно среднеквадратическое отклонение σ=0,216.

Далее для удобства представим данные в табличном виде, которые по мере вычислений необходимо заполнять.

Интервалы группировки	Верхняя граница интервала		Интегральная функция нормального распределения	Плотность распределения	Частоты	
	исходная	нормированная			теоретические	фактические
i	$x_i^{в}$	U_i	$\Phi(U_i)$	φ_i	P_i	f_i
1,6-1,8	1,8	–0,92	0,1788	0,1788	8	10
1,8-2,0	2,0	0	0,5000	0,3212	15	12
2,0-2,2	2,2	0,92	0,8212	0,3212	15	17
2,2-2,4	2,4	1,85	0,9678	0,1466	7	5
2,4-2,6	2,6	2,77	0,9972	0,0294	2	2

Нормированные значения верхних границ интервалов определяются как $U_i = \frac{x_i^{в} - \bar{x}}{\sigma}$, где $\bar{x}$ – средняя величина; σ – среднеквадратическое отклонение.

Интегральная функция нормального распределения определяется по таблицам математической статистики (прил. 5, 6) в зависимости от значений U_i.

Плотность распределения для интервалов группировки определяется как разность между соседними значениями функций распределения:

$$\varphi_i = \Phi(U_i) - \Phi(U_{i-1}).$$

Теоретическая частота рассчитывается для каждого интервала как:

$$P_i = \varphi_i \cdot n,$$

где φ_i – плотность распределения, n – общее количество наблюдений.

Значение критерия =2,02.

Критическое значение χ^2 при уровне значимости α=0,05 и числе степеней свободы 4 (m–1, где, m – число интервальных рядов) равно 9,5 (прил. 3).

Так как рассчитанное значение критерия меньше критического, то отклонение фактических частот от эмпирических можно считать случайным, а само распределение – близким к нормальному распределению.

Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Аппарат статистических гипотез.
2. Критерии проверки статистических гипотез.
3. Уровень значимости α, ошибки первого и второго рода
4. Охарактеризуйте для какой задачи применяется

соответствующий критерий.

5. По данным, представленным в таблице, необходимо проверить гипотезу о соответствии закону нормального распределения вариационного ряда.

Урожайность пшеницы, ц/га	25-26,5	26,5-28	28-29,5	29,5-31	31-32,5	32,5-34
Число опытных участков	11	10	7	5	4	3

6. Сравнить среднее двух независимых выборок X и Y методом Стьюдента при уровне значимости α=0,05. Сформулировать выводы.

Выборка X

3,7	3,6	4,0	4,1	2,9	3,2	3,6	3,4
3,4	3,1	2,5	3,8	2,8	3,3	2,9	3,6
2,9	3,2	2,6	3,9	2,5	3,4	3,0	4,0

Выборка Y

3,9	2,5	4,3	3,7	3,7	4,3	2,5	2,1
3,6	2,4	2,9	3,6	3,9	4,1	2,2	2,3
2,7	3,3	2,6	2,9	3,2	4,0	2,9	2,8

7. При оценке выживаемости особей (количество оставшихся в живых особей после суток пребывания в сосуде) в двух сосудах при различных концентрациях аммонийного азота были получены следующие данные:

Сосуд	Концентрация аммонийного азота (ПДК 2,0 мг/л)			Всего
	до 2,0 мг/л	2,5 мг/л	3,5 мг/л	
А	46	28	18	92
Б	52	42	24	118
Всего	98	70	42	210

Оценить с помощью критерия χ^2, отличается ли выживаемость особей в сосудах А и Б. Сформулировать выводы.

8. Результаты измерений размера детенышей в выборке 1000 самок представлены в таблице (в первой строке указаны размеры детенышей, во второй – частоты появления детенышей соответствующих размеров):

Размеры	98,0	98,5	99,0	99,5	100	100,5	101,0	101,5	102,0	102,5
Частоты	21	47	87	158	181	201	142	97	41	25

Проверить при помощи критериев согласия гипотезу: выборочное распределение имеет нормальный закон распределения при уровне значимости α=0,05. За параметры нормального закона распределения принять их оценки, вычисленные по экспериментальным данным.

9. При испытании нового лекарственного препарата на лабораторных мышах было проведено взвешивание после месячного приема. В эксперименте изучались две группы мышей: опытная, которой давали новый препарат, и

контрольная, принимавшая плацебо. Были получены следующие данные по массе (г):

Опытная группа	80	76	75	64	70	68	72	79	83
Контрольная группа	70	78	60	80	62	68	73	60	71

При уровне значимости α=0,05 определить различие средних арифметических сравниваемых групп.

10. По данным, представленным в таблице, необходимо проверить гипотезу о соответствии закону нормального распределения вариационного ряда.

Содержание жира в молоке, %	3,5-3,7	3,7-3,9	3,9-4,1	4,1-4,3	4,3-4,5
Число коров	12	10	8	4	2

4. ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Контрольная работа является обязательной формой контроля для промежуточной аттестации знаний. Она включает в себя выполнение двух практических заданий. Контрольное задание считается выполненным, если студент верно, полно и обоснованно решил поставленные задачи.

Контрольная оценивается преподавателем как «зачтено» или «не зачтено». Если студент получил «незачет», то он в обязательном порядке должен доработать контрольную работу, опираясь на замечания преподавателя.

Если студент не прорабатывает допущенные при работе ошибки и не сдает контрольную, то он автоматически не допускается к сдаче экзамена.

Контрольная работа оформляется либо от руки в тетради, либо на компьютере в соответствии с требованиями, предъявляемым к контрольным работам. *В контрольной работе по первому заданию вариант берётся исходя из шифра зачётной книжки студента, по второму заданию – согласно порядковому номеру студента из списка группы.*

Задания

Задание 1.

1.1. Выполнить действия с матрицами:

$$\text{а) } 4\cdot\begin{pmatrix} m-n & n \\ 2 & 0 \\ m+n & -m \end{pmatrix} - 1{,}5\cdot\begin{pmatrix} 2m & 1 \\ n & m \\ 2 & n \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & m & n+1 \\ 0 & 2n & -2 \\ 3 & 1 & m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & n \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2. Определить, чему равен Δ матрицы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} m+n & 2m & n \\ n & m-n & -m \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

а) по правилу треугольника; б) разложением по строке.

1.3. Решить систему: а) способом Крамера; б) методом Гаусса:

Для того, чтобы подставить в условия задачи вместо m и n числовые данные, необходимо взять две последние цифры в шифре зачётной книжки и выбрать для них соответствующие значения из таблицы:

Выбор параметра m по предпоследней цифре										
Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	4	3	5	1	3	2	4	2	1	5
Выбор параметра n по последней цифре										
Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	3	2	1	4	5	3	1	5	2	4

Задание 2. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Требуется найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) математическое ожидание $M(X)$;

в) дисперсию $D(X)$;

г) вероятность попадания случайной величины X на заданный интервал $(\alpha; \beta)$;

Вариант 1. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ \sin 2x, \text{при } 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 1, \text{при } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$ при $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{6}$.

Вариант 2. *F(x)* $=\begin{Bmatrix} 0, \text{при} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{16}(x^4 - 1), \text{при} \quad 1 < x \leq 2 \\ 1, \text{при} \quad x > 2 \end{Bmatrix}$ при $\alpha =$ $1{,}3, \beta = 1{,}7.$

Вариант 3. *F(x)* $=\begin{Bmatrix} 0, \text{при} \quad x \leq 0 \\ (5x + 2)^2, \text{при} \quad 0 < x \leq 2 \\ 1, \text{при} \quad x > 2 \end{Bmatrix}$ при $\alpha =$ $1{,}5, \beta = 2.$

Вариант 4. *F(x)* $=\begin{Bmatrix} 0, \text{при} \quad x \leq 0 \\ (5x + 2)^2, \text{при} \quad 0 < x \leq 2 \\ 1, \text{при} \quad x > 2 \end{Bmatrix}$ при $\alpha =$ $1{,}5, \beta = 2.$

Вариант 5. *F(x)* $=\begin{Bmatrix} 0, \text{при} \quad x \leq 0 \\ \cos\frac{x}{2}, \text{при} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, \text{при} \quad x > \frac{\pi}{2} \end{Bmatrix}$ при $\alpha =$ $0, \beta = \frac{\pi}{4}.$

Вариант 6. $\begin{Bmatrix} 0, \text{при} \quad x \leq 0 \\ 2 + \frac{1}{(x-1)^2}, x \geq 0 \end{Bmatrix}$ при $\alpha = \quad 0, \beta = 4.$

Вариант 7. $\begin{Bmatrix} 0, \text{при} \quad x \leq 0 \\ 6 - \frac{1}{(x+2)^2}, x \geq 0 \end{Bmatrix}$ при $\alpha = \quad 1, \beta = 3.$

Вариант 8. А) *F(x)* $=\begin{Bmatrix} 0, \text{при} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, \text{при} \quad 0 < x < 3 \\ 1, \text{при} \quad x \geq 3 \end{Bmatrix}$ при $\alpha = \quad 1, \beta =$
5.

Б) Найти математическое ожидание для величины X, распределенной непрерывно с плотностью $f(x)=8(x^2+x)$ при $x\in(0, 1)$ и $f(x)=0$ в остальных точках.

Вариант 9. А) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } \ x \le 0 \\ \frac{1}{x}, \text{при } \ 0 < x < 3 \\ 1, \text{при } \ x \ge 3 \end{cases}$ при $\alpha = 1, \beta = 2.$

Б) Найти математическое ожидание для величины X, распределенной непрерывно с плотностью $f(x)= (x^2+x)$ при $x\in(0, 1)$ и $f(x)=0$ в остальных точках.

Вариант 10. А) $F(x)= \begin{cases} 0, \text{при } \ x \le 0 \\ \frac{x}{3}, \text{при } \ 0 < x < 3 \\ 1, \text{при } \ x \ge 3 \end{cases}$ при $\alpha = 2, \beta = 5.$

Б) Найти математическое ожидание для величины X, распределенной непрерывно с плотностью $f(x)=7(x^3–x^4)$ при $x\in(0, 1)$ и $f(x)=0$ в остальных точках.

Вариант 11. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } \ x \le 0 \\ \frac{32x^2}{9}, \text{при } \ 0 < x < \frac{3}{4} \\ 0, \text{при } \ x > \frac{3}{4} \end{cases}$ при $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{4}.$

Вариант 12. $F(x) \quad = \begin{Bmatrix} 0, \text{при} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{(x^2-2)}, 0 \leq x \leq 4 \\ 1, x > 4 \end{Bmatrix}$ при $\alpha = \quad 3, \beta =$

4.

Вариант 13. $F(x) = \begin{Bmatrix} 0, \text{при} \quad x \leq 0 \\ \sin 2x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1, x > \frac{\pi}{4} \end{Bmatrix}$

при $\alpha = \quad 3, \beta = \frac{\pi}{6}$.

Вариант 14. $F(x) = \begin{Bmatrix} 0, \text{при} \quad \mathrm{x} \leq 2 \\ \frac{1}{2}(x-2)(5-x), \text{при} \quad 2 < \mathrm{x} \leq 3 \\ 1, x > 3 \end{Bmatrix}$

при $\alpha = \quad 2{,}5, \beta$

$= 3$

Вариант 15. $F(x) = \begin{Bmatrix} 0, \text{при} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), 0 \leq x \leq \pi \\ 1, x > \pi \end{Bmatrix}$

при $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 16. $F(x) = \begin{Bmatrix} 0, \text{при} \quad x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4}, 0 \leq x \leq 2 \\ 1, x > 2 \end{Bmatrix}$

при $\alpha = \quad 1, \beta = 2$.

Вариант 17. $F(x) = \begin{Bmatrix} 0, \text{при} \quad x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right), 0 < x \leq 3 \\ 1, x > 3 \end{Bmatrix}$

при $\alpha = \quad 0, \beta = \frac{3}{2}$.

Вариант 18. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } \frac{1}{e} \leq x \leq 1 \\ \ln x, 1 \leq x \leq e \\ 1, x > e \end{cases}$

при $\alpha = \quad 1, \beta = 2$.

Вариант 19. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \cos x, \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ 1, \text{при } x > 0 \end{cases}$

при $\alpha = \quad -\frac{\pi}{3}, \beta = 0$.

Вариант 20. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \leq 0 \\ \frac{64x}{18}, \text{при } 0 < x < \frac{3}{4} \\ 0, \text{при } x > \frac{3}{4} \end{cases}$

при $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{2}$.

Вариант 21. Случайная величина *X* задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 1 \\ x - 1, 1 < x \leq 3 \\ 0, x > 3 \end{cases}.$$

Найти функцию распределения *F(x)*. Найти *M(x), D(x)*.

Вариант 22. Случайная величина *X* задана плотностью вероятности:

$$f(x)= \begin{cases} 0, x \le \pi \\ -\mathrm{tg}x,\ \pi < x \le \frac{3\pi}{2} \\ 0, x > \frac{3\pi}{2} \end{cases}.$$

Определить вероятность попадания случайной величины *X* на интервал $[\pi, \frac{5\pi}{4}]$. Найти *M(x), D(x)*.

Вариант 23. Случайная величина задана дифференцированной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при} \ \ x \le \pi \\ \sin x, \text{при} \ \ \pi < x \le \frac{4\pi}{3} \\ 0, \text{при} \ \ x > \frac{4\pi}{3} \end{cases} \ \text{при} \ \ \alpha = \ \ 0, \beta = \frac{\pi}{6}.$$

Определить вероятность попадания случайной величины *X* на интервал $[\pi, \frac{5\pi}{4}]$. Найти *M(x), D(x)*.

Вариант 24. Случайная величина *X* задана плотностью вероятности:

$$f(x)= \begin{cases} 0, \text{при} \ \ x \le 1 \\ \frac{x-1}{2}, \text{при} \ \ 1 < x < 3 \\ 0, \text{при} \ \ x > 3 \end{cases}.$$

Определить вероятность попадания случайной величины *X* на интервал [0, 3]. Найти *M(x), D(x)*.

Вариант 25. Случайная величина *X* задана плотностью вероятности:

$$f(x)= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}, \text{при} -3 < x \le 3 \\ 0, \text{при} \ \ x \le -3 \ \ \text{или} \ \ \ x > 3 \end{cases}$$

Определить вероятность попадания случайной величины *X* на интервал [1, 2]. Найти *M(x), D(x)*.

5. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

1. Дать определение матрицы. Привести примеры.
2. Перечислить виды матриц, дать их определение и привести примеры различных видов матриц.
3. Сформулировать условие равенства матриц. Что такое соответствующие элементы матриц?
4. Дать определение операции транспонирования матрицы. Перечислить свойства этой операции.
5. Дать определение операции сложения матриц. Перечислить свойства этой операции.
6. Дать определение операции умножения матрицы на число. Перечислить свойства этой операции.
7. Дать определение операции умножения матриц. Перечислить свойства этой операции.
8. Что называется многочленом от матрицы?
9. Чем обратимая матрица отличается от обратной? Перечислить свойства обратимых матриц.
10. Какое число называется определителем 1–го, 2–го и 3–го порядка?

11. Что называется минором и алгебраическим дополнением элемента матрицы?
12. Каковы основные свойства определителей?
13. С помощью какого свойства можно вычислить определитель любого порядка?
14. Понятие определённого интеграла (интегральная сумма, определение определённого интеграла, интегрируемая функция).
15. В чём заключается суть интегрального исчисления функции одной переменной.
16. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функции на отрезке.
17. Назовите методы интегрирования функции.
18. Задачи математической статистики.
19. Дать определение случайной величины. Виды случайных величин.
20. Числовые характеристики случайных величин.
21. Свойства математического ожидания и дисперсии случайной величины.
22. Функция распределения случайной величины: определение, свойства.
23. Перечислите основные характеристики непрерывной случайной величины.

24. Плотность распределения: определение, свойства.
25. Выборочные распределения и их характеристики.
26. Статистические оценки и требования, предъявляемые к ним. Примеры оценок. Свойства выборочного среднего и выборочной дисперсии.
27. Выборочное среднее и выборочная дисперсия для гауссовской выборки.
28. Доверительные интервалы для параметров нормального закона.
29. Построение доверительного интервала с помощью заданной статистики.
30. Общие понятия, связанные с проверкой гипотез.
31. Критерий для проверки независимости признаков, для проверки гипотезы однородности.
32. Проверка гипотез о параметрах двух гауссовских выборок.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Критические значения t-критерия Стьюдента

при различных уровнях значимости p

Число степеней свободы *k*	p			Число степеней свободы *k*	p		
	0,05	0,01	0,001		0,05	0,01	0,001
1	12,71	63,66	64,60	18	2,10	2,88	3,92
2	4,30	9,92	31,60	19	2,09	2,86	3,88
3	3,18	5,84	12,92	20	2,09	2,85	3,85
4	2,78	4,60	8,61	21	2,08	2,83	3,82
5	2,57	4,03	6,87	22	2,07	2,82	3,79
6	2.45	3,71	5,96	23	2,07	2,81	3,77
7	2,37	3,50	5,41	24	2,06	2,80	3,75
8	2,31	3,36	5,04	25	2,06	2,79	3,73
9	2,26	3,25	4,78	26	2,06	2,78	3,71
10	2,23	3,17	4,59	27	2,05	2,77	3,69
11	2,20	3,11	4,44	28	2,05	2,76	3,67
12	2,18	3,05	4,32	29	2,05	2,76	3,66
13	2,16	3,01	4,22	30	2,04	2,75	3,65
14	2,14	2,98	4,14	40	2,02	2,70	3,55
15	2,13	2,95	4,07	60	2,00	2,66	3,46
16	2,12	2,92	4,02	120	1,98	2,62	3,37
17	2,11	2,90	3,97	∞	1,96	2,58	3,29

Приложение 2

Распределение Пирсона (χ^2 – распределение)

ν	Вероятность										
	0,999	0,995	0,99	0,98	0,975	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,50
1	0,05157	0,04393	0,03157	0,03628	0,03982	0,00393	0,0158	0,0642	0,102	0,148	0,455
2	0,00200	0,0100	0,0201	0,0404	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,575	0,713	1,386
3	0,0243	0,0717	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	1,213	1,424	2,366
4	0,0908	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	1,923	2,195	3,357
5	0,210	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	2,675	3,000	4,351
6	0,381	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	3,455	3,828	5,348
7	0,598	1,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	4,255	4,671	6,346
8	0,857	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	4,594	5,071	5,527	7,344
9	1,152	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	5,380	5,899	6,393	8,343
10	1,479	2,156	2,558	3,059	3,247	3,240	4,865	6,179	6,787	7,267	9,342
11	1,843	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	6,989	7,584	8,148	10,341
12	2,214	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	7,807	8,438	9,034	11,340
13	2,617	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	8,634	9,299	9,926	12,340
14	3,041	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	9,467	10,165	10,821	13,339
15	3,483	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	10,307	11,036	11,721	14,339

Продолжение таблицы приложения 2

ν	Вероятность										
	0,999	0,995	0,99	0,98	0,975	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,50
17	4,416	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	12,002	12,892	13,531	16,338
18	4,905	6,265	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	12,857	13,675	14,440	17,338
19	5,407	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	14,562	15,352	18,338
20	5,921	7,434	8,260	9,237	9,591	10,871	12,443	14,578	15,452	16,266	19,337
21	6,447	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	15,445	16,344	17,182	20,337
22	6,983	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	16,314	17,240	18,101	21,337
23	7,529	9,260	10,196	11,293	11,688	13,091	14,848	17,187	18,137	19,021	22,337
24	8,035	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	18,062	19,037	19,943	23,337
25	8,649	10,520	11,524	12,697	13,120	14,611	16,173	18,940	19,939	20,887	24,337
26	9,222	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	19,820	20,848	21,792	25,336
27	9,803	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	20,703	21,749	22,791	26,136
28	10,391	12,461	13,565	14,547	15,308	16,928	19,937	21,588	22,657	23,617	27,386
29	10,986	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	22,475	23,567	24,577	28,336
30	11,588	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	23,364	24,478	25,508	29,336

Продолжение таблицы приложения 2

ν	Вероятность									
	0,30	0,25	0,20	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,001
1	1,074	1,323	1,642	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879	10,827
2	2,408	2,773	3,219	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597	13,815
3	3,665	4,108	4,642	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838	16,268
4	4,878	5,385	5,989	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860	18,465
5	6,064	6,262	7,289	9,236	11,070	12,839	13,388	15,086	16,750	20,517
6	7,231	7,841	8,558	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548	22,457
7	8,383	9,037	9,803	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278	24,322
8	9,524	10,219	11,030	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955	26,125
9	10,656	11,389	12,242	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589	27,877
10	11,781	12,549	13,412	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188	29,588
11	12,899	13,701	14,631	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757	31,264
12	14,011	14,845	15,812	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300	32,909
13	15,119	15,984	16,985	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819	34,528
14	16,222	17,117	18,151	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319	36,123
15	17,322	18,245	19,311	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801	37,697

Окончание таблицы приложения 2

ν	Вероятность									
	0,30	0,25	0,20	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,001
17	19,511	20,489	21,615	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718	40,790
18	20,601	21,605	22,760	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156	42,312
19	21,689	22,718	23,900	27,204	30,144	32,852	33,687	39,191	38,582	43,820
20	22,775	23,628	25,038	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997	45,315
21	23,858	24,935	26,171	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932	41,401	46,797
22	24,939	26,039	27,301	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796	48,268
23	26,018	27,141	28,429	32,567	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181	49,728
24	27,096	28,241	29,553	33,193	36,415	39,384	40,270	42,980	45,558	51,170
25	28,172	29,339	30,675	34,362	37,652	40,046	41,566	44,314	46,928	52,620
26	29,246	30,434	31,795	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290	54,052
27	30,319	31,328	32,912	36,741	40,113	43,194	44,140	46,963	49,645	55,476
28	31,391	32,320	34,027	37,916	41,337	11,461	45,419	48,278	50,993	56,893
29	32,461	33,711	35,139	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336	58,302
30	33,530	34,800	36,250	40,256	43,773	46,979	47,962	50,692	53,672	59,703

Приложение 3

Критические значения критерия χ^2

n-1	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,750	0,500	0,250	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	0,00004	0,00016	0,00098	0,00393	0,01579	0,10153	0,45494	1,32330	2,70554	3,84146	5,02389	6,63490	7,87944
2	0,01003	0,02010	0,05064	0,10259	0,21072	0,57536	1,38629	2,77259	4,60517	5,99146	7,37776	9,21034	10,59663
3	0,07172	0,11483	0,21580	0,35185	0,58437	1,21253	2,36597	4,10834	6,25139	7,81473	9,34840	11,34487	12,83816
4	0,20699	0,29711	0,48442	0,71072	1,06362	1,92256	3,35669	5,38527	7,77944	9,48773	11,14329	13,27670	14,86026
5	0,41174	0,55430	0,83121	1,14548	1,61031	2,67460	4,35146	6,62568	9,23636	11,07050	12,83250	15,08627	16,74960
6	0,67573	0,87209	1,23734	1,63538	2,20413	3,45460	5,34812	7,84080	10,64464	12,59159	14,44938	16,81189	18,54758
7	0,98926	1,23904	1,68987	2,16735	2,83311	4,25485	6,34581	9,03715	12,01704	14,06714	16,01276	18,47531	20,27774
8	1,34441	1,64650	2,17973	2,73264	3,48954	5,07064	7,34412	10,21885	13,36157	15,50731	17,53455	20,09024	21,95495
9	1,73493	2,08790	2,70039	3,32511	4,16816	5,89883	8,34283	11,38875	14,68366	16,91898	19,02277	21,66599	23,58935
10	2,15586	2,55821	3,24697	3,94030	4,86518	6,73720	9,34182	12,54886	15,98718	18,30704	20,48318	23,20925	25,18818
11	2,60322	3,05348	3,81575	4,57481	5,57778	7,58414	10,34100	13,70069	17,27501	19,67514	21,92005	24,72497	26,75685
12	3,07382	3,57057	4,40379	5,22603	6,30380	8,43842	11,34032	14,84540	18,54935	21,02607	23,33666	26,21697	28,29952
13	3,56503	4,10692	5,00875	5,89186	7,04150	9,29907	12,33976	15,98391	19,81193	22,36203	24,73560	27,68825	29,81947
14	4,07467	4,66043	5,62873	6,57063	7,78953	10,16531	13,33927	17,11693	21,06414	23,68479	26,11895	29,14124	31,31935
15	4,60092	5,22935	6,26214	7,26094	8,54676	11,03654	14,33886	18,24509	22,30713	24,99579	27,48839	30,57791	32,80132

Окончание таблицы приложения 3

n-1	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,750	0,500	0,250	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
16	5,14221	5,81221	6,90766	7,96165	9,31224	11,91222	15,33850	19,36886	23,54183	26,29623	28,84535	31,99993	34,26719
17	5,69722	6,40776	7,56419	8,67176	10,08519	12,79193	16,33818	20,48868	24,76904	27,58711	30,19101	33,40866	35,71847
18	6,26480	7,01491	8,23075	9,39046	10,86494	13,67529	17,33790	21,60489	25,98942	28,86930	31,52638	34,80531	37,15645
19	6,84397	7,63273	8,90652	10,11701	11,65091	14,56200	18,33765	22,71781	27,20357	30,14353	32,85233	36,19087	38,58226
20	7,43384	8,26040	9,59078	10,85081	12,44261	15,45177	19,33743	23,82769	28,41198	31,41043	34,16961	37,56623	39,99685
21	8,03365	8,89720	10,28290	11,59131	13,23960	16,34438	20,33723	24,93478	29,61509	32,67057	35,47888	38,93217	41,40106
22	8,64272	9,54249	10,98232	12,33801	14,04149	17,23962	21,33704	26,03927	30,81328	33,92444	36,78071	40,28936	42,79565
23	9,26042	10,19572	11,68855	13,09051	14,84796	18,13730	22,33688	27,14134	32,00690	35,17246	38,07563	41,63840	44,18128
24	9,88623	10,85636	12,40115	13,84843	15,65868	19,03725	23,33673	28,24115	33,19624	36,41503	39,36408	42,97982	45,55851
25	10,51965	11,52398	13,11972	14,61141	16,47341	19,93934	24,33659	29,33885	34,38159	37,65248	40,64647	44,31410	46,92789
26	11,16024	12,19815	13,84390	15,37916	17,29188	20,84343	25,33646	30,43457	35,56317	38,88514	41,92317	45,64168	48,28988
27	11,80759	12,87850	14,57338	16,15140	18,11390	21,74940	26,33634	31,52841	36,74122	40,11327	43,19451	46,96294	49,64492
28	12,46134	13,56471	15,30786	16,92788	18,93924	22,65716	27,33623	32,62049	37,91592	41,33714	44,46079	48,27824	50,99338
29	13,12115	14,25645	16,04707	17,70837	19,76774	23,56659	28,33613	33,71091	39,08747	42,55697	45,72229	49,58788	52,33562
30	13,78672	14,95346	16,79077	18,49266	20,59923	24,47761	29,33603	34,79974	40,25602	43,77297	46,97924	50,89218	53,67196

Приложение 4

Критические значения критерия Т Вилкоксона для уровней статистической значимости $p \leq 0{,}05$ и $p \leq 0{,}01$

n	*p*		*n*	*p*	
	0,05	0,01		0,05	0,01
5	0	–	28	130	101
6	2	–	29	140	110
7	3	0	30	151	120
8	5	1	31	163	130
9	8	3	32	175	140
10	10	5	33	187	151
11	13	7	34	200	162
12	17	9	35	213	173
13	21	12	36	227	185
14	25	15	37	241	198
15	30	19	38	256	211
16	35	23	39	271	224
17	41	27	40	286	238
18	47	32	41	302	252
19	53	37	42	319	266
20	60	43	43	336	281
21	67	49	44	353	296
22	75	55	45	371	312
23	83	62	46	389	328
24	92	69	47	407	345
25	100	76	48	426	362
26	110	84	49	446	379
27	119	92	50	466	397

Приложение 5

Значения функции $F(Z)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Z} e^{\frac{-y^2}{2}}\,dy$

Z	–0,0	–0,1	–0,2	–0,3	–0,4	–0,5	–0,6	–0,7	–0,8	–0,9	–1,0	–1,1	–1,2
0,00	0,5	0,4602	0,4207	0,3821	0,3446	0,3085	0,2743	0,242	0,2119	0,1841	0,1587	0,1357	0,1151
0,02	0,492	0,4522	0,4129	0,3745	0,3372	0,3015	0,2676	0,2358	0,2061	0,1788	0,1539	0,1314	0,1112
0,04	0,484	0,4443	0,4052	0,3669	0,33	0,2946	0,2611	0,2297	0,2005	0,1736	0,1492	0,1271	0,1075
0,06	0,4761	0,4364	0,3974	0,3594	0,3238	0,2877	0,2546	0,2236	0,1949	0,1685	0,1446	0,123	0,1038
0,08	0,4681	0,4286	0,3897	0,352	0,3156	0,281	0,2483	0,2177	0,1894	0,1635	0,1401	0,119	0,1003
Z	–1,3	–1,4	–1,5	–1,6	–1,7	–1,8	–1,9	–2,0	–2,1	–2,2	–2,3	–2,4	–2,5
0,00	0,0968	0,0808	0,0668	0,0548	0,0446	0,0359	0,0287	0,0227	0,0179	0,0139	0,0107	0,0082	0,0062
0,02	0,0934	0,0778	0,0643	0,0526	0,0427	0,0344	0,0274	0,0217	0,017	0,0132	0,0102	0,0078	0,0059
0,04	0,0901	0,0749	0,0618	0,0505	0,0409	0,0329	0,0262	0,0207	0,0162	0,0125	0,0096	0,0073	0,0055
0,06	0,0869	0,0721	0,0594	0,0485	0,0392	0,0314	0,025	0,0197	0,0154	0,0119	0,0091	0,0069	0,0052
0,08	0,0838	0,0694	0,057	0,0465	0,0375	0,03	0,0238	0,0188	0,0146	0,0113	0,0087	0,0066	0,0049
Z	–2,6	–2,7	–2,8	–2,9	–3,0								
0,00	0,0047	0,0035	0,0026	0,0019	0,0013								
0,02	0,0044	0,0033	0,0024	0,0018	0,0007								
0,04	0,0041	0,0031	0,0023	0,0016	0,0003								
0,06	0,0039	0,0029	0,0021	0,0015	0,0002								
0,08	0,0037	0,0027	0,0020	0,0014	0,0001								

Содержание

Автор-составитель **Рябова Надежда Николаевна**

Математика и математическая статистика

Учебное пособие

Редактор Т.К. Коробкова

Компьютерная вёрстка Зверев А.Е.

Подписано к печати 19 декабря 2021 г.

Формат 60х84 1/16. Тираж 100 экз.

уч.-изд. л., 11,2 усл. печ. л. 3,5

Заказ № 2474

Отпечатано в Издательском центре НГАУ «Золотой колос»

630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160, каб.106.

Тел. (383) 267-09-10. E-mail 2134539@mail.ru